공학석사 학위논문

# 동축소법을 이용한 부분구조합성법

**Substructure Synthesis Method using Dynamic Reduction**

지도교수 박 석 주

2000년 2월

한국해양대학교 대학원

조 선 공 학 과

김 성 우

本 論文을 金聖祐의 工學碩士 學位論文으로 認准함.

위원장 왕 지 석 인

위 원 김 의 간 인

위 원 박 석 주 인

2000년 2월

한국해양대학교 대학원

조선공학과 김 성 우

# 목 차

## Substructure Synthesis Method using Dynamic Reduction

*Seong-Woo, Kim*

*Department of Naval Architecture,*
*Graduate School, Korea Maritime University*

# Abstract

The finite element method(FEM) has been developed and applied for dynamic analysis on structures. In these days, it is a very common method for not only a simple vibration analysis but also the optimization of structures.

However, when we apply that method for the complicated and the huge structures, we should increase the number of elements to get more accurate results. Furthermore, it causes the increase of the degree of freedom and the limitation of calculating time and memory capacity of computer.

So, many researchers have challenged to find more improved modeling techniques and calculation methods to overcome those hurdles.

The Guyan's reduction method and the substructure synthesis method are typical examples of such methods. Of the substructure synthesis method, the component mode synthesis method(CMS) is widely used for dynamic analysis of structure.

However, as order of natural frequency becomes higher, it causes errors because it implies the Guyan's static reduction and the number of modes taken from each component is deficient.

In this thesis, the substructure synthesis method using dynamic reduction is proposed to obtain accurate results in high order natural frequency range.

Computer simulation of the proposed method, FEM, and the component mode synthesis method(CMS) have been carried out on a rectangular plate to prove the availability of the proposed method.

The results are as follows :

1. The analytical results of the substructure synthesis method using dynamic reduction coincide with those of FEM, and the availability of the proposed method has been verified.

2. The proposed method can overcome the error occurrence which were caused by the defects of the component mode synthesis method using Guyan's static reduction.

3. The natural frequency of the specific frequency range can be obtained without errors. So, it is expected that the proposed method could be applied to the analysis in high frequency range like noise problem.

# 기 호 설 명

| | |
|---|---|
| {F } | **외력 벡터** |
| {X } | **변위 벡터** |
| 「 I 」 | **단위 행렬** |
| [ K ] | **강성 행렬** |
| [ M ] | **질량 행렬** |
| [ T ] | **정축소 행렬** |
| [ $\overline{T}$ ] | **동축소 행렬** |
| $c$ | **결합 영역** |
| $e$ | **내부 영역** |
| { $\xi$ } | **모우드 좌표계에서의 변위벡터** |
| [ $\Phi$ ] | **고유모우드 행렬** |
| $\omega$ | **고유각진동수** |

# 1. 서　론

구조물의 동적 해석 문제에 대한 유한 요소 해석법은 지난 수십 년 간 많은 연구자들에 의해 개발 · 적용되어 왔으며 현재는 단순한 진동해석뿐만 아니라 최적화문제 등에도 활용되는 범용적인 도구가 되고 있다.

그러나 유한요소법에 의한 진동해석은 구조물이 복잡해지거나 대형화되면 해석결과의 정도를 높이기 위해 일반적으로 요소분할 수를 증가시켜야 하므로 자유도가 매우 커지게 되어 컴퓨터의 발전에도 불구하고 계산시간과 계산기 기억용량의 제한을 받게 된다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 보다 개선된 모델링 기법 및 계산방법의 개발에 많은 관심을 가져왔다. 그 중에서 행렬 축소법과 부분 구조 합성법(sub-structure synthesis method ; SSM)을 대표적으로 꼽을 수 있다.[1] [4]

행렬 축소법중에서는 Guyan의 정축소법[5](static reduction method)이 대표적이나 이 정축소법은 질량항을 무시하고 강성항만으로 행렬을 축소하여 해석하게 되므로 고유진동수가 높아질수록 오차가 커지게 되는 단점이 있다.

부분 구조 합성법은 전체 구조물(이하 전계)을 몇 개의 부분 구조(이하 분계)로 나누고 이들 분계들에 대해 진동 해석하여 구한 해를 전체 구조로 합성하는 과정에서 계산을 단순화시키는 방법이다.

그 중에서도 Guyan의 정축소법을 채용하여 자유도를 축소하면서 이로 인한 오차를 줄이기 위해 저차의 십 수 개 또는 수십 개의 고유모우드를 채용함으로써 정축소법이 가지는 단점을 보완하여 비교적 계산 정도가 우수한 구분 모우드 합성법(Component Mode Synthesis method ; CMS)[6] [10]이 폭넓게 사용되고 있다. 그러나 구분 모우드 합성법도 십 수 개 혹은 수십 개의 고유진동수만을 구하는 진동해석에서 정도가 우수하나 분계 채용 모우드수의 누락과 정축소법의 채용으로 인해 합성 단계가 근사적으로 이루어지는 것이므로, 특히 소음문제 등과 같이 고차 고유진동수의 주파수대역까지 해석할 필요가 있는 경우에는 오차가 발생하게 된다.

일반적으로 고차 고유진동수의 정도를 높이기 위해 분계의 채용 모우드수를 많게 해야 하지만 결합부 자유도가 작은 경우에는 그 한계가 있고, 너무 많은 모우드를 채용해야 한다면 자유도의 축소라는 부분 구조 합성법의 장점을 상실할 수 있다.

본 논문에서는 이와 같이 정축소법을 이용한 구분 모우드 합성법이 고차 고유진동

수대역에서의 진동해석시 발생하는 문제점을 보완할 수 있는 방법으로서, 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법(substructure synthesis method using dynamic reduction)을 제안하고자 한다.

동축소법은 정축소법과 달리 질량항까지 포함하여 행렬을 축소하는 방법으로 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법은 분계의 모우드를 채용할 필요가 없을 뿐만 아니라 고차 고유진동수의 해석에도 정도가 뛰어난 장점을 가진다.

그러나 본 방법은 아직 개발 단계이므로 간단한 구조물에만 응용 가능하다.

제안한 방법의 유효성을 검증하기 위해 직사각형의 평판 모델에 대하여 FEM 해석과 부분구조합성법 중에서 정밀도가 높아 가장 많이 이용되는 구분 모우드 합성법에 의한 해석 결과와 동축소법을 이용한 부분 구조 합성법의 결과를 비교하여 보았다.

## 2. 부분구조합성법(Sub-structure Synthesis Method : SSM)

지금까지 대형, 복합 구조물의 정적·동적 해석에 있어 유한요소법이 대표적인 수단으로 자리잡아 왔다. 그러나 구조물이 복잡해지면 요소 분할 수가 증가되어 자유도가 매우 커지게 되는 경우의 해석에서는 컴퓨터의 막대한 계산시간과 계산기 용량이 필요하게 되므로 적용에 한계가 있다. 따라서 이러한 문제점을 개선하기 위해 구조물 전체를 여러 개의 단순한 분계로 분할하여 각 분계에 대해서 해석한 결과를 적절한 결합조건 하에서 다시 결합하여 전체구조물을 해석하는 부분구조합성법이 최근 실용적인 동적 해석 방법으로 등장하였다.

### 2.1 부분구조합성법의 종류와 특징

Fig. 2-1은 부분구조합성법의 종류를 나타낸 것으로 동해석 부분은 크게 전달함수합성법(transfer function synthesis method), 특성행렬합성법(characteristic matrix synthesis method), 모우드합성법(mode synthesis method) 등으로 구분된다.

전달함수합성법은 부분구조합성법 중에서 가장 일찍 개발된 방법으로 각 분계를 인접분계와의 결합부, 가진부 및 응답을 알고자 하는 부분간의 전달함수로 표현한 후에, 이들을 결합하여 전계의 전달함수를 구하는 방법이다. 전달함수를 모드특성으로부터 합성하는 방법과 특성행렬을 이용하여 운동방정식으로부터 직접 유도하는 방법이 있다.

특성행렬합성법은 각 분계에서 결합부만의 자유도에 대한 특성행렬을 구하고, 이를 결합하여 전계의 운동방정식을 작성하는 방법으로 특성행렬을 구하는 방법은 FEM으로 구한 분계 전체의 특성행렬을 정축소법 등의 방법으로 소자유도로 축소하는 방법(초요소법)과 실험 또는 FEM응답해석으로 일단 전달함수 혹은 모드특성을 구하고, 이들을 기초로 하여 구하는 방법이 있다. 이 방법은 실험 데이터를 이용할 수 있는 반면에 특성행렬의 자유도가 커지면 구하기 힘들고 계산시간이 많이 걸리는 단점이 있다.

모우드합성법은 각 분계의 동특성을 소수의 저차 고유모우드만으로 나타내고 이들 몇 개의 고유진동수와 고유모우드의 결합으로 전계의 동특성을 해석할 수 있기 때문

에 유한 요소 모델을 할 수 있는 구조물이면 적용할 수 있고, 또한 종래의 유한요소법을 이용한 해석에서는 고려할 수 없었던 결합부의 특성을 고려할 수 있는 장점도 있다.[11] [12] 이 방법은 이용하는 고유모우드의 종류에 따라 구속모우드법과 불구속모우드법, 그리고 두 가지 방법을 혼합하는 방법이 있다.

구속모우드법은 결합부를 물리좌표 그대로 정식화하는 방법과 결합부만의 고유모우드를 이용한 모우드좌표로 표현하는 방법(구분 모우드 합성법 ; CMS)이 있으며, 불구속모우드법은 고차모우드의 영향을 잉여강성으로써 고려하는 방법과 무시하는 방법이 있다.

Table 2-1은 모우드합성법과 전달함수합성법을 비교하여 각각의 특성을 표로 나타낸 것이다.

다음으로는 부분구조합성법의 기초 이론이 되는 Guyan의 정축소법과 정밀도가 높아 가장 많이 이용되는 구속형 모우드합성법 대해 논하기로 한다.

