# 평균개념의 잠재 가격과 이의 안정성

조　　　성　　　철*

# Average Shadow Price and its Stability Analysis

Seong-Cheol Cho

**Abstract**

This paper concerns the concept of the average shadow price which has been recently developed. The average shadow price is a substitute for the traditional marginal shadow price. It is found to be useful for the decision making problems on the economic resources especially where the marginal analysis falls into drift because of nonconvexities found frequently in real world problems. This paper presents the average shadow price in pure integer programming context and. Some important stability properties of the averge shadow price have been described. proved to show that the values of the average shadow prices once computed are reliable within some extent of the data perturbations of the model.

## 1. 서　　론

지금까지 희소한 자원을 이용한 생산활동에 있어서 투입되는 자원에 대한 잠재 가격은 가용 자원이 현 위치에서 한 단위 증가 할 경우 이에 따르는 기업 이익의 순간적 변화율이라는 고전적인 한계분석을 통해 이해되고 정의되어 왔다. 이러한 분석은 현대적 의사 결정 모형의 전형인 선형계획모형에서 먼저 정의되고 해석되어 왔으며 [7, 8], 선형계획모형과 이의 잠재가격이 효율적 자원 배분에 시사하는 점을 발견하고 잘 해석한 공로로 노벨 경제학상이 [7, 8] 수여되기도 하였다.

이러한 한계 기여율로서의 잠재 가격은 즉각적으로 고전적인 경제학의 가정인 한계수익 체감의 법칙 등이 잘 적용되는 볼록 계획법 (convex programming) 분야에 [3, Chapter 4] 적용되었고, 이는 쿤-터커 승수와 (Kuhn-Tucker multiplier) [3, pp. 95～100] 동일시되었다. 이러한 한계 개념의 잠재 가격은 그러나 볼록성의 가정이 깨어지는 상황하에서는 의미 있는 경제적 해석을 내리기가 어렵

