

회전장이 대변형 거동에 미치는 영향에 대한 고찰

이 상 갑* · 고 윤 섭*

A Study on the Effect of Rotation Field on the Large Deformation Behavior

Lee Sang - Gab, Ko Yoon - Sup

Abstract

One of the principal difficulties in the three dimensional large deformation problems is the parametrization of the rotation field for numerical computations. This study is to compare the experimental results of the post-buckling problem of short I-beam with analytical ones using linearized or fully nonlinear rotation fields, and to gain a further insight into the effect of rotation field on the large deformation behavior. It might be useful to use a novel parametrization in terms of quaternions with an updating procedure of configuration based on the exponential map to the beam and shell elements.

1. 서 론

선체 및 해양구조물의 대변형(large deformation) 구조해석에는 주로 보(beam)나 셸(shell)등의 기본 구조요소(structural elements)등이 사용되고 있다. 이러한 요소들은 통상적인 비선형 단계를 지나 기하학적으로 과대한 변형을 정확하게 나타낼 수 있어야 함은 물론이고, 정식화 과정에서 수학적인 어려움도 줄일 수 있고 규모가 큰 계산(large scale computation)에도 적합해야 할 것이다. 미소회전(infinitesimal rotation)과는 달리 유한회전(finite rotation)은 벡터로서 취급할 수 없기 때문에, 과대 변형에서는 회전장(rotation field)의 취급에 어려움이 따른다.

* 한국해양대학교 이공대학 조선공학과

보의 Saint-Venant 문제의 해¹⁾를 정확하게 선형화(linearization)함으로서 전단 워핑(transverse warping)^{2,3)}을 고려할 수 있는 선형화된 변위장(linearized displacement field)을 얻을 수 있다. 비틀림의 유한 및 미소 워핑(finite and infinitesimal warping)^{4,5)}을 첨부함으로서 보다 정교한 변위장을 얻을 수 있다. 보의 단면에 이동틀(moving frame)의 개념을 사용하고 전단변형을 고려한 2차원의 비선형 보 이론(nonlinear beam theory)이 개발되었고⁶⁾, 또한 유한회전을 Euler Angles로서 매개변수화(parametrization)하고 방향성 접근법(directional approach)을 3차원 보 이론에 적용하였다⁷⁾. 이러한 비선형 보 이론의 정식화에 따른 수학적 복잡성을 덜 수 있고, 과다회전 시 Euler Angles과 관련된 특이점(singularity)도 피할 수 있는 방법이 소개되었다^{8,9)}. 즉 유한회전을 최적의 Cayley-Klein parameters(Quaternions)으로 매개변수화하고 형상(configuration)의 갱신과정을 Exponential Map을 이용함으로서 유한회전증분(finite rotational increments)에서도 정확하다.

지난 20여년 이상 쉘 해석에는 주로 고체요소에 격하개념을 도입한 방법(degenerated solid approach)이 지배적이었으며¹⁰⁾, 이러한 격하요소(degenerated element)를 이용한 쉘의 비선형해석에서는 미소회전증분(infinitesimal rotation increments)의 가정하에 일반적으로 사용되어 왔다^{11,12)}. 이러한 제한조건을 개선하여 비선형 절점회전함수(nonlinear nodal rotation function)를 가정하거나¹³⁾, 전체좌표에서 회전각에 대한 Argyris¹⁴⁾의 회전 매트릭스(rotation matrix)의 2차항까지의 근사치¹⁵⁾를 취하는 등 유한회전증분의 영향도 고려되고 있다. 그리고 변위함수의 방향벡터를 삼각함수로 표현하여 방향벡터 증분을 Taylor 급수전개의 2차항까지의 근사치를 비선형 회전증분으로 취한 쉘 요소도 개발되었다¹⁶⁾. 격하개념과는 달리 고전적인 비선형 쉘 이론을 바탕으로 한 기하학적으로 정확한 비선형 쉘 모델(geometrically exact nonlinear shell model)도 개발되었는데¹⁷⁻¹⁹⁾, 보에서와 같이 유한회전을 Quaternions으로 매개변수화하고 Exponential Map의 연산방법으로 형상을 갱신한다.

이상의 보나 쉘의 대변형 비선형해석에서는 미소회전증분과 유한회전증분의 가정에 따라, 그리고 유한회전을 어느 정도 정확히 또한 효율적으로 나타낼 수 있는가에 따라 그들 요소의 우수성이 좌우된다고 볼 수 있다. 방향 도함수(directional derivative)의 공식을 이용하여 변분형(variational form)으로 된 약세형 평형방정식(equilibrium equations in weak form)을 중간상태(intermediate configuration)에서 선형화(linearization)함으로서 비선형 유한요소해석에 적합한 증분형 평형방정식을 구할 수 있다. 본 연구에서는 반복하중을 받는 짧은 I형 보의 횡-비틀림 좌굴(lateral-torsional buckling)에 대하여 수행한 실험결과⁵⁾를 이용하여 보의 회전장의 정도(accuracy)가 좌굴 후에 미치는 영향을 고찰하고자 한다. 여기에서는 선형화된 변위장의 보 요소와 Euler Angles이나 Quaternions으로 유한회전을 나타내는 보 요소를 사용한다. 그리고 1개의 유한 비틀림 워핑을 더 고려하고 3개의 워핑(2개의 전단 워핑, 1개의 미소 비틀림 전단 워핑)들을 중첩시킴으로서 전단효과를 더욱 잘 나타내도록 한다. 복잡한 하중 상태하의 재료의 비선형 거동을 국부적으로 정확하게 나타낼 수 있도록 응력성분(stress component)으로 정식화하고, 또한 다축 주기적소성(multi-axial cyclic plasticity) 모델을 Consistent Return Mapping Algorithm²⁰⁾과 결합시켜 적용한다⁵⁾.