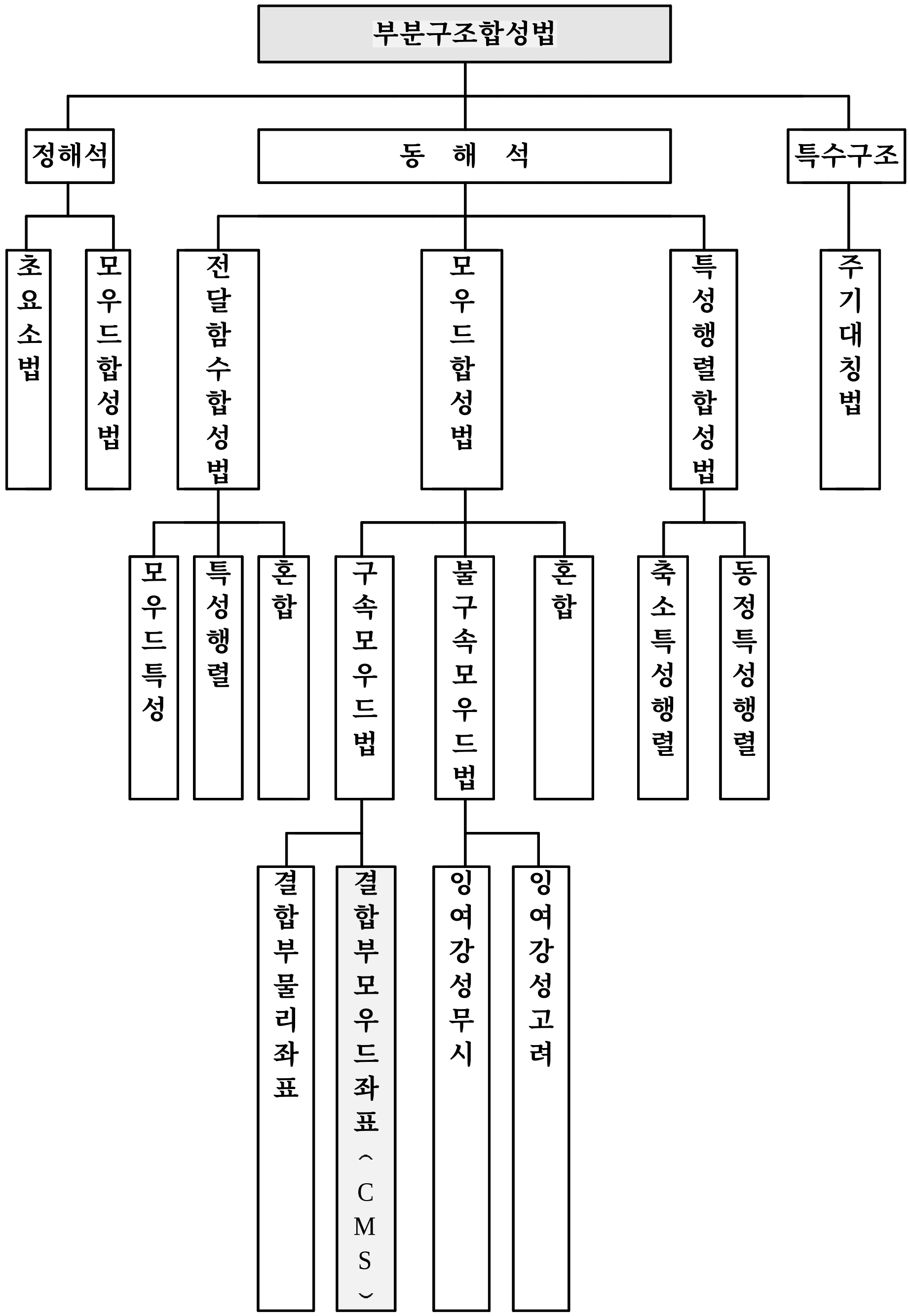



Fig. 2-1. Kinds of Sub-structure Synthesis Method

| | 전 달 함 수 합 성 법(TS) | 모 우 드 합 성 법(MS) |
|---|---|---|
| 정 도 | 입력 데이터인 전달함수의 정도에만 의존한다. 특히 실험데이터를 이용하는 경우, 전달함수가 정확하게 얻어진다면 저차 뿐만아니라 고차에서도 정도가 좋다. 그러나 전달함수의 정도를 평가할 수 있는 기준이 없다. | 분계의 채용모우드수의 누락, Guyan의 정축소 채용 등에 의해 저차의 고유진동수나 응답은 정도가 좋지만 고차에서는 정도가 나쁘다. 고차의 정도를 높이기 위해서는 채용모우드수를 많이 할 필요가 있다. |
| 계산시간 | 주파수마다 계산을 반복해야하므로 광대역의 주파수 스펙트럼을 상세하게 계산하려면 시간이 많이 걸린다. | 고유치계산이나 응답계산에 있어서 FEM으로 개발된 모든 방법을 적용할 수 있으므로 계산시간이 짧다. |
| 전계의 자유도 | 결합영역 자유도의 총합과 같다. | 결합영역을 물리좌표 그대로 합성하는 경우에는 TS보다 자유도가 많지만 모드좌표로써 표현하는 구속모우드법은 TS보다 자유도가 훨씬 적다. |
| 주파수 대역 | 주파수 대역의 장소와 넓이를 자유로이 선택할 수 있다. | 원칙적으로 저차부터 계산을 행하므로 저주파수영역을 뺄 수 없다. |
| 모우드수 & 자유도 | 결합영역 자유도의 합이 분계의 채용모우드 수의 합보다 크면 전계의 운동방정식의 계수행렬의 행렬식이 원리적으로 영(특이행렬)이 되어 해가 정해지지 않는다. | 모우드 수와 자유도를 무관계하게 선택할 수 있다. |
| 결 과 | 직접 구해지는 것은 강제진동에 의한 주파수응답뿐이고, 고유진동수와 고유모우드는 이 주파수응답에 사람의 판단을 더하거나 곡선적합(curve fitting)을 행하여 구해야 한다. | 고유진동수와 고유모우드는 물론, 시간영역과 주파수영역의 정상응답이나 과도응답, 진동에너지, 응력 등을 직접 구할 수 있다. |

Table 2-1 Comparison of TS with MS

## 2.2 Guyan의 정축소법 (Guyan's static reduction method)

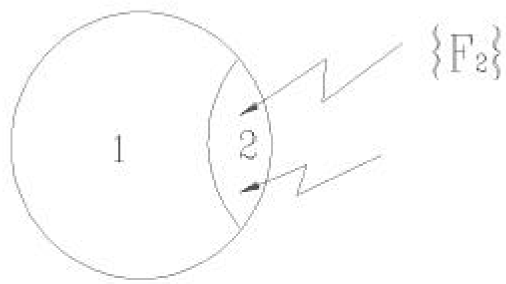



Fig. 2-2 Guyan's static reduction model

임의의 계를 Fig. 2-2 과 같이 모델화하여 힘이 작용하는 부분과 힘이 작용하지 않는 부분으로 나누어서 운동방정식을 표현하면,

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ F_2\end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}1)$$

와 같이 되고, 여기서 정역학적 문제만을 생각하면,

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ F_2\end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

위의 식으로부터 $\{X_1\}$은,

$$[K_{11}]\{X_1\} + [K_{12}]\{X_2\} = \{0\}$$

$$\{X_1\} = [T]\{X_2\} \qquad (2\text{-}3)$$

로 표시되며 위의 식에서 $[T]$를 Guyan의 정축소 행렬이라 한다.

단, $[T] = -[K_{11}]^{-1}[K_{12}]$ (2-4)

따라서, 계의 자유도를 외력이 작용하고 있는 부분만의 자유도로 다음과 같이 축소할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] \\ \ulcorner I \lrcorner \end{bmatrix} \{X_2\} \qquad (2\text{-}5)$$

식(2-5)를 식(2-1)에 대입하고 앞에 $[[T]^T \ulcorner I \lrcorner]$를 곱하여 정리하면,

$$-\omega^2 [\widetilde{M}] \{X_2\} + [\widehat{K}] \{X_2\} = \{F_2\} \qquad (2\text{-}6)$$

단,

$$[\widetilde{M}] = [T]^T [M_{11}][T] + [T]^T [M_{12}] + [M_{21}][T] + [M_{22}]$$

$$[\widehat{K}] = [T]^T [K_{11}][T] + [T]^T [K_{12}] + [K_{21}][T] + [K_{22}] \qquad (2\text{-}7)$$

로 되어, 힘이 작용하고 있는 부분만의 자유도로 운동방정식이 표현된다.

그러나 정축소법을 이용하면 정적인 해석에서는 오차가 발생하지 않지만 동적인 진동해석에 있어서는 질량항을 무시한 자유도의 축소이므로 고차 고유진동수 대역으로 갈수록 오차가 커지게 되어 이에 대한 수정 보완이 필요하게 된다.

## 2.3 구속형 모우드 합성법

다음으로 Guyan의 정축소법을 이용한 구속형 모우드 합성법에 대하여 강결합인 경우와 탄성결합인 경우를 고찰해 보자.

먼저 Fig. 2-3과 같이 강결합인 경우에 대해 고찰해 보자.

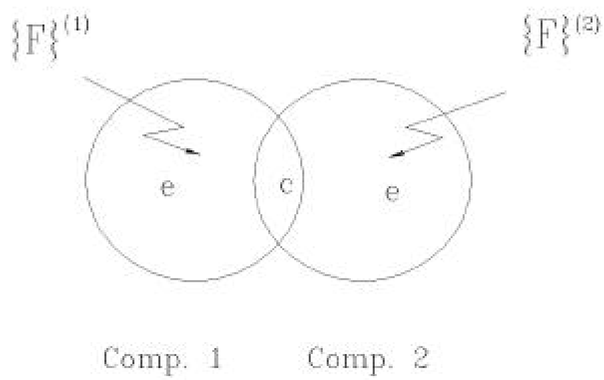



Fig. 2-3 Rigid jointed model

Fig. 2-3과 같이 각 부분구조를 결합영역 c와 비결합영역 e로 나누고 이 계의 운동 방정식을 쓰면,

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} M^1_{ee} & M^1_{ec} & 0 & 0 \\ M^1_{ce} & M^1_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^2_{ee} & M^2_{ec} \\ 0 & 0 & M^2_{ce} & M^2_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^1_{ee} & K^1_{ec} & 0 & 0 \\ K^1_{ce} & K^1_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^2_{ee} & K^2_{ec} \\ 0 & 0 & K^2_{ce} & K^2_{cc} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X^1_e \\ X^1_c \\ X^2_e \\ X^2_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^1_e \\ F_c + F^1_r \\ F^2_e \\ F^2_r \end{Bmatrix} \tag{2-8}$$

여기서 $F_r^{(1)}$은 결합영역 c를 통해 분계1에서 분계2로 작용하는 내력이다.