* 한국해양대학교 해운경영학부

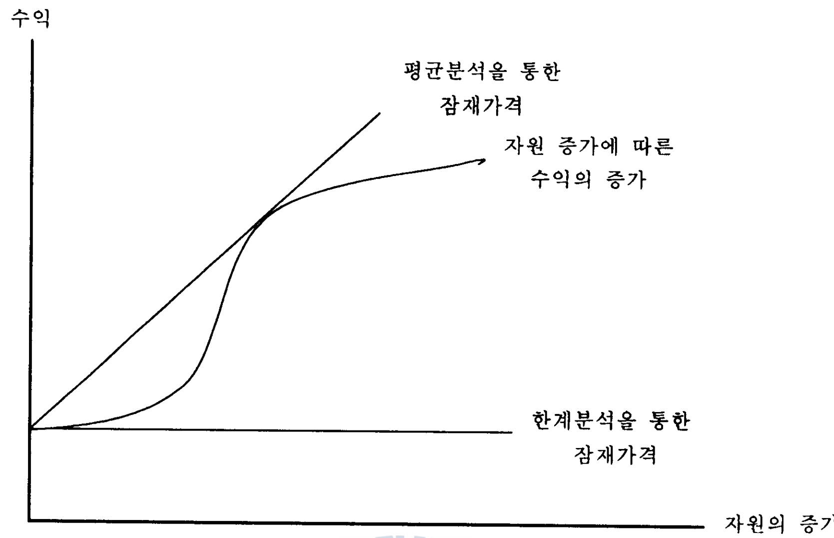

그림 1. 한계분석과 평균 분석

다. 말하자면 특정 자원이 한계 수익 체증의 형태를 부분적으로라도 보이는 경우에는 자원의 한계 가격이 주는 정보는 현실적 응용을 논의하기가 매우 어렵다는 것이다. 그림 1에서는 이러한 사실을 단적으로 보여 주고 있다. 부분적으로 한계 수익 체증이 나타나는 것은 현실에서 얼마든지 관찰되는 현상이다. 평균잠재가격이 소개되기 전까지는 블록계획법 이외의 수리계획모형에서도 잠재 가격들은 이러한 한계분석의 연장선 상에서만 [11, pp. 66~68 ; 10, pp. 65 – 66 ; 6] 다루어졌었다. 말하자면 최근에 개발된 평균잠재가격은 [4, 5, 8] 전통적인 한계 분석을 떠난 잠재가격의 개발을 위한 첫 시도였었다. 먼저 이는 정수계획모형을 (integer programming) 대상으로 [1, 8]소개되었고, 이 후 일반적인 수리계획법과 (mathematical programming) [2, 4] 혼합정수계획모형으로 (mixed integer programming) 일반화되어 [5] 소개되었다. 이의 개념과 정의, 도출 해법 [4, 8] 쌍대 이론과의 (duality theory) 관계 [2]등은 이미 발표된 몇 개의 논문을 통해 상세히 살펴 볼 수 있다.

이 논문은 이러한 평균 잠재가격이 갖는 유용성을 정수 계획 모형을 대상으로 다시 다룬다. 특히 경영의사결정자의 입장에서 이의 일반적 유용성을 설명하고, 이 잠재가격이 모형의 모수의 (parameter) 변동에 대해 안정적이라는 사실을 수학적으로 논증하는 것에 주안점을 두었다.

다음 제 2절에서는 정수계획모형에서의 잠재 가격을 정의하고, 관련된 성질 몇 가지와 이것이 경영의사결정에 시사하는 유용성을 중심으로 설명할 것이다. 제 3절에서는 이 논문의 주요 논점인 평균잠재가격의 안정성에 관련된 수학적 명제 및 증명을 시도한다. 마지막 제 4절에서는 논문을 다시 요약하고 앞으로의 연구 주제가 될 수 있는 점들을 논의하고 있다.

## 2. 평균잠재가격의 정의 및 유용성

이제 다음과 같은 정수계획모형으로 표현된 경영의사결정모형을 생각해 보자. 현재 $m$개의 가용자

원을 각각 $b_i$ $(i=1, m)$만큼 확보할 수 있는 조직이 이를 이용하여 $n$개의 (생산) 활동을 수행하는 경우를 생각해 보자. $c_j$를 각 활동으로 얻을 수 있는 단위 당 수익 (혹은 이익) 이라고 하자. 각 활동의 수준이 오직 정수로만 표현될 수 있을 경우, 최대 이익을 추구하는 경영자의 의사결정모형은 다음과 같은 정수계획모형($P_b$)로 표현할 수 있다. 이 모형에서 각 자원들에 대한 한계수익 체감의 법칙 등 고전적인 미시 경제학의 가정이 깨어지는 이유는 각 활동 수준 $x_j$가 정수 값만을 갖는 모형이기 때문이다.

$$(P_b) \qquad \max\{cx \mid Ax \leq b, x \in X\}$$

앞으로의 논의를 위해 다음과 같은 정의와 가정, 기호를 사용하기로 하자.

(정의 1) 점 $b$에서 반경 $\delta(>0)$인 $b$의 주변 (neighborhood) $B(b, \delta)$를 아래의 집합으로 정의한다.

$$B(b, \delta)=\{d \in R^m \mid \| d-b \| < \delta\}, \text{ 단 } \| d-b \| = \sqrt{(d_1-b_1)^2+\cdots+(d_m-b_m)^2}$$

(가정 1) 위의 모형 ($P_b$)는 $b$의 적절한 주변 (neighborhood)에서 실행 가능해를 (feasible solution) 갖는 다고 가정한다. (즉 적절한 $\delta$에 존재하여 임의의 $d \in B$에 대해 모형 ($P_d$)가 실행 가능해를 갖는다.)

(가정 2) 집합 $X=\{x \in R^n \mid Hx \leq h, x \geq 0, \text{정수}\}$는 분석의 편의상 – 그러나 실제적 유용성을 잃지 않으면서 – 공집합이 아닌 유한 집합이라고 (finite set) 가정한다. 이 $X$에서 정수 제약을 없앤 집합을 $\overline{X}$로 정의하기로 하자. 즉 $\overline{X}=\{x \in R^n \mid Hx \leq h, x \geq 0, \text{정수}\}$로 정의하기로 하자.