2. 변형기하학의 기술(Kinematic Description)

길이가 L 이고 부분적으로 매끈한 경계 $\partial\mathcal{Q}$ 를 가지는 단면 \mathcal{Q} 인 직선보에서, 시간 $t=0$ 일 때의 기준상태 $B \equiv (0, L) \times \mathcal{Q} \subset \mathbf{R}^3$ 에서의 기준좌표계는 기저벡터 $\{E_i\}$ 와 함께 $\{X_i\}$ 로, 현재상태에서의 공간좌표계는 기저벡터 $\{e_i\}$ 에 따른 $\{x_i\}$ 로 표시한다. 변형사상(deformation map)은 $\phi : B \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 로, 그리고 변형구배(deformation gradient)는 $\mathbf{F} = \partial\phi / \partial\mathbf{X}$ 로 나타낸다. 질점 $\mathbf{X} \in B$, $\mathbf{x} \in \phi(B)$ 들은 각각 그들의 위치벡터 X 와 x 로서 표현한다. $\{X_1, X_2, X_3\}$ 축은 각각 단면의 중심에서 보의 길이방향과 2개의 주축을 향한다.

2.1 선형화된 변위장(Linearized Displacement Field)

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 - X_2 \theta_3 + X_3 \theta_2 + \psi_1 \beta_1 + \psi_2 \beta_2 + \psi_3 \beta_3 + \psi_4 \gamma \\ u_2 - X_3 \theta_1 \\ u_3 + X_2 \theta_1 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

여기에서 $u_1(X_1)$, $u_2(X_1)$ 와 $u_3(X_1)$ 는 각 축방향으로의 평균변위(mean displacements)이다. $\theta_2(X_1)$, $\theta_3(X_1)$ 는 각각 X_3 , X_2 축에 대한 평균회전각(mean rotations), $\beta_2(X_1)$, $\beta_3(X_1)$ 는 각각 X_3 , X_2 축에 대한 평균전단각(mean shear angles)으로서 이들의 관계는 다음과 같다.

$$\beta_3(X_1) = \theta_3(X_1) - u_{2,1}(X_1), \quad \beta_2(X_1) = \theta_2(X_1) - u_{3,1}(X_1) \quad (2.2)$$

$\psi_2(X_2, X_3)$, $\psi_3(X_2, X_3)$ 는 각각 $\beta_2(X_1)$, $\beta_3(X_1)$ 에 대응되는 워핑함수들이다⁵⁾. 그리고 $\theta_1(X_1)$ 는 X_1 축에 대한 비틀림 각(twisting angle)이고, Fig. 2.1에서와 같이 주 비틀림워핑(primary torsional warping)에 의하여 플랜지는 그 중심축에 대하여 $\gamma(X_1)$ 만큼 회전한다. 이때의 주 비틀림워핑함수 $\psi_4(X_2, X_3)$ 는 근사적으로 다음과 같고, 다른 워핑과는 달리 이 워핑 $\psi_4(X_2, X_3)\gamma(X_1)$ 만이 유한한 크기를 갖는다.

$$\psi_4(X_2, X_3) = -X_2 X_3 \quad (2.3)$$

마지막으로 Fig. 2.2에서 보는 바와 같이 유한한 주 비틀림워핑에 의하여 플랜지에 발생하는 미소전단워핑은 $\psi_1(X_2, X_3)\beta_1(X_1)$ 로서 나타낼 수 있다⁵⁾.

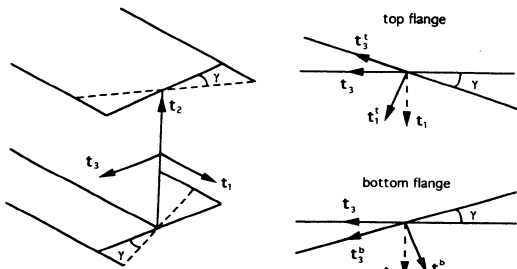


Fig. 2.1 Flange rotation due to primary torsional warping.

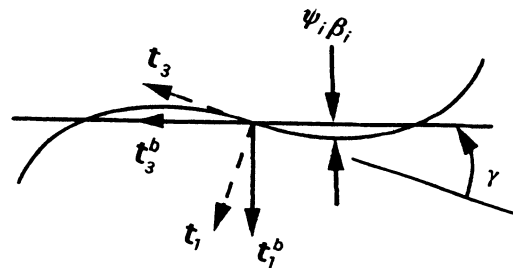


Fig. 2.2 Distribution of warping in bottom flange.

2.2 비선형 변위장(Nonlinear Displacement Field)

보의 형상은 단면 중심축의 위치벡터(position vector), 단면의 회전방향을 나타내는 3차원의 직교이동틀(orthogonal moving frame), 그리고 워핑의 강도(warping intensity)로서 다음과 같은 변형사상으로 묘사할 수 있다.

$$\phi(\mathbf{X}) = \phi_0(X_1) + X_2 \mathbf{t}_2 + X_3 \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_3^a \\ \mathbf{t}_3^b \\ \mathbf{t}_3^c \end{Bmatrix} + \Psi_i(X_2, X_3) \beta_i(X_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_i^a \\ \mathbf{t}_i^b \\ \mathbf{t}_i^c \end{Bmatrix} = \phi_0(X_1) + a_i(\mathbf{X}) \mathbf{t}_i(X_1) \quad (2.4)$$