식(2-8)은 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$-\omega[M]\{X\} + [K]\{X\} = \{F\} \tag{2-9}$$

강결합인 경우에는 각 분계에서 결합부의 변위는 일치하고, 결합부에서의 작용력과 반작용력이 같으므로 다음과 같은 결합조건이 성립한다.

$$\{X_c\} = \{X_c^1\} = \{X_c^2\} \tag{2-10}$$

$$\{F\} = \{-F_r^1\} = \{F_r^2\} \tag{2-11}$$

그리고 Guyan의 정축소 행렬 [T]를 도입하여 비결합부의 변위를 표시하면,

$$\{X_e\} = [T]\{X_c\} \tag{2-12}$$

와 같이 결합부의 자유도만으로 표시되지만 질량항을 생략한 정축소에 의한 오차를 줄이기 위하여 비결합부의 변위를 아래와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \{X_e\} &= [T]\{X_c\} + [\Phi]\{\xi\} \\ &= [[T][\Phi]]\begin{Bmatrix} X_c \\ \xi \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2-13}$$

여기서, [$\Phi$]는 결합부를 고정했을 때의 각 분계의 고유 모우드 행렬이다.

따라서, 비결합부의 변위는 결합부 자유도에 결합부를 구속했을 때의 채용하는 고유모우드수를 더한 자유도로서 표현된다. 다시 말하면 비결합부의 변위는 결합부의 좌표변환과 결합부를 구속했를 때의 각 분계의 모우드좌표변환의 합으로 표현되는 것으로 결합부를 구속한다고 가정했기 때문에 구속형 모우드합성법이라고 부른다.

식(2-13)을 식(2-8)에 대입하여 좌표변환을 행하면,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_e^1 \\ X_c^1 \\ X_e^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^1 & T^1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^2 & T^2 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ X_c^1 \\ \xi^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi^1 & T^1 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & T^2 & \Phi^2 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ X_c \\ \xi^2 \end{Bmatrix}$$

$$= [T_p]\ \{Y\} \qquad (2\text{-}14)$$

단,

$$[T_p] = \begin{bmatrix} \Phi^1 & T^1 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & T^2 & \Phi^2 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ X_c \\ \xi^2 \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}16)$$

식 (2-14)를 식 (2-9)에 대입하고, 앞에 $[T_p]$를 곱하여 정리하면,

$$-\omega^2[\widetilde{M}]\{Y\} + [\widetilde{K}]\{Y\} = \{\widetilde{F}\} \qquad (2\text{-}17)$$

단, 위의 식에서

$$[\widetilde{M}] = [T_p]^T\ [M]\ [T_p]\ ,$$

$$[\widetilde{K}] = [T_p]^T [K] [T_p],$$

$$\{\widetilde{F}\} = [T_p]\{F\} = \begin{Bmatrix} [\Phi^1]^T \{F_e^1\} \\ [T^1]^T \{F_e^1\} + [T^2]^T \{F_e^2\} \\ [\Phi^2]^T \{F_e^2\} \end{Bmatrix} \quad (2\text{-}18)$$

이와 같이 전 자유도의 방정식(2-9)을 푸는 대신에, 식(2-17)과 같이 결합부의 자유도에 각 부분구조의 채용 모우드 수를 더한 자유도를 가진 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

이번에는 Fig. 2-4와 같이 각 분계가 스프링 등 탄성적으로 결합된 경우를 생각한다.

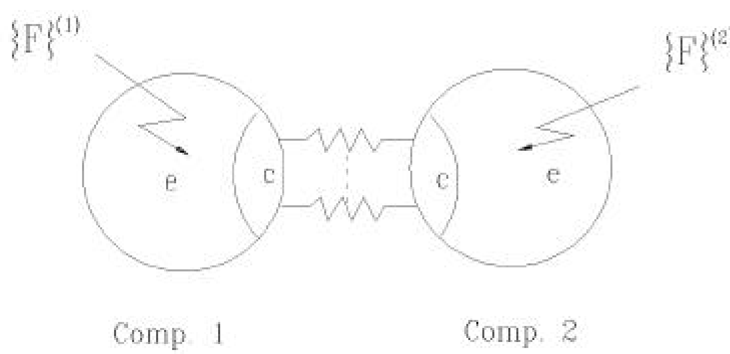



Fig. 2-4 Spring jointed model

이런 경우 결합조건식은,

$$\begin{bmatrix} K_{c11} & -K_{c12} \\ -K_{c21} & K_{c22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_c^{(1)} \\ X_c^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r^{(1)} \\ F_r^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2\text{-}19)$$

여기에서 $\{F_r\}$은 내력과 같게 되어 위 식의 상반부와 하반부는 동일한 형태이다.

식(2-19를 식(2-8)에 부가하면,

$$
\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ee}^{(1)} & M_{ec}^{(1)} & 0 & 0 \\ M_{ce}^{(1)} & M_{cc}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{ee}^{(2)} & M_{ec}^{(2)} \\ 0 & 0 & M_{ce}^{(2)} & M_{cc}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ee}^{(1)} & K_{ec}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{ce}^{(1)} & K_{cc}^{(1)} + K_{c11} & 0 & -K_{c12} \\ 0 & 0 & K_{ee}^{(2)} & K_{ec}^{(2)} \\ 0 & -K_{c21} & M_{ce}^{(2)} & K_{cc}^{(2)} + K_{c22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_e^{(1)} \\ X_c^{(1)} \\ X_e^{(2)} \\ X_c^{(2)} \end{Bmatrix} =
$$

$$
\begin{Bmatrix} F^{(1)} \\ F_c^{(1)} + F_r^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F_c^{(2)} - F_r^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad (2\text{-}20)
$$

**여기서**, **탄성결합의 경우에는 식**(2-14)**가 성립되지 않아서 결합부의 변위는 일치하지 않으므로**,

$$
\{X\} = \begin{Bmatrix} X_e^1 \\ X_c^1 \\ X_e^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^1 & T^1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^2 & T^2 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ X_c^1 \\ \xi^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix} \equiv [T_p]\{Y\} \qquad (2\text{-}21)
$$

**강결합의 경우와 같은 형태로 표시되는 이 식을 식**(2-20)**에 대입하고**, **앞에** $[T_p]^T$ **를 곱하면 축소된 운동방정식이 얻어진다**.

## 3. 동축소법을 이용한 부분구조합성법

**(Substructure Synthesis Method using Dynamic Reduction ; DRSSM)**

Guyan의 정축소법을 이용한 부분구조합성법은 일반적인 구조물의 동적해석에 있어서 많이 사용되고 있다. 이는 저차의 고유모우드가 구조물의 거동에 있어 주요한 역할을 한다는 관점에서 질량항을 생략한 정축소법과 저차의 수십 개의 고유모우드를 채용함으로 계산 용량이나 계산시간을 많이 감소하면서도 정도 높은 결과를 얻을 수 있다는 장점 때문이다.

그러나 소음문제 등과 같이 고차의 고유진동수를 주목해야할 경우에는 질량항을 생략하는 것과 채용 모우드수의 누락에서 기인하는 오차 때문에 고차 고유진동수 대역에서 정도 높은 결과를 얻는다는 것은 매우 힘들다. 따라서 질량항을 생략하지 않고 자유도의 축소를 이룬다면 고차 고유진동수 대역에서의 해석도 정도 높은 결과를 얻을 수 있을 것이다.

본 장에서는 질량항을 포함하여 자유도를 축소하는 동축소법과 이를 이용한 부분구조합성법에 대해서 논한다.

## 3.1 동축소법(Dynamic reduction method)

앞서 언급한 정축소법과 달리 식(2-1)에서 질량항을 포함하여 고려하면,

$$\begin{bmatrix} -\omega^2[M_{11}]+[K_{11}] & -\omega^2[M_{12}]+[K_{12}] \\ -\omega^2[M_{21}]+[K_{21}] & -\omega^2[M_{22}]+[K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}1)$$

위의 식으로부터 $\{X_1\}$은,

$$(-\omega^2[M_{11}]+[K_{11}])\{X_1\}+(-\omega^2[M_{12}]+[K_{12}])\{X_2\}=\{0\}$$

$$\{X_1\} = [\overline{T}]\{X_2\} \qquad (3\text{-}2)$$

단,

$$[\overline{T}] = (-\omega^2[M_{11}]+[K_{11}])^{-1}(\omega^2[M_{12}]-[K_{12}]) \qquad (3\text{-}3)$$

로 축소되고, $[\overline{T}]$는 동축소 행렬이 된다.

따라서 계의 자유도를 외력이 작용하고 있는 부분만의 자유도로 다음과 같이 축소할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overline{T}] \\ \ulcorner I \lrcorner \end{bmatrix}\{X_2\} \qquad (3\text{-}4)$$

식(3-4)를 식(2-1)에 대입하고 앞에 $[\ [\overline{T}]^T \ulcorner I \lrcorner]$를 곱하여 정리하면,

$$-\omega^2[\widehat{M}]\{X_2\} + [\widehat{K}]\{X_2\} = \{F_2\} \qquad (3\text{-}5)$$

단,

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{M}] &= [\overline{T}]^T [M_{11}][\overline{T}] + [\overline{T}]^T [M_{12}] + [M_{21}][\overline{T}] + [M_{22}] \\
[\widetilde{K}] &= [\overline{T}]^T [K_{11}][\overline{T}] + [\overline{T}]^T [K_{12}] + [K_{21}][\overline{T}] + [K_{22}]
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}6)
$$

로 되어 힘이 작용하고 있는 부분만의 자유도로 운동방정식이 표현되며, 축소된 방정식에는 강성항뿐만 아니라 질량항까지 포함하고 있다.

## 3.2 동축소법을 이용한 부분구조합성법

Fig. 2-3과 같은 계의 자유진동에 대한 운동방정식을 쓰면,

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ee}^1 & M_{ec}^1 & 0 & 0 \\ M_{ce}^1 & M_{cc}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{ee}^2 & M_{ec}^2 \\ 0 & 0 & M_{ce}^2 & M_{cc}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ee}^1 & K_{ec}^1 & 0 & 0 \\ K_{ce}^1 & K_{cc}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ee}^2 & K_{ec}^2 \\ 0 & 0 & K_{ce}^2 & K_{cc}^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_e^1 \\ X_c^1 \\ X_e^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{12} \\ 0 \\ F_{12} \end{Bmatrix} \qquad (3\text{-}7)$$

식(3-7)은 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다.

$$-\omega[M]\{X\} + [K]\{X\} = \{F\} \qquad (3\text{-}8)$$

여기서, $F$는 결합영역 c를 통해 분계1에서 분계2로 작용하는 내력이다

앞서 언급한 동축소 행렬 $[\overline{T}]$를 도입하여, 비결합부의 변위를 나타내면,

$$\{X_e\} = [\overline{T}]\{X_c\} \qquad (3\text{-}9)$$

와 같이 결합부만의 자유도로 표시된다.