여기에서 $\phi_0(X_1) = [X_1 + u_1(X_1), u_2(X_2), u_3(X_3)]^T$ 는 단면 중심축의 위치벡터를 나타내고, 변위 $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$ 와 $u_3(X_3)$ 는 각 축방향으로의 변위성분이다. 단면의 방향은 Fig. 2.1에서와 같이 단면의 중심에 있는 직교이동기저벡터(orthonormal moving basis vector) $\{\mathbf{t}_i(\mathbf{S})\}$ 로 나타낼 수 있고, 직교변환매트릭스(orthogonal transformation matrix) $A(\mathbf{S}) = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j$ 에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{t}_i(\mathbf{S}) = A(\mathbf{S}) \mathbf{E}_i = A_{ji}(\mathbf{S}) \mathbf{e}_j \quad (2.5)$$

선형화된 변위장에서의 식 (2.1), (2.3)과는 달리, Fig. 2.1에서와 같이 주 비틀림워핑은 상부 및 하부 플랜지에 다음과 같은 새로운 직교틀(orthogonal frame)로서 표현된다.

$$\mathbf{t}_i^a = Q_{ij}(\gamma) \mathbf{t}_i, \quad \mathbf{t}_i^b = Q_{ji}(\gamma) \mathbf{t}_j, \quad Q(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad i, j \in \{1, 3\} \quad (2.6)$$

여기에서 윗 첨자 t와 b는 각각 상부 및 하부 플랜지를 의미한다. 그리고 미소전단 워핑항 $\Psi_i(X_2, X_3)$ $\beta_i(X_1)$ 들은 Fig. 2.1에서와 같이 단면의 각 요소들에 수직하게 나타낸다. 식 (2.5)의 마지막 항의 $a_i(\mathbf{X})$ 는 다음과 같다.

$$a_i(\mathbf{X}) = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_3 h(\gamma) + \Psi_i \beta_i g(\gamma) \\ X_2 \\ X_3 g(\gamma) - \Psi_i \beta_i h(\gamma) \end{Bmatrix}, \quad g(\gamma) = \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ 1 \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}, \quad h(\gamma) = \begin{Bmatrix} -\sin \gamma \\ 0 \\ \sin \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

2.2.1 Euler Angles

직교변환매트릭스 $A(\mathbf{X}_1)$ 는 다음과 같이 3개의 회전매트릭스(rotation matrix) A_1 , A_2 와 A_3 의 곱으로 유도할 수 있다.

$$A(\mathbf{X}_1) = A_1(\theta_1(\mathbf{X}_1)) A_2(\theta_2(\mathbf{X}_1)) A_3(\theta_3(\mathbf{X}_1)) \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2c_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 & c_1s_2c_3 + s_1s_3 \\ c_2s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 \\ -s_2 & s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

여기에서 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 는 각각 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ 축에 대한 유한 회전각을 나타내는 Euler Angles들로서 $\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1$ 축의 순서대로 회전하고, $c_i = \cos \theta_i(\mathbf{X}_i)$, $s_i = \sin \theta_i(\mathbf{X}_i)$ 이다. 가장 일반적으로 많이 사용되고 있으나 삼각함수를 사용하고 있으므로 과대회전 시 특이점(singularity)이 존재한다는 결점이 있다.

2.2.2 Cayley - Klein Parameters (or Quaternions)

직교변환매트릭스 A 의 그룹(group) $SO(3)$ (special orthogonal group), 반대칭 매트릭스(skew-symmetric matrix) θ 의 선형공간(linear space) $so(3)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$SO(3) = \{A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 : A^t A = \mathbf{I}, \det A = 1\}, so(3) = \{\theta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \mid \theta + \theta^t = 0\} \quad (2.8)$$

현재의 보 모델에 대한 형상공간(configuration space) $SO(3)$ 은 이제 더 이상 선형이 아니고 비선형 미분가능 다양체(nonlinear differentiable manifold)로 된다. $A \in SO(3)$ 이 유한회전(finite rotations)을 나타내는 데 비하여, 반대칭 매트릭스 $\theta \in so(3)$ 는 $\theta \mathbf{h} = \theta \times \mathbf{h}$ 인 회전축(rotation axis 또는 axial vector) θ 를 갖는 미소회전을 나타낸다. 반대칭 매트릭스 $\theta(\mathbf{X}_1) = \theta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 와 축벡터 $\theta(\mathbf{X}_1) = \theta_i \mathbf{e}_i$ 의 매트릭스 형은 다음과 같다.

$$[\theta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\theta_i) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

주어진 회전 매트릭스 $A \in SO(3)$ 에 대하여 집합 $T_A SO(3) = \{\theta A \mid \text{for any } \theta \in so(3)\}$ 는 A 에서 $SO(3)$ 에 접함으로써 접공간(tangent space)라고 부른다. Fig. 2.3에서와 같이 $\theta A \in T_A SO(3)$ 는 기하학적으로 유한회전 A 에 접하는 또는 중첩되는 미소회전($\hat{\theta}$)을 나타낸다. 주어진 반대칭 텐서장($\hat{\theta}(\mathbf{X}_1)$)와 축벡터($\hat{\theta}(\mathbf{X}_1)$)에 대하여 직교변환매트릭스 $A(\mathbf{X}_1)$ 는 회전공식(Rodrigues' formula)을 사용하여 다음과 같이 $\theta(\mathbf{X}_1)$ 의 지수 $A(\mathbf{X}_1) = \exp(\hat{\theta}(\mathbf{X}_1))$ 로 나타낼 수 있다. 이것을 단위 Quaternion $\mathbf{q} = q_0 + \vec{q}$ 로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{I} + 2((\mathbf{q} \times)^2 + q_0(\mathbf{q} \times)) = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + q_0(\mathbf{q} \times)) \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - 1/2 & q_1q_2 - q_0q_3 & q_1q_3 + q_0q_2 \\ q_2q_1 + q_0q_3 & q_0^2 + q_2^2 - 1/2 & q_2q_3 - q_0q_1 \\ q_3q_1 - q_0q_2 & q_3q_2 - q_0q_1 & q_0^2 + q_3^2 - 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

그리고 단위 Quaternion \mathbf{q} 의 스칼라 q_0 와 q_1, q_2, q_3 의 성분을 갖는 벡터 \vec{q} 는 다음과 같이 정의된다.

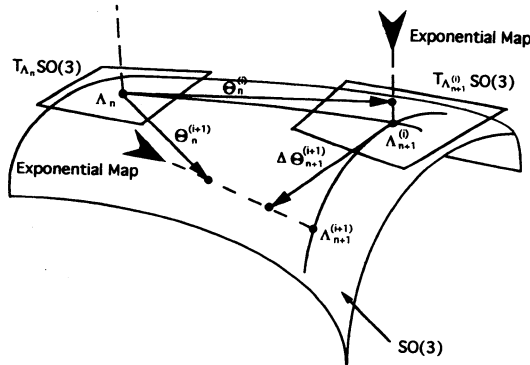


Fig. 2.3 Geometrically interpretation of the exponential map.

$$q_0 = \cos 1/2 \|\theta\|, \quad \vec{q} = \frac{\theta}{\|\theta\|} \sin 1/2 \|\theta\| \quad (2.11)$$

Quaternions를 사용하는 형상의 갱신과정은 아래의 Table 2.1과 같다.

Table 2.1 Update procedure of configuration.

- 1) Retrieve q_n , and compute A_n from q_n using Eq. (2.10).
- 2) Compute q associated with θ from Eq. (2.11).
- 3) Compute $\exp[\theta]$ from q .
- 4) Perform $A_{n+1} \exp[\theta] A_n$. (see Fig. 2.3)
- 5) Extract q_{n+1} from A_{n+1} , and store q_{n+1} . (Table 2.2).

Table 2.2 Extraction q from A (Spurrier's algorithm).

$M = \max(\text{Tr}(A) : A_{11}, A_{22}, A_{33})$.
 If $M = \text{Tr}(A)$, then :
 $q_0 = 1/2 [1 + \text{Tr}(A)]^{1/2}$.
 $q_i = (A_{kj} - A_{jk}) / 4q_0$ for $i=1, 2, 3$.
 Else :
 Let i be such that $M = A_{(ii)}$.
 $q_i = [1/2 A_{(ii)} + 1/4 (1 - \text{Tr}(A))]^{1/2}$.
 $q_0 = (A_{kj} - A_{jk}) / 4q_i$.
 $q_i = (A_{ii} - A_{ii}) / 4q_i$ for $I=j, k$.
 where (i, j, k) is a cyclic permutation of $(1, 2, 3)$
 and $A_{(ii)}$ is the coefficient (i, i) of matrix $[A_{ij}]$.

3. 유한요소의 정식화

3.1 평형 방정식(Equilibrium Equations, Weak Form)

임의의 경계조건을 만족하는 허용변분(kinematically admissible variation)에 대하여 다음과 같이 약세형(weak form)으로 평형 방정식을 표현할 수 있다²¹⁾.

$$G(\phi, \eta) \equiv \int_B \mathbf{P} : (D\mathbf{F} \cdot \eta) dV - \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \eta dV - \int_{\partial B} \bar{\mathbf{t}} \cdot \eta dS = 0 \quad (2.12)$$

여기서 $D\mathbf{F} \cdot \eta$ 는 변형구배의 변분으로서 다음과 같은 방향 도함수(directional derivative)의 공식을 이용하여 구한다.

$$D\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{u}(S)) \cdot \eta = \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{u} + \varepsilon \eta)]_{\varepsilon=0} \quad (2.13)$$

편의를 위해 제1 Piola - Kirchhoff 응력텐서는 제2 Piola - Kirchhoff 응력텐서 ($\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{P}$)로 대체하고, 이에 대응되는 Green - Lagrangian 변형도텐서 $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - 1)/2$ 를 사용한다.

3.2 지배방정식의 선형화(Linearized Governing Equations)

중간상태(intermediate configuration) $\bar{\phi} : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ 에 대한 평형방정식 (2.12)을 선형화하면 다음과

같다.

$$L[G]_{\bar{\Phi}} = \int_B (DF \cdot \eta)_{\bar{\Phi}} : [S \otimes 1 + F' \frac{\partial S}{\partial E} F]_{\bar{\Phi}} : (DF \cdot \Delta \phi)_{\bar{\Phi}} dV + G(\bar{\Phi}, \eta) \quad (2.14)$$

여기에서 $\Delta \phi : B \rightarrow \mathbf{R}^3$ 는 증분변형(increment motion)이다. 그리고 적분항은 접선강성도(tangent stiffness)로서, 그것의 첫째항은 기하학적인 부분이고 둘째항은 재료적인 항이다. 마지막 항은 불평형력(out-of-balance force)로서 다음과 같고, $\bar{\Phi}$ 가 평형상태이면 없어진다.

$$G(\bar{\Phi}, \eta) = \int_B \mathbf{P} : (DF \cdot \eta)_{\bar{\Phi}} dV - \int_{\partial B} \bar{t} \cdot \eta dS \quad (2.15)$$

식 (2.14)에서의 변형구배 F의 방향도함수 $DF \cdot \Delta \phi$ 와 $DF \cdot \eta$ 는 $\Delta \phi$ 와 η 가 방향이 서로 다르다는 것이외는 동일하다.