식(3-9)를 식(3-7)에 대입하고 변형하면,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_e^1 \\ X_c^1 \\ X_e^2 \\ X_c^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{T}^1 \\ I \\ \overline{T}^2 \\ I \end{bmatrix} \{X_c\} = [\overline{T}_p]\{X_c\} \qquad (3\text{-}10)$$

식(3-10)을 식(3-8)에 대입하고, 앞에 $[\overline{T}_p]^T$를 곱하면,

$$-\omega^2 [\overline{T}_p]^T [M] [\overline{T}_p] \{X_c\} + [\overline{T}_p]^T [K] [\overline{T}_p] \{X_c\} = [\overline{T}_p]^T \{F\} \qquad (3\text{-}11)$$

과 같이 되고, 이를 간단히 나타내면 다음과 같은 식이 된다.

$$-\omega^2 [\widetilde{M}] \{X_c\} + [\widetilde{K}] \{X_c\} = \{\widetilde{F}\} \qquad (3\text{-}12)$$

단,

$$[\widetilde{M}] = [\overline{T}_p]^T [M] [\overline{T}_p],$$

$$[\widetilde{K}] = [\overline{T}_p]^T [K] [\overline{T}_p] \qquad (3\text{-}13)$$

$$\{\widetilde{F}\} = [\overline{T}_p] \{F\}$$

식(3-12)는 결합부만의 자유도로 동축소된 방정식이 되고, 이 방정식을 푸는 문제로 귀결된다.

이와 같이 동축소를 이용한 부분구조합성법에서는 동축소법을 이용하여 자유도를 축소하기 때문에 정축소법을 이용한 구속형 모우드합성법과 달리 비결합부의 고유모우드를 채용할 필요가 없고 또한 고차 고유진동수 대역에서도 정도 높은 결과를 얻을 수 있다.

동축소된 식(3-12)를 풀기 위해서는 먼저 식(3-9)의 동축소 행렬내의 ω를 구해야 한다. 이 ω는 구하고자 하는 해이므로 초기치를 대입하여 진동해석을 하고 이 초기치와 일치하는 고유진동수를 반복 계산하여 구한다. 이 과정을 위해 이분법(bisection method)[13]을 이용하였다.

그러나, 이 수치해석적 알고리즘은 결합부의 자유도가 크게되면 계산시간이 많이 걸리고, 서로 가까이 인접한 고유진동수들이 있는 경우에는 예기치 못한 값에 수렴할 수 있는 단점이 있다.

# 4. 수치해석 및 고찰

본 연구에 사용한 수치해석용 모델은 Fig.4-1에서 보인 바와 같이 1600mm×400mm×3t인 직사각형 연강판으로 가정하였고, 구분 모우드 합성법(CMS)으로 해석하기 위해 Fig.4-2와 같이 4개의 분계로 나누어 유한 요소 모델링하였다.

## 4.1 구분 모우드 합성법에서 채용모우드 수에 따른 해석 결과

먼저 구분 모우드 합성법에서 비결합부의 고유모우드 채용 수를 10개, 15개, 20개, 25개, 30개 및 70개로 바꿔가며 해석하여 70차까지 고유진동수를 구하고 그 결과와 FEM해석 결과를 비교하였다.

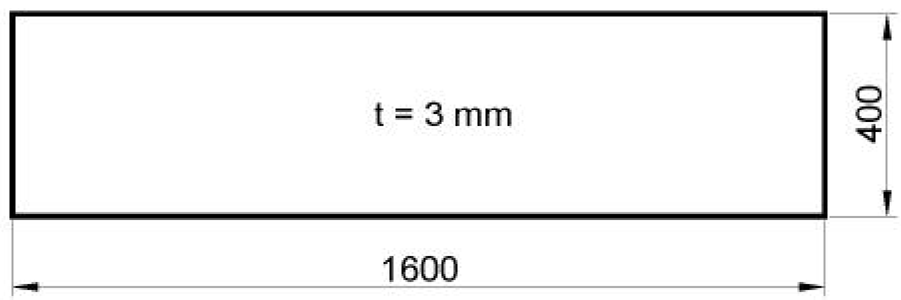
Table 4-1은 각각의 해석결과 중 1차에서 35차까지의 고유진동수를 채용 모우드수별로 나타내었고 Table 4-2에서는 36차에서 70차까지의 고유진동수를 나타내었다. 그리고, Fig. 4-3과 Fig. 4-4에서는 각각의 수치를 비교하여 그래프로 나타내었다.

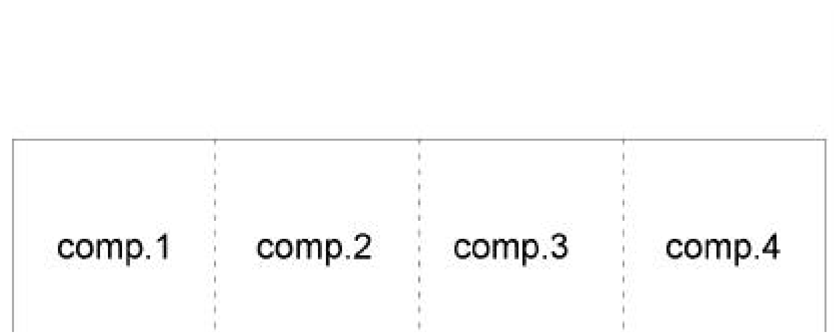
여기에서 알 수 있듯이 구분 모우드 합성법에서는 채용 모우드 수가 적으면 고차뿐만 아니라 저차에서도 FEM 결과와 많은 차이를 나타내고 있지만 채용 모우드 수를 많이 할수록 저차는 물론 고차 고유진동수 대역에서도 그 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

즉, 구분 모우드 합성법으로 고차 고유진동수 대역에서 정도 높은 결과를 얻고자 한다면 채용 모우드 수를 많이 해야한다는 것인데, 그렇게 되면 자유도의 축소라는 구분 모우드 합성법이 갖는 장점을 상실할 수 있는 문제점을 나타내고 있다.

Table 4-3에서는 각 모우드 채용 수에 따른 구분 모우드 합성법 해석 결과의 FEM 해석 결과에 대한 오차율을 1차에서 35차까지 나타내고 있으며, Table 4-4에서는 36차에서 70차까지의 오차율을 나타내었다. 그리고, 이들 오차율을 Fig. 4-5와 Fig. 4-6에서 그래프로 나타내었다.

Fig. 4-5에서 보는 바와 같이 저차에서는 20개 정도의 모우드만 채용하여도 거의 오차가 없는 정도 높은 결과를 얻을 수 있다. 그러나, Fig. 4-6에서 알 수 있듯이 고차에서는 채용 모우드 수를 몇십 개만으로 제한하면 그 오차율의 변동폭이 큰 것을 알 수 있다.


t = 3 mm
400
1600


comp.1
comp.2
comp.3
comp.4

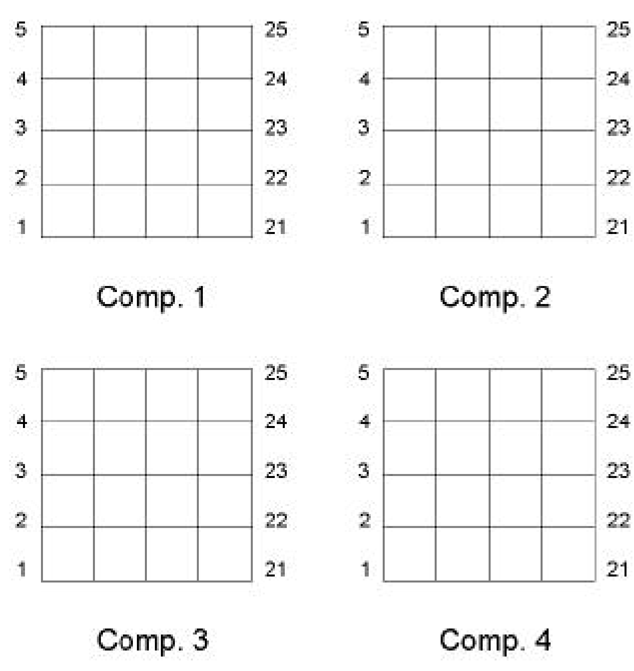

5
4
3
2
1
25
24
23
22
21
Comp. 1
Comp. 2
Comp. 3
Comp. 4

Table 4-1 Natural frequencies of Component Mode Synthesis method analysis

(No. of natural freq. : 1  35)

(Unit : Hz)

| Degree | 10mode | 15mode | 20mode | 25mode | 30mode | 70mode | FEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.00 |
| 3 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.00 |
| 4 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.00 |
| 5 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.00 |
| 6 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.00 |
| 7 | 6.18 | 6.18 | 6.18 | 6.18 | 6.18 | 6.18 | 6.20 |
| 8 | 15.06 | 15.06 | 15.06 | 15.06 | 15.06 | 15.06 | 15.10 |
| 9 | 17.15 | 17.15 | 17.15 | 17.15 | 17.15 | 17.15 | 17.10 |
| 10 | 31.26 | 31.22 | 31.22 | 31.22 | 31.22 | 31.22 | 31.20 |
| 11 | 42.32 | 33.81 | 33.80 | 33.80 | 33.80 | 33.80 | 33.80 |
| 12 | 60.10 | 49.54 | 49.49 | 49.49 | 49.49 | 49.49 | 49.50 |
| 13 | 60.14 | 56.32 | 56.11 | 56.11 | 56.10 | 56.09 | 56.10 |
| 14 | 77.86 | 70.78 | 70.78 | 70.78 | 70.78 | 70.78 | 70.80 |
| 15 | 120.69 | 84.73 | 83.90 | 83.83 | 83.83 | 83.79 | 83.80 |
| 16 | 121.61 | 98.36 | 95.90 | 95.89 | 95.89 | 95.88 | 95.90 |
| 17 | 131.13 | 103.40 | 103.30 | 103.27 | 103.27 | 103.24 | 103.20 |
| 18 | 144.09 | 116.87 | 106.19 | 106.12 | 106.12 | 106.11 | 106.10 |
| 19 | 147.55 | 124.25 | 119.42 | 119.39 | 119.32 | 119.28 | 119.30 |
| 20 | 174.85 | 125.53 | 120.87 | 120.84 | 120.84 | 120.82 | 120.80 |
| 21 | 177.12 | 131.13 | 125.53 | 125.49 | 125.48 | 125.45 | 125.40 |
| 22 | 186.02 | 160.01 | 141.82 | 141.79 | 141.78 | 141.78 | 141.80 |
| 23 | 201.27 | 178.93 | 158.15 | 158.03 | 158.03 | 157.77 | 157.80 |
| 24 | 201.87 | 185.82 | 159.97 | 159.95 | 159.94 | 159.94 | 159.90 |
| 25 | 207.05 | 200.17 | 168.61 | 168.53 | 168.53 | 168.49 | 168.50 |
| 26 | 250.06 | 218.24 | 198.24 | 197.52 | 197.52 | 197.50 | 197.50 |
| 27 | 250.18 | 240.24 | 200.17 | 200.02 | 200.01 | 199.63 | 199.60 |
| 28 | 260.23 | 253.26 | 206.84 | 206.03 | 205.58 | 205.01 | 205.00 |
| 29 | 296.43 | 255.49 | 234.24 | 233.74 | 233.74 | 233.65 | 233.60 |
| 30 | 297.58 | 291.13 | 245.28 | 244.92 | 244.88 | 244.45 | 244.50 |
| 31 | 298.23 | 294.09 | 255.66 | 255.65 | 255.60 | 255.33 | 255.30 |
| 32 | 315.10 | 304.92 | 291.13 | 273.74 | 273.48 | 273.42 | 273.40 |
| 33 | 327.44 | 306.33 | 296.88 | 282.99 | 282.87 | 282.74 | 282.70 |
| 34 | 335.64 | 312.58 | 299.29 | 287.92 | 287.86 | 287.46 | 287.50 |
| 35 | 367.78 | 319.44 | 304.92 | 294.34 | 293.74 | 293.63 | 293.60 |