3.3 유한요소 이산화

식 (2.14)은 유한요소법(Finite Element Method)으로 취급하기 적당한 형태로 되어있다. 보는 3개의 절점에 각각 다음과 같은 10개의 자유도를 가지는 요소로 분할된다. 일반화된 변위 $\mathbf{u}(S) = [u, v, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma]^T$ 는 절점변위 $\mathbf{U} = [U, V, W, \theta_1, \theta_2, \theta_3, B_1, B_2, B_3, \Gamma]^T$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(S) = \sum_{i=1}^N h_i(S) \mathbf{U}_i \quad (2.16)$$

여기에서 $h_i(S)$ 는 C_0 의 연속성을 갖는 보간함수(Interpolation Function), \mathbf{U}_i 는 절점 i 에서의 절점변위 벡터이고 N 은 각 요소의 절점수이다. 각 절점에서의 방향도함수들은 다음과 같이 증분으로서 나타낸다.

$$DF \cdot \Delta \phi = \mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{u}(S)) \Delta \mathbf{U}, \quad DF \cdot \eta = \mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{u}(S)) \eta \quad (2.17)$$

여기서 $\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{u}(S))$ 의 행(Row)들은 $DF \cdot \Delta \phi$ 의 성분들과 1대 1로 대응한다.

위의 결과를 사용하여 선형화된 평형방정식 (2.14)는 증분 절점변위 $\Delta \mathbf{U}$ 에 대하여 다음과 같은 표준적인 이산화 문제(Discrete Problem)로 귀납된다.

$$\mathbf{K}_e \Delta \mathbf{U} = \mathbf{f}_e \quad (2.18)$$

여기에서 접선강성도 \mathbf{K}_e 와 불평형력 \mathbf{f}_e 는 모든 요소의 합으로서 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_e = \sum_c \int_B \mathbf{B}' [S \otimes 1 + F' \mathbf{D}^{ep} F]_{\bar{\Phi}} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{F}_e - \sum_c \int_B \mathbf{B}' : \mathbf{P}_{\bar{\Phi}} dV \quad (2.19)$$

여기에서 \mathbf{F}_e 는 현재 작용 절점하중 벡터이다. 그리고, 응력 $\mathbf{S}_{\bar{\Phi}}$ 와 탄소성 구성매트릭스 $[\mathbf{D}^{ep}]_{\bar{\Phi}}$ 의 비탄성

Table 2.3 Cyclic Plasticity Model⁵⁾.

<p>(1) Update strain tensor and compute trial elastic stresses. $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{S}^E = \mathbf{D}(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p)$, $\eta^E = \mathbf{S}^E - a(m)$, $\xi^E = \mathbf{S}^E - \beta^{(k)}$</p> <p>(2) Check the trial elastic stresses for yielding state under the mth cyclic loading stage.</p> <p>(3) Solve $\phi(\lambda) = 0$ for λ, enforcing consistency condition at t_{n+1}.</p> <p>(4) Compute modified elastic tangent moduli : $\mathcal{E}(\lambda) = (\mathbf{D}^{-1} + \lambda \mathbf{Q})^{-1}$, $\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$</p> <p>(5) Update stresses, plastic strain and back-stresses of yield surface. $\eta_{n+1} = \mathcal{E}(\lambda) \mathbf{D}^{-1} \eta_{n+1}^E$, $\mathbf{S}_{n+1} = \eta_{n+1} a(m)$, $\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \lambda \mathbf{Q} \eta_{n+1}$, $\bar{e}_{n+1}^p = \bar{e}_n^p + \sqrt{23} \lambda \bar{\phi}(\lambda)$, $\beta^{(k+1)} = \mathbf{S}_{n+1} - (\mathbf{S}_{n+1} - a(m)) \frac{k_o}{k^{(k+1)}}$</p> <p>(6) Compute consistent elastoplastic tangent moduli : $[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}]_{n+1} = \mathcal{E} - \frac{(\mathcal{E} \mathbf{Q} \eta_{n+1})(\mathcal{E} \mathbf{Q} \eta_{n+1})^T}{\eta_{n+1}^T \mathbf{Q} \mathcal{E} \mathbf{Q} \eta_{n+1} + \gamma_{n+1}} = \Omega_{n+1}$ where, $\gamma_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{(k^{(k)})^T \eta_{n+1}}{1 - 23(k^{(k)})^T \eta_{n+1} \lambda} \eta_{n+1}^T \mathbf{Q} \eta_{n+1}$</p>
--

(inelasticity)으로 인하여 단면에서는 일반적으로 비선형으로 변함으로 수치해석적으로 단면에 대하여 적분하여야 한다. 채널형 단면에서는 3개의 부분, 즉 웨브와 2개의 플랜지로 나누어, 각각의 부분에 대하여 Gauss-Lobatto 적분법을 적용하고 더함으로서 적분을 행한다. 그리고 길이 방향으로는 Shear Locking을 방지하기 위하여 감차적분법(reduced integration)을 사용한다.

근사적으로 박판 보를 취급한다는 견지에서, 웨브와 플랜지 요소에서는 국부적인 평면응력상태(locally plane stress state)로 간주한다. 그리고 여기서 사용하는 주기적 소성모델은 아래의 Table 3에 요약되어 있다⁵⁾. Table 2.3의 식 (2.20)을 평형방정식 (2.14)에 대입하면 증분 $\Delta \phi$ 에 대하여 평형 방정식을 마지막으로 선형화시킨다.

4. 수치해석 및 고찰

반복하중을 받는 짧은 I형 보의 횡-비틀림 좌굴에 대하여 수행한 실험결과들⁵⁾ 중에서 전형적인 주기적 횡-비틀림 좌굴 거동(작용하중이 작용한 위치의 보 중심에서의 연직처짐과 비틀림에 대한 작용하중과의 관계)을 나타낸 결과는 Fig. 4.2와 같다: 긴 보와는 달리 짧은 보의 날카로운 극한 거동(limit behavior)을 보인 후 매우 빠르게 좌굴 후 강도(post-buckling capacity)에 손실이 발생한다. 그리고 최초의 좌굴하중(buckling load)보다는 훨씬 작지만 무시할 수 없는 크기로 접근하고 있는 좌굴 후 강도도 존재한다. 실험에 사용된 일단고정 타단가동 지지(propped cantilever) 보를 이상화하면 Fig. 4.1과 같고, 해석적인 보 모델에 적용할 표준적인 보의 기하학적 및 재료적인 자료는 Table 4.1과 같다. 표준적인 보 모델에서는 실험에서 사용된 Load Cell은 무시한다.

앞 장들에서 언급한 선형화된 회전장과 비선형 회전장의 해석적인 보 모델을 이용하여 얻은 주기적인

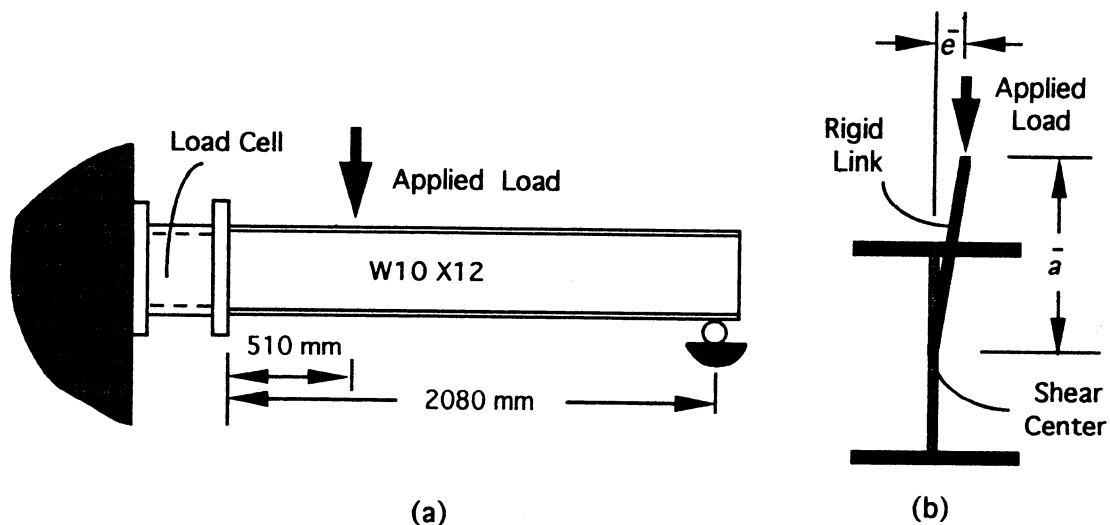
Table 4.1 Properties of standard cases.

beam length	2080mm
location of load from fixed end	510mm
height of load above shear center	240mm
eccentricity of load position	0.25mm
depth of cross section	250mm
width of cross section	100mm
flange thickness	5.1mm
web thickness	4.6mm
yield strength of material	330MPa
ultimate strength of material	475MPa
fixed end flexibility	rigid
right end condition	simple

거동(cyclic response)과 단조적인 거동(monotonic response)을 각각 Fig. 4.3과 Fig. 4.4에 나타내었다. Euler Angles이나 Cayley-Klein parameters (또는 Quaternions)을 이용한 비선형 회전장에 의한 거동은 현재의 작용 하중 조건에서는 별 차이가 없어 구별없이 동일하게 나타내었다. Euler Angles을 회전장으로 사용할 경우, 회전량이 $(2n+1)\pi$ (rad)일 때 특이점이 발생하게 된다. Cayley-Klein parameters를 회전장으로 사용한 해석적인 보 모델은 보다 큰 증

분량에서도 더 좋은 수렴속도를 보여 주고 있다.

Fig. 4.2의 실험에 의한 거동과 Fig. 4.3의 실선으로 나타난 비선형 회전장에 의한 거동에서 알 수 있듯이 정성적으로 매우 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다. 실험과 해석적인 모델에 의해 초기의 극한하중(limit load)과 좌굴 후 하중(post-buckling load)이 거의 동일하게 각각 대략 210(kN)과 106(kN)으로 나타나고 있고, 매 주기마다 접근하고 있는 좌굴 후 하중도 실험과 해석적 모델에서 각각 90(kN)과 95(kN)으로 비슷한 결과를 주고 있다. 또한 짧은 보에서 나타나는 전형적인 주기적 횡-비틀림 좌굴 거동도 잘 나타나고 있어 비선형 회전장을 사용한 해석적인 보 모델은 충분한 정도를 가진다고 할 수 있다. 그러나 연속적짐과 잡아당겼을 때의 극한하중(pulling limit load)는 상당한 차이를 보여 주고 있다. 이것은 실험 시 사용한 Load Cell이 보의 좌측 부분의 지지점에 상당한 유연성(flexibility)을 제공하고 있기 때문인 것으로 생각된다.