Table 4-2 Natural frequencies of Component Mode Synthesis method analysis

(No. of natural freq. : 36 70)

(Unit : Hz)

| Degree | 10mode | 15mode | 20mode | 25mode | 30mode | 70mode | FEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 368.10 | 361.59 | 312.99 | 304.00 | 303.08 | 302.93 | 302.90 |
| 37 | 374.56 | 368.07 | 318.30 | 312.55 | 312.49 | 312.08 | 312.10 |
| 38 | 378.28 | 368.30 | 353.80 | 317.56 | 317.52 | 317.48 | 317.50 |
| 39 | 399.89 | 374.56 | 368.07 | 321.95 | 318.42 | 318.42 | 318.40 |
| 40 | 401.52 | 375.90 | 368.20 | 345.11 | 345.10 | 345.09 | 345.10 |
| 41 | 414.30 | 401.06 | 375.11 | 353.80 | 353.36 | 352.95 | 352.90 |
| 42 | 427.48 | 414.29 | 411.99 | 367.86 | 366.14 | 366.03 | 366.00 |
| 43 | 428.45 | 421.57 | 414.29 | 375.04 | 375.03 | 374.45 | 374.40 |
| 44 | 438.02 | 426.99 | 420.04 | 394.41 | 377.84 | 377.71 | 377.70 |
| 45 | 444.86 | 428.37 | 426.90 | 415.02 | 411.03 | 410.77 | 410.80 |
| 46 | 454.08 | 443.47 | 428.37 | 419.92 | 419.29 | 418.73 | 418.70 |
| 47 | 546.82 | 464.98 | 441.89 | 434.38 | 419.55 | 419.15 | 419.20 |
| 48 | 547.47 | 484.07 | 479.50 | 441.87 | 441.84 | 441.74 | 441.70 |
| 49 | 564.66 | 512.66 | 481.48 | 472.60 | 472.57 | 456.59 | 456.60 |
| 50 | 567.43 | 533.50 | 512.24 | 477.18 | 477.09 | 476.77 | 476.80 |
| 51 | 567.43 | 548.30 | 536.50 | 483.18 | 483.08 | 481.61 | 481.60 |
| 52 | 586.83 | 548.35 | 547.13 | 504.81 | 504.29 | 504.08 | 504.10 |
| 53 | 605.06 | 550.12 | 550.12 | 512.14 | 512.14 | 511.90 | 511.90 |
| 54 | 605.33 | 567.43 | 551.41 | 535.56 | 535.35 | 534.82 | 534.80 |
| 55 | 610.31 | 567.50 | 567.33 | 542.89 | 539.54 | 538.95 | 538.90 |
| 56 | 612.84 | 605.06 | 567.50 | 547.11 | 542.22 | 540.65 | 540.60 |
| 57 | 632.87 | 605.80 | 582.80 | 550.54 | 550.53 | 550.22 | 550.20 |
| 58 | 633.38 | 615.65 | 605.68 | 565.49 | 552.35 | 550.60 | 550.60 |
| 59 | 643.71 | 632.73 | 605.71 | 582.76 | 569.07 | 555.78 | 555.80 |
| 60 | 644.40 | 633.17 | 606.88 | 593.31 | 583.17 | 565.07 | 565.10 |
| 61 | 656.92 | 638.94 | 616.16 | 605.38 | 590.62 | 582.68 | 582.70 |
| 62 | 657.34 | 642.43 | 633.17 | 606.29 | 592.56 | 588.17 | 588.20 |
| 63 | 657.38 | 657.34 | 633.88 | 617.62 | 606.16 | 604.68 | 604.70 |
| 64 | 661.76 | 657.37 | 638.98 | 634.36 | 611.98 | 611.65 | 611.60 |
| 65 | 677.23 | 670.00 | 657.41 | 640.75 | 617.62 | 616.91 | 616.90 |
| 66 | 686.94 | 671.72 | 657.45 | 641.76 | 627.35 | 617.19 | 617.20 |
| 67 | 688.29 | 680.84 | 670.00 | 657.29 | 638.89 | 637.77 | 637.80 |
| 68 | 784.03 | 773.28 | 672.69 | 670.13 | 663.26 | 649.99 | 650.00 |
| 69 | 784.09 | 781.77 | 751.94 | 672.68 | 670.12 | 668.82 | 668.80 |
| 70 | 825.93 | 783.97 | 779.08 | 693.08 | 672.41 | 671.47 | 671.40 |

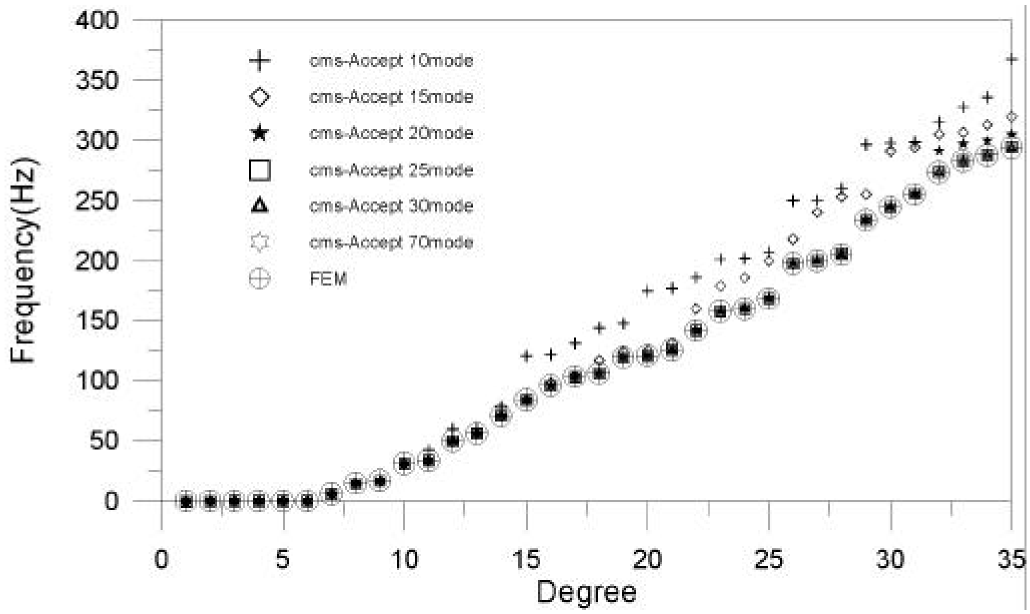



Fig. 4-3 Comparison of natural frequencies
(No. of natural frequency : 1 35)

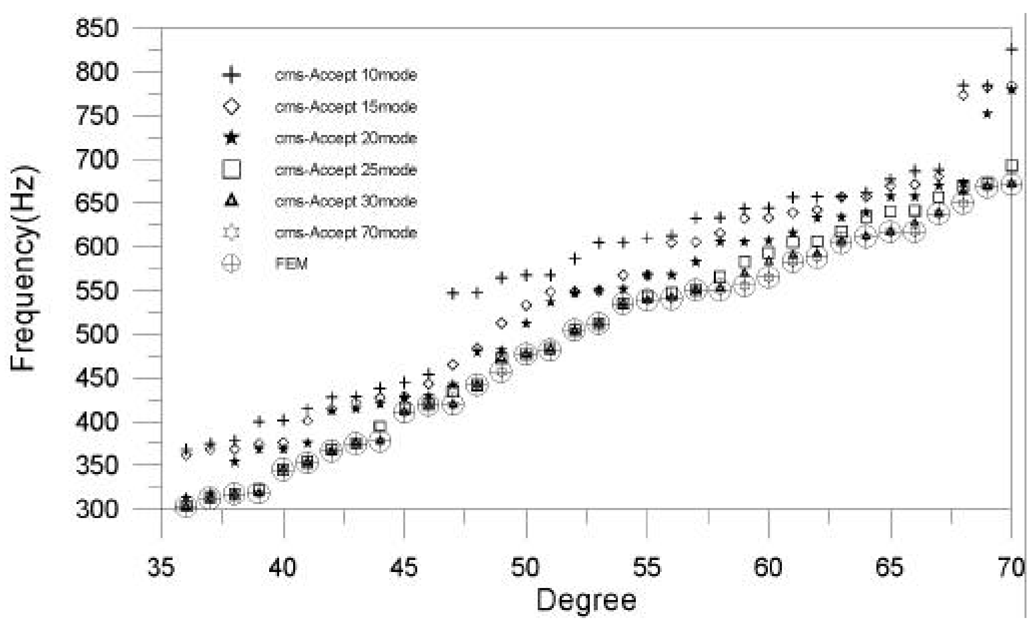



Fig. 4-4 Comparison of natural frequencies
(No. of natural freq. : 36 70)

Table 4-3 Error rate of Component Mode Synthesis method analysis

(No. of natural freq. : 1 35)

(Unit : %)

| Degree | 10mode | 15mode | 20mode | 25mode | 30mode | 70mode |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.32 | 0.32 | 0.32 | 0.32 | 0.32 | 0.32 |
| 8 | 0.26 | 0.26 | 0.26 | 0.26 | 0.26 | 0.26 |
| 9 | 0.29 | 0.29 | 0.29 | 0.29 | 0.29 | 0.29 |
| 10 | 0.19 | 0.06 | 0.06 | 0.06 | 0.06 | 0.06 |
| 11 | 25.21 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 12 | 21.41 | 0.08 | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.02 |
| 13 | 7.20 | 0.39 | 0.02 | 0.02 | 0.00 | 0.02 |
| 14 | 9.97 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| 15 | 44.02 | 1.11 | 0.12 | 0.04 | 0.04 | 0.01 |
| 16 | 26.81 | 2.57 | 0.00 | 0.01 | 0.01 | 0.02 |
| 17 | 27.06 | 0.19 | 0.10 | 0.07 | 0.07 | 0.04 |
| 18 | 35.81 | 10.15 | 0.08 | 0.02 | 0.02 | 0.01 |
| 19 | 23.68 | 4.15 | 0.10 | 0.08 | 0.02 | 0.02 |
| 20 | 44.74 | 3.92 | 0.06 | 0.03 | 0.03 | 0.02 |
| 21 | 41.24 | 4.57 | 0.10 | 0.07 | 0.06 | 0.04 |
| 22 | 31.18 | 12.84 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 23 | 27.55 | 13.39 | 0.22 | 0.15 | 0.15 | 0.02 |
| 24 | 26.25 | 16.21 | 0.04 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| 25 | 22.88 | 18.80 | 0.07 | 0.02 | 0.02 | 0.01 |
| 26 | 26.61 | 10.50 | 0.37 | 0.01 | 0.01 | 0.00 |
| 27 | 25.34 | 20.36 | 0.29 | 0.21 | 0.21 | 0.02 |
| 28 | 26.94 | 23.54 | 0.90 | 0.50 | 0.28 | 0.00 |
| 29 | 26.90 | 9.37 | 0.27 | 0.06 | 0.06 | 0.02 |
| 30 | 21.71 | 19.07 | 0.32 | 0.17 | 0.16 | 0.02 |
| 31 | 16.82 | 15.19 | 0.14 | 0.14 | 0.12 | 0.01 |
| 32 | 15.25 | 11.53 | 6.49 | 0.12 | 0.03 | 0.01 |
| 33 | 15.83 | 8.36 | 5.02 | 0.10 | 0.06 | 0.01 |
| 34 | 16.74 | 8.72 | 4.10 | 0.15 | 0.13 | 0.01 |
| 35 | 25.27 | 8.80 | 3.86 | 0.25 | 0.05 | 0.01 |

Table 4-4 Error rate of Component Mode Synthesis method analysis

(No. of natural freq. : 36 70)

(Unit : %)

| Degree | 10mode | 15mode | 20mode | 25mode | 30mode | 70mode |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 21.53 | 19.38 | 3.33 | 0.36 | 0.06 | 0.01 |
| 37 | 20.01 | 17.93 | 1.99 | 0.14 | 0.12 | 0.01 |
| 38 | 19.14 | 16.00 | 11.43 | 0.02 | 0.01 | 0.01 |
| 39 | 25.59 | 17.64 | 15.60 | 1.11 | 0.01 | 0.01 |
| 40 | 16.35 | 8.92 | 6.69 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 41 | 17.40 | 13.65 | 6.29 | 0.26 | 0.13 | 0.01 |
| 42 | 16.80 | 13.19 | 12.57 | 0.51 | 0.04 | 0.01 |
| 43 | 14.44 | 12.60 | 10.65 | 0.17 | 0.17 | 0.01 |
| 44 | 15.97 | 13.05 | 11.21 | 4.42 | 0.04 | 0.00 |
| 45 | 8.29 | 4.28 | 3.92 | 1.03 | 0.06 | 0.01 |
| 46 | 8.45 | 5.92 | 2.31 | 0.29 | 0.14 | 0.01 |
| 47 | 30.44 | 10.92 | 5.41 | 3.62 | 0.08 | 0.01 |
| 48 | 23.95 | 9.59 | 8.56 | 0.04 | 0.03 | 0.01 |
| 49 | 23.67 | 12.28 | 5.45 | 3.50 | 3.50 | 0.00 |
| 50 | 19.01 | 11.89 | 7.43 | 0.08 | 0.06 | 0.01 |
| 51 | 17.82 | 13.85 | 11.40 | 0.33 | 0.31 | 0.00 |
| 52 | 16.41 | 8.78 | 8.54 | 0.14 | 0.04 | 0.00 |
| 53 | 18.20 | 7.47 | 7.47 | 0.05 | 0.05 | 0.00 |
| 54 | 13.19 | 6.10 | 3.11 | 0.14 | 0.10 | 0.00 |
| 55 | 13.25 | 5.31 | 5.28 | 0.74 | 0.12 | 0.01 |
| 56 | 13.36 | 11.92 | 4.98 | 1.20 | 0.30 | 0.01 |
| 57 | 15.03 | 10.11 | 5.93 | 0.06 | 0.06 | 0.00 |
| 58 | 15.03 | 11.81 | 10.00 | 2.70 | 0.32 | 0.00 |
| 59 | 15.82 | 13.84 | 8.98 | 4.85 | 2.39 | 0.00 |
| 60 | 14.03 | 12.05 | 7.39 | 4.99 | 3.20 | 0.01 |
| 61 | 12.74 | 9.65 | 5.74 | 3.89 | 1.36 | 0.00 |
| 62 | 11.75 | 9.22 | 7.65 | 3.08 | 0.74 | 0.01 |
| 63 | 8.71 | 8.71 | 4.83 | 2.14 | 0.24 | 0.00 |
| 64 | 8.20 | 7.48 | 4.48 | 3.72 | 0.06 | 0.01 |
| 65 | 9.78 | 8.61 | 6.57 | 3.87 | 0.12 | 0.00 |
| 66 | 11.30 | 8.83 | 6.52 | 3.98 | 1.64 | 0.00 |
| 67 | 7.92 | 6.75 | 5.05 | 3.06 | 0.17 | 0.00 |
| 68 | 20.62 | 18.97 | 3.49 | 3.10 | 2.04 | 0.00 |
| 69 | 17.24 | 16.89 | 12.43 | 0.58 | 0.20 | 0.00 |
| 70 | 23.02 | 16.77 | 16.04 | 3.23 | 0.15 | 0.01 |

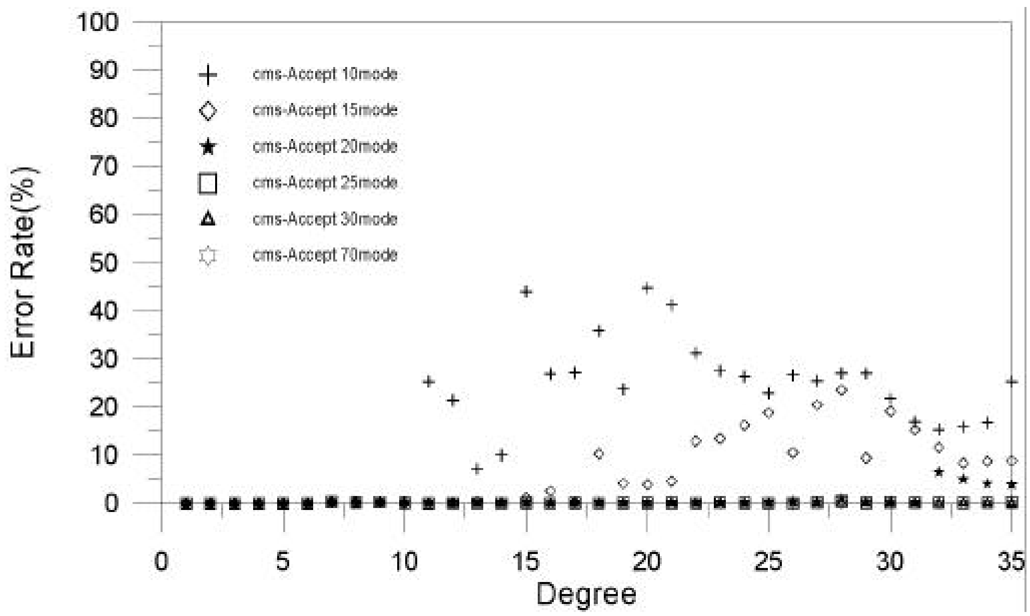



Fig. 4-5 Comparison of Error rate between Component Mode Synthesis method(CMS) results (No. of natural ferq. : 1 35)

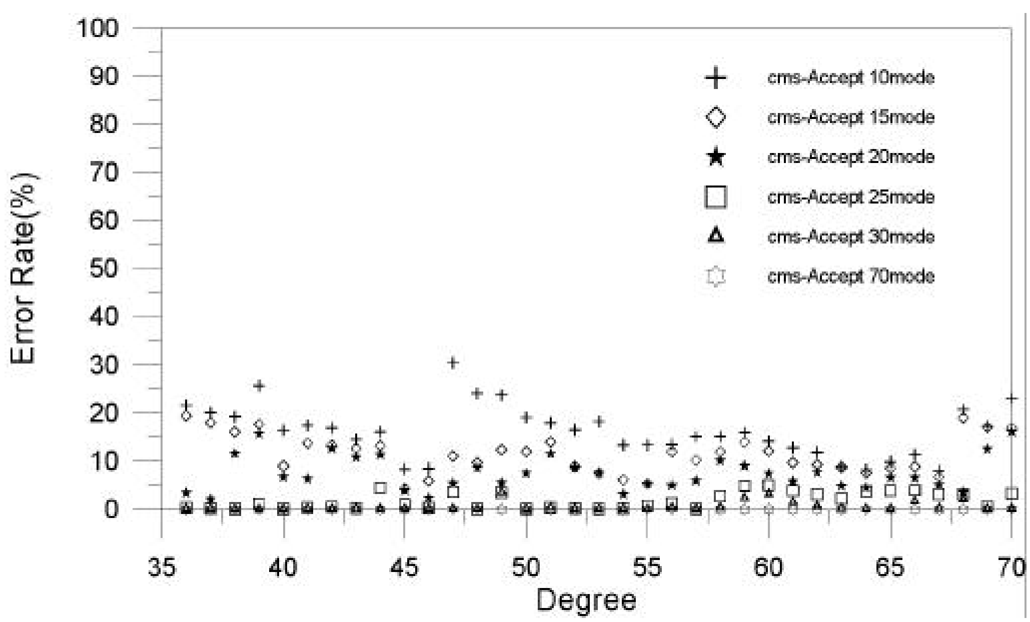



Fig. 4-6 Comparison of Error rate between Component Mode Synthesis method(CMS) results (No. of natural ferq. : 36 70)

## 4.2 동축소법을 이용한 부분구조합성법에 의한 수치해석

Fig. 4-1에 나타낸 평판에 대하여 FEM으로 해석을 수행한 결과와 구분 모우드 합성법(CMS)으로 해석한 결과 및 본 논문에서 제안한 동축소법을 이용한 부분구조합성법(DRSSM)으로 진동해석을 한 결과를 비교하였다.

구분 모우드 합성법 계산시에는 비결합영역의 모우드를 20개 채용하였고, 각각의 해석 모두 70차까지의 고유진동수를 구하여 비교하였다.