**Fig. 4.1 Idealization of test beam.**

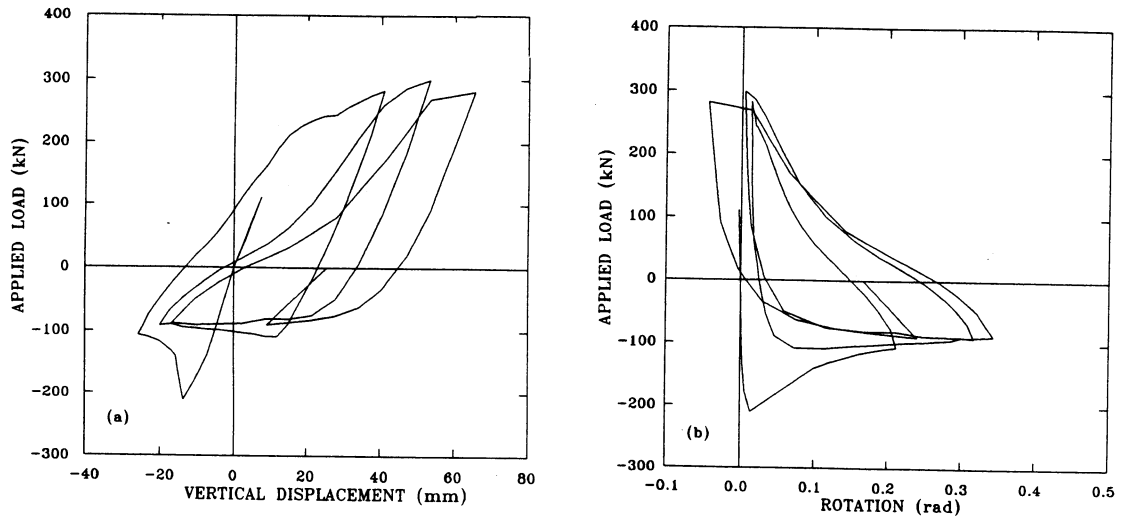


Fig. 4.2 Cyclic load response for test specimen.

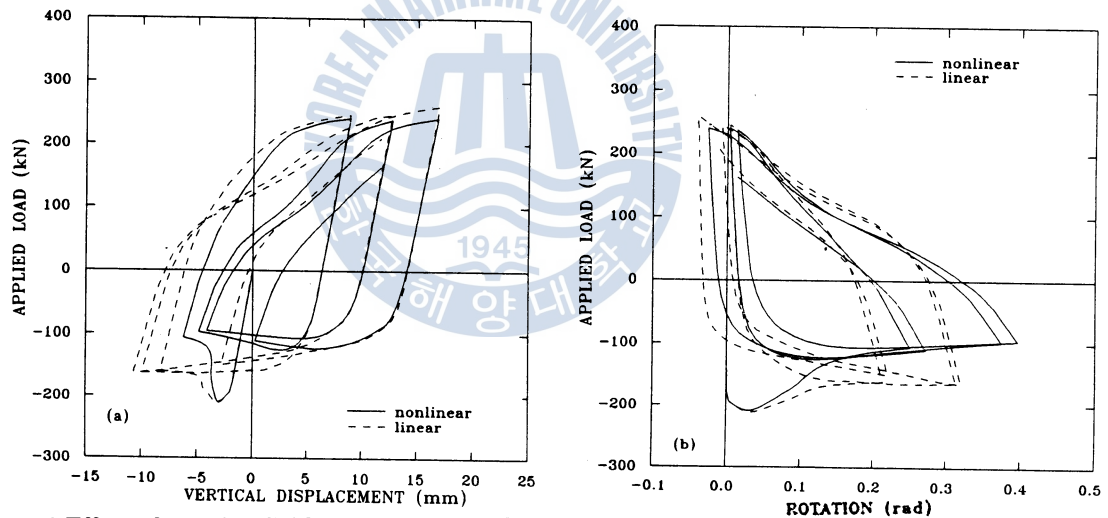


Fig. 4.3 Effect of rotation field under cyclic load response.

Fig. 4.3와 Fig. 4.4는 두가지 회전장에 대한 해석적 보 모델에 의하여 각각 주기적 및 단조적인 거동을 나타내고 있다. 초기의 좌굴하중은 거의 동일하게 나타나지만 좌굴 후의 거동은 매우 다르다는 것을 알 수 있다. Fig. 4.3에서와 같이 주기적인 거동을 살펴보면 비선형 회전장에 의한 보 모델에 의한 좌굴 후 하중은 대략 106(kN)에서 점근적으로 95(kN)으로 줄어들고 있는 반면, 선형화된 회전장에 의한 모델은 거의 동일하게 160(kN) 정도의 좌굴 후 강도를 유지하고 있다. 그리고 선형화된 회전장의 보 모델이 훨씬 더 큰 수직처짐과 작은 비틀림거동을 보여 주고 있다. Fig. 4.4의 단조적인 거동에서 알 수 있듯이 좌굴이 발생한 직후와 상당히 큰 변형 후에도 큰 차이를 보여 주고 있음을 알 수 있다.

선형화된 지배방정식 식 (2.14)는 Washizu 원리²²⁾에 기초를 둔 증분이론에 의한 선형증분 평형방정식에서 통상 무시되는 미소 고차항도 포함하고 있으나, 대회전 시 선형화된 회전장으로는 만족한 결과를 나