Table 4-5는 구분 모우드 합성법, 동축소법을 이용한 부분구조합성법 및 FEM의 해석 결과를 나타내고다.

Fig. 4-7은 각각의 계산 결과 중 1차에서 35차까지의 고유진동수를 비교하여 나타냈었고, Fig. 4-8에는 36차에서 70까지의 고유진동수를 비교하여 나타내었다.

Fig. 4-7에서 보는 바와 같이 1차에서 31차까지는 3가지 해석, FEM과 동축소법을 이용한 부분구조 합성법, 구분 모우드 합성법 모두가 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다.

그러나, Fig. 4-7의 오른쪽 고차 부분과 Fig.4-8에서 알 수 있듯이 32차부터 70차에서 구분 모우드 합성법의 결과는 FEM의 결과와 많은 차이를 나타내고 있으며 고차로 갈수록 더 큰 고유진동수의 차이를 보이고 있는 반면, 동축소법을 이용한 부분구조합성법의 결과는 FEM의 결과와 완전히 일치하고 있음을 알 수 있다.

이 결과에서 알 수 있듯이 구분 모우드 합성법은 Guyan의 정축소를 이용하기 때문에 인해 고차로 갈수록 오차가 커지게 되지만 동축소법을 이용한 부분구조합성법은 질량항까지 포함하는 동축소를 이용했기에 고차에서도 정도 높은 해석결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

Table 4-6에서는 FEM 해석 결과에 대한 구분 모우드 합성법와 동축소법을 이용한 부분구조합성법의 오차율을 수치로 나타내었고, Fig. 4-9에서는 1차에서 35차까지, Fig. 4-10에서는 36차에서 70차까지의 오차율을 그래프로 나타내었다.

Fig. 4-9 및 4-10을 통해서 쉽게 알 수 있듯이 동축소법을 이용한 부분구조합성법은 거의 0%에 가까운 오차율을 보이고 있으나 구분 모우드 합성법은 32차부터 고차로 갈수록 오차율이 심한 변동폭을 나타내고 있음을 알 수 있다.

Table 4-5 Results of CMS, DRSSM & FEM

(Unit : Hz)

| Degree | CMS | DRSSM | FEM | Degree | CMS | DRSSM | FEM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 36 | 312.990 | 302.929 | 302.900 |
| 2 | 0.030 | 0.000 | 0.000 | 37 | 318.300 | 312.080 | 312.100 |
| 3 | 0.160 | 0.000 | 0.000 | 38 | 353.800 | 317.478 | 317.500 |
| 4 | 0.160 | 0.000 | 0.000 | 39 | 368.070 | 318.415 | 318.400 |
| 5 | 0.160 | 0.000 | 0.000 | 40 | 368.200 | 345.087 | 345.100 |
| 6 | 0.160 | 0.026 | 0.000 | 41 | 375.110 | 352.943 | 352.900 |
| 7 | 6.180 | 6.182 | 6.200 | 42 | 411.990 | 366.024 | 366.000 |
| 8 | 15.060 | 15.062 | 15.100 | 43 | 414.290 | 374.447 | 374.400 |
| 9 | 17.150 | 17.148 | 17.100 | 44 | 420.040 | 377.711 | 377.700 |
| 10 | 31.220 | 31.224 | 31.200 | 45 | 426.900 | 410.775 | 410.800 |
| 11 | 33.800 | 33.801 | 33.800 | 46 | 428.370 | 418.734 | 418.700 |
| 12 | 49.490 | 49.493 | 49.500 | 47 | 441.890 | 419.153 | 419.200 |
| 13 | 56.110 | 56.091 | 56.100 | 48 | 479.500 | 441.727 | 441.700 |
| 14 | 70.780 | 70.776 | 70.800 | 49 | 481.480 | 456.589 | 456.600 |
| 15 | 83.900 | 83.789 | 83.800 | 50 | 512.240 | 476.767 | 476.800 |
| 16 | 95.900 | 95.877 | 95.900 | 51 | 536.500 | 481.575 | 481.600 |
| 17 | 103.300 | 103.242 | 103.200 | 52 | 547.130 | 504.080 | 504.100 |
| 18 | 106.190 | 106.109 | 106.100 | 53 | 550.120 | 511.905 | 511.900 |
| 19 | 119.420 | 119.281 | 119.300 | 54 | 551.410 | 534.820 | 534.800 |
| 20 | 120.870 | 120.818 | 120.800 | 55 | 567.330 | 538.945 | 538.900 |
| 21 | 125.530 | 125.447 | 125.400 | 56 | 567.500 | 540.668 | 540.600 |
| 22 | 141.820 | 141.777 | 141.800 | 57 | 582.800 | 550.223 | 550.200 |
| 23 | 158.150 | 157.767 | 157.800 | 58 | 605.680 | 550.705 | 550.600 |
| 24 | 159.970 | 159.943 | 159.900 | 59 | 605.710 | 555.781 | 555.800 |
| 25 | 168.610 | 168.485 | 168.500 | 60 | 606.880 | 565.071 | 565.100 |
| 26 | 198.240 | 197.497 | 197.500 | 61 | 616.160 | 582.664 | 582.700 |
| 27 | 200.170 | 199.629 | 199.600 | 62 | 633.170 | 588.171 | 588.200 |
| 28 | 206.840 | 205.012 | 205.000 | 63 | 633.880 | 604.678 | 604.700 |
| 29 | 234.240 | 233.648 | 233.600 | 64 | 638.980 | 611.649 | 611.600 |
| 30 | 245.280 | 244.453 | 244.500 | 65 | 657.410 | 616.905 | 616.900 |
| 31 | 255.660 | 255.329 | 255.300 | 66 | 657.450 | 617.188 | 617.200 |
| 32 | 291.130 | 273.416 | 273.400 | 67 | 670.000 | 637.772 | 637.800 |
| 33 | 296.880 | 282.739 | 282.700 | 68 | 672.690 | 649.994 | 650.000 |
| 34 | 299.290 | 287.463 | 287.500 | 69 | 751.940 | 668.822 | 668.800 |
| 35 | 304.920 | 293.629 | 293.600 | 70 | 779.080 | 671.359 | 671.400 |

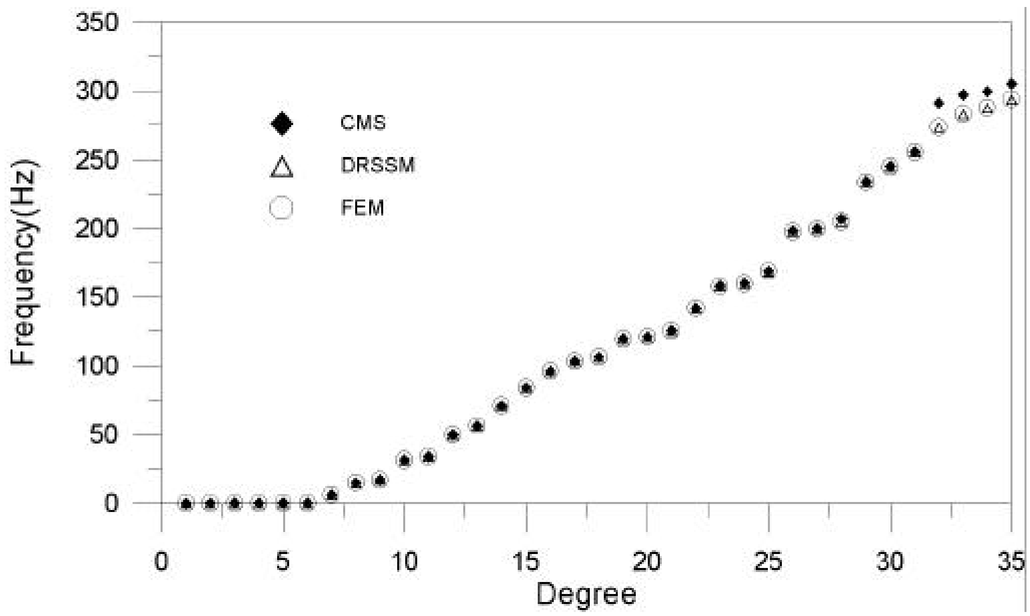



Fig. 4-7 Comparison of CMS, DRSSM with FEM

(No. of natural freq. : 1   35)

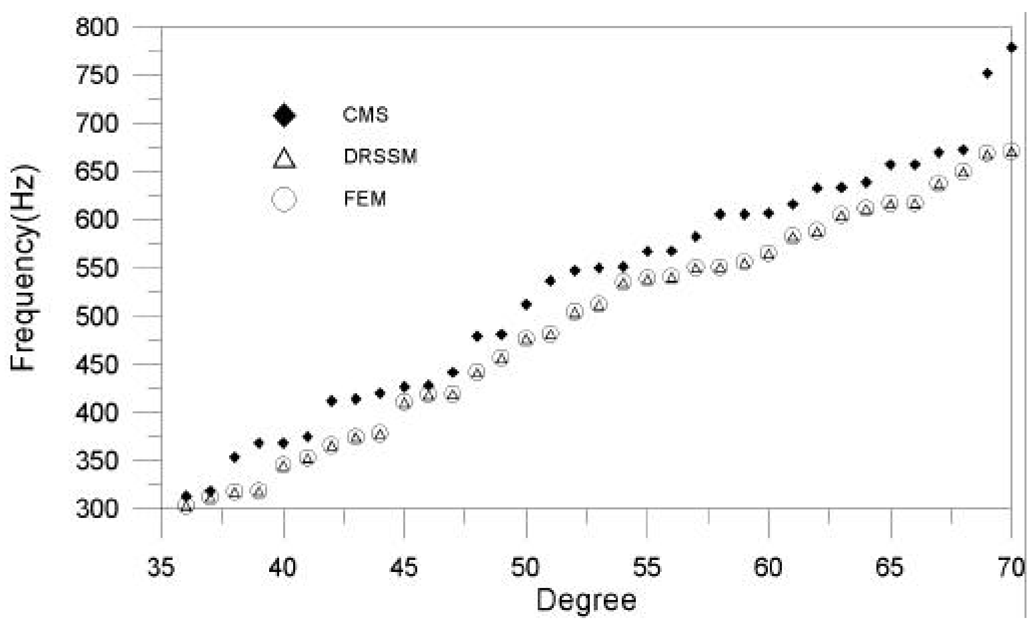



Fig. 4-8 Comparison of CMS, DRSSM with FEM

(No. of natural freq. : 36   70)