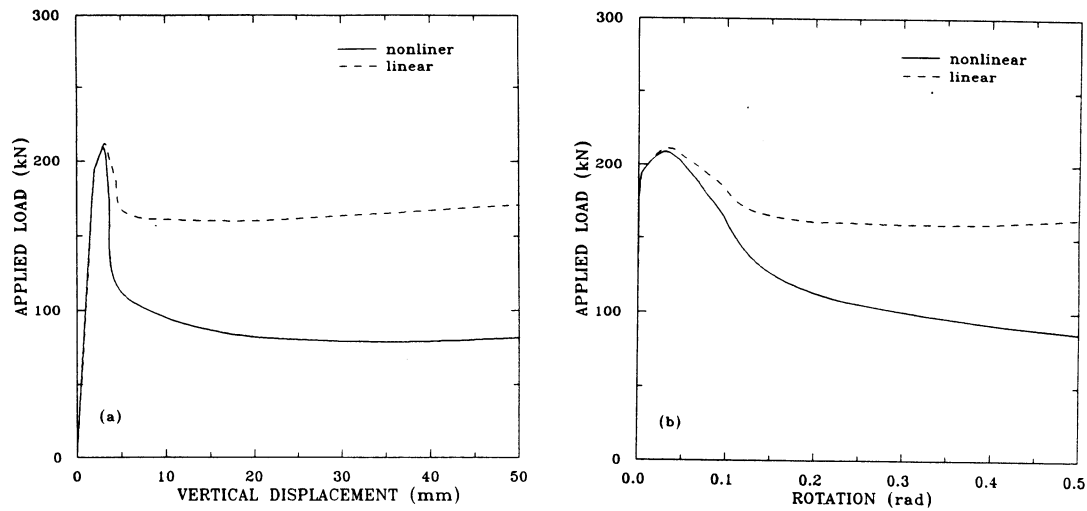


Fig. 4.4 Effect of rotation field under monotonic load response.

타낼 수 없음을 알 수 있다. 그러므로 과다회전이 일어나는 대변형 문제를 다룰 때에는 비선형 회전장을 포함시키는 것이 바람직 할 것이다. 그리고 선형화된 회전장에 몇차의 고차항을 첨부하는 식의 회전장의 비선형화는 더 많은 독립변수(independent variables)나 고차의 형상함수(shape functions)를 사용하여 하는 불편이 따를 것임으로, 완전한 비선형(fully nonlinear)을 회전장으로 사용하는 것이 바람직 할 것이다.

5. 결 론

3차원 대변형 문제에서는 대체로 큰 어려움의 하나는 회전장(rotation field)을 수치계산상으로 정확하고 효율적으로 나타내는 방법이다. 보나 셸이 3차원 대변형 구조문제에서 취급되는 가장 기본적인 구조요소로서 변형기하학적인 면에서도 비슷하다고 할 수 있다. Euler Angles이나 Cayley - Klein parameters(또는 Quaternions)과 같은 회전장을 매개변수로 하는 완전한 비선형 변위장(fully nonlinear displacement)을 사용하는 것이 바람직 할 것이며, 과다회전을 정확하고 효율적으로 그리고 복잡하지 않게 다룰 수 있는 수치해석적인 연산법의 정리도 필요할 것으로 사료된다. 이러한 변위장을 대변형을 받는 셸에도 적용하여 보다 효율적인 요소개발을 해야 할 것이다.

참고문헌

- 1) Love, A.L., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dove Publication, New York, 1944.
- 2) Simo, J.C., "A consistent formulation of nonlinear theories of elastic beams and plates", Report No. UCB/SESM - 82/06, Uni. of California, Berkeley, 1982.

- 3) Hjelmstad, K.D., "Warping effects in transverse bending of thin-walled beams", *ASCE J. Engng. Mech.*, Vol. 113, No. 6, pp. 907-924, 1987.
- 4) Vlasov, V.Z., Thin-walled elastic beams, Israel program for scientific translations, Ltd. Jerusalem, 1961.
- 5) Hjelmstad, K.D and Lee, S.G., "Lateral buckling of short I-beams under cyclic loadings", Report No. SRS-549, University of Illinois, Urbana, 1990.
- 6) Reissner, E., "On a one-dimensional finite strain beam theory: The plane problem", *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 23, pp. 795-804, 1972.
- 7) Antman, S.S., "Kirchhoff problem for nonlinearity elastic rods", *Quat. J. Appl. Math.*, Vol. 32, No. 3, pp. 221-240, 1974.
- 8) Simo, J.C., "A finite strain beam formulation. Part I: The three-dimensional dynamic problem", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 49, pp. 55-70, 1985.
- 9) Simo, J.C. and Vu-Quoc, L., "A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 58, pp. 79-116, 1986.
- 10) Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol. 2, pp. 419-451, 1970.
- 11) Bathe, K.J., "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, 1982.
- 12) Ramm, E., "A plate/shell element for large deflection and rotation", in Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis (Bathe, K.J., Oden, J.T. and Wunderlich, W. eds.), MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- 13) Surana, K.S., "Geometrically nolinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Meths. Engrg.*, Vol.19, pp.581-615, 1983.
- 14) Argyris, J.H., "An excursion into large rotations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 85-155, 1982.
- 15) Onate, E., Dvorkin, E., Canga, M.E. and Oliver, J., "On the Optention of the tangent matrix for geometrically nonlinear analysis using continuum based on beam/shell finite elements", in Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells, springer-verlag, 1990.
- 16) 이 재욱, 양 영태, "대변위 및 대회전을 고려한 만곡된 쉘과 편심보강 평판의 비선형해석", 대한조선학회 추계 연구발표회, pp. 265-268, 1991.
- 17) Simo, J.C. and Fox, D.D., "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 72, pp. 267-304, 1989.
- 18) Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S., "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory: Computational aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 73, pp. 53-92, 1989.
- 19) Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S., "On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 79, pp. 21-70, 1990.
- 20) Simo, J.C and Taylor, R.L., "Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 48, pp. 101-118, 1985.
- 21) Marsden, J.E. and Hughes, T.J.R., Mathematical foundations of elasticity, Prentice-Hall,

회전장이 대변형 거동에 미치는 영향에 대한 고찰

Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

22) Washizu, K., Variational methods in elasticity and plasticity. 2ed. Pergamon Press, 1975.