Table 4-6 Error rate of CMS & DRSSM

(Unit : %)

| Degree | CMS | DRSSM | Degree | CMS | DRSSM |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 36 | 3.33 | 0.01 |
| 2 | 0.00 | 0.00 | 37 | 1.99 | 0.01 |
| 3 | 0.00 | 0.00 | 38 | 11.43 | 0.01 |
| 4 | 0.00 | 0.00 | 39 | 15.60 | 0.00 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 40 | 6.69 | 0.00 |
| 6 | 0.00 | 0.00 | 41 | 6.29 | 0.01 |
| 7 | 0.32 | 0.29 | 42 | 12.57 | 0.01 |
| 8 | 0.26 | 0.25 | 43 | 10.65 | 0.01 |
| 9 | 0.29 | 0.28 | 44 | 11.21 | 0.00 |
| 10 | 0.06 | 0.08 | 45 | 3.92 | 0.01 |
| 11 | 0.00 | 0.00 | 46 | 2.31 | 0.01 |
| 12 | 0.02 | 0.01 | 47 | 5.41 | 0.01 |
| 13 | 0.02 | 0.02 | 48 | 8.56 | 0.01 |
| 14 | 0.03 | 0.03 | 49 | 5.45 | 0.00 |
| 15 | 0.12 | 0.01 | 50 | 7.43 | 0.01 |
| 16 | 0.00 | 0.02 | 51 | 11.40 | 0.01 |
| 17 | 0.10 | 0.04 | 52 | 8.54 | 0.00 |
| 18 | 0.08 | 0.01 | 53 | 7.47 | 0.00 |
| 19 | 0.10 | 0.02 | 54 | 3.11 | 0.00 |
| 20 | 0.06 | 0.01 | 55 | 5.28 | 0.01 |
| 21 | 0.10 | 0.04 | 56 | 4.98 | 0.01 |
| 22 | 0.01 | 0.02 | 57 | 5.93 | 0.00 |
| 23 | 0.22 | 0.02 | 58 | 10.00 | 0.02 |
| 24 | 0.04 | 0.03 | 59 | 8.98 | 0.00 |
| 25 | 0.07 | 0.01 | 60 | 7.39 | 0.01 |
| 26 | 0.37 | 0.00 | 61 | 5.74 | 0.01 |
| 27 | 0.29 | 0.01 | 62 | 7.65 | 0.00 |
| 28 | 0.90 | 0.01 | 63 | 4.83 | 0.00 |
| 29 | 0.27 | 0.02 | 64 | 4.48 | 0.01 |
| 30 | 0.32 | 0.02 | 65 | 6.57 | 0.00 |
| 31 | 0.14 | 0.01 | 66 | 6.52 | 0.00 |
| 32 | 6.49 | 0.01 | 67 | 5.05 | 0.00 |
| 33 | 5.02 | 0.01 | 68 | 3.49 | 0.00 |
| 34 | 4.10 | 0.01 | 69 | 12.43 | 0.00 |
| 35 | 3.86 | 0.01 | 70 | 16.04 | 0.01 |

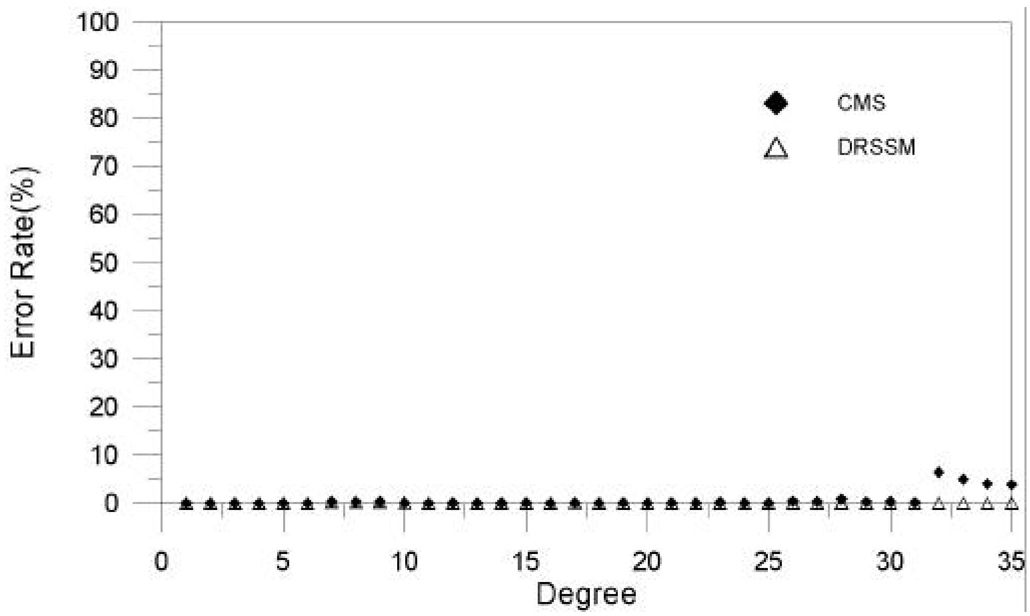



Fig. 4-11 Comparison of Error rate
(No. of natural freq. : 1 35)

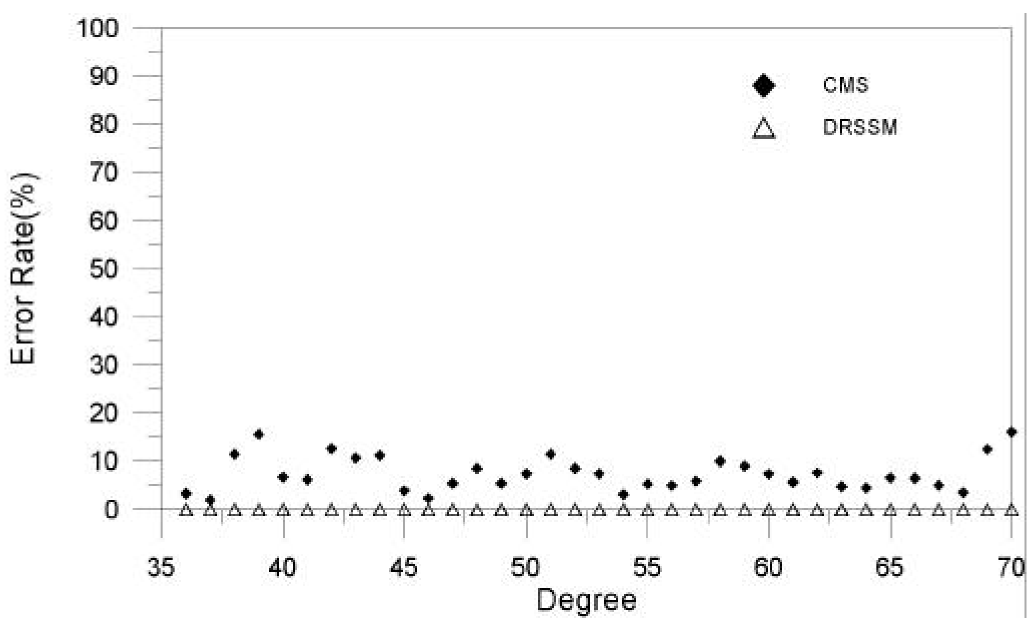



Fig. 4-12 Comparison of Error rate
(No. of natural freq. : 36 70)

## 5. 결 론

본 연구에서는 동축소법을 이용한 부분구조합성법을 제안하고 이를 이용한 진동해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 구분 모우드 합성법으로 진동해석시 모우드를 저차의 몇십 개만 채용한다면 고차 고유진동수 대역으로 갈수록 오차가 커지는 것을 확인할 수 있었다.
2) 동축소법을 이용한 부분구조합성법에 의한 진동해석을 수행하여 FEM과 일치하는 결과, 즉 오차가 없는 결과를 얻을 수 있었고 제안한 방법의 유효성을 입증할 수 있었다.
3) Guyan의 정축소법을 이용한 구분 모우드 합성법 해석의 단점인 고차 고유진동수대역으로 갈수록 고유진동수의 오차가 커지게 되는 것을 보완할 수 있었다.
4) 원하는 영역의 주파수 대역에 대하여 오차 없이 고유진동수를 구할 수 있으며 소음문제 등과 같은 고주파영역에서의 해석도 가능하다.

결합부의 자유도가 크거나 고유진동수들이 서로 인접하여 있더라도 보다 빠르고 정확한 해를 구할 수 있는 알고리즘 개발과 이를 실제 구조물에 적용하여 확인하는 것이 앞으로 해결되어야 할 연구과제이다.

# 참 고 문 헌


[1] **長松召男**, **大熊政明**, “**部分構造合成法**”, **培風館**, 1991

[2] **大熊政明**, “**部分構造合成法による振動解析**”, **博士學位論文**, **東京工業大學**, p.58,

[3] **오재응 외** 3**인**, “**부분구조합성법을 이용한 대형 구조물의 동특성 규명 및 개선에 관한 연구**”, **한국소음진동공학회 추계학술발표대회 논문집**, pp.177, 1993

[4] K.F.Ehmann, Joo H. H., "A Method for Substructural Sensitivity Synthesis" ASME J. Vol.113, p201, 1991,

[5] R.J.Guyan, “Reduction of Stiffness and Mass Matrices”, AIAA J., Vol.3, No.2, p.130, 1965

[6] **朴錫柱**, **長松召男**, “**部分構造合成法에 의한 振動解析과 動特性의 最適化**”, **韓國舶用機關學會誌**, **弟**13**卷**, **弟**4**號**, 1989

p.74, 1986

[7] **朴錫柱외** 3**人**, “**プレス機械の振動解析と動特性の最適化**”, **日本機械學會論文集**C, 56 **권** 524**호**, p. 872, Apr. 1990

[8] **朴錫柱**, “**モ-ド合成法による振動解析と動特性の最適化**”, **東京工業大學 博士學位 論文**, Mar. 1989

[9] **長松召男**, “**モ-ド 解析**”, **培風館**, pp.76-85, pp.166-170,1985

[10] A. Nagamatsu, T. Ishii, S. Honda., "Vibration analysis and structural optimazation of a press machine", Finite Elements in Analysis and Design, The International Journal of Applied Finite Elements and Computer Aided Engineering, Vol. 14 No.2&3, Elsevier Publishers B.V., pp.297, Oct. 1993

[11] **박석주**, **왕지석**, "**감도해석법에 의한 구조물의 결합부 강성 산출에 관한 연구**", **한국박용기관학회지**, **제**16**권**, **제**5**호**, pp.60, 1992

[12] A.A Huckelbridge, C.Lawrence, "Identification of Structural Interface Characteristics Using Component Mode Synthesis", ASME J., Vol.111 pp.140, 1989

[13] **戸川**隼**人**, “**マトフリクスの數値解析**”, **オ一ム社**, pp.170 177, 224 230, 1971