(가정 3) 각 자원 $i$에 대해 집합 $X_i$를 아래와 같이 정의한다. 이는 경영자가 자원 $i$의 확장 혹은 처분을 위한 판단을 위해 자주 고려하게 되는 집합이다.

$$X_i=\{x \in X \mid a_j x \leq b_j, \text{j}=1, \cdots, m, j \neq i\}$$

(가정 4) $c=(c_1, \cdots, c_n)$,즉 각 활동의 수익 (또는 순이익) 벡터, $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, 즉 가용 자원량을 표시하는 벡터이다. 편의상 $c$를 정수 벡터로 가정한다. 현실적으로 이는 유리수일 수 있으나 이 경우 언제나 충분히 큰 정수를 이에 곱하여 $c$를 정수로 전환하는 것이 가능하므로 이 가정은 현실적으로 무리가 없는 가정이라고 할 수 있다.

(가정 5) $A=(a_{ij})$는 $m \times n$ 행렬, $a_{ij}$는 활동 $j$를 한 단위 수행하는데 소요되는 자원 $i$의 양을 나타낸다.

이제 경영자가 가용 자원을 추가적으로 확보하는 문제를 고려하고 있다고 하자. 각 가용 자원의 양이 $d_1, \cdots, d_m$으로 주어져 있을 경우의 경영자가 얻을 수 있는 최대 이익을 최대이익함수로 아래와 같이 정의하기로 하자.

(정의 2) 가용자원 $d=(d_1, \cdots, d_m)$에 대한 최대이익함수 $z(d)$를

$$z(d)=\max\{cx \mid Ax \leq d, x \in X\}$$

로 정의하기로 하자. 비슷하게 $\overline{z(d)}$를 $\overline{z(d)}=\max\{cx \mid Ax\le d, x\in\overline{X}\}$로 정의하기로 하자.

이제 경영자가 현재의 가용 자원량 $b$에서, 다른 자원은 그대로 둔 채로 자원 $i$에 관해 추가적 확보를 고려하고 있는 경우를 고려해 보자. 경영자는 이의 추가적 확보가 자원의 확보 비용을 공제하고 추가적 순이익을 발생시킬 수 있을 것인가를 알고 싶을 것이다. 이제 $e_i$를 $i$번째 단위 벡터를 ($i$ - th unit vector) 의미한다고 하자. 자원 $i$를 $p$의 가격으로 $s(>0)$만큼 추가적으로 확보하는 경우 경영자는 이를 이용하여 추가적인 순이익을 $z(b+se_i)-z(b)-ps$만큼 기대할 수 있을 것이다. 이러한 의사결정의 기준으로 아래와 같은 자원에 관한 구매 평균잠재가격을 (buying shadow price) 정의할 수 있다.

(정의 3 [8]) 자원 $i$ 관한 구매 평균잠재가격 (buying average shadow price) $u_i$를 아래와 같이 정의한다.

$$u_i=\max\left\{\frac{z(b+se_i)-Z(b)}{s} \mid s>0\right\}$$

이 논문의 가정 하에서 위의 정의는 항상 유한한 값으로 발견되는 것을 쉽게 알 수 있다. 위의 $u_i$가 0인 경우 이 모형 내에서 자원 $i$를 자유재로 (free good [8]) 정의할 수 있다. 왜냐하면 이 사실은 임의의 자원 확보 $s$에 대해 항상 $z(b+se_i)=z(b)$임을 의미하기 때문이다. 즉, 아무리 많이 확보하여도 추가적 이익 확보 자체에 전혀 기여를 하지 않는 자원이라는 의미이다.

모형 (P)가 정수제약이 없는 일반적인 선형계획모형일 경우는 함수 $\overline{z(d)}$가 에 $d$대한 오목함수이므로 (concave function) [3, p.72] 이 경우 쉽게

$$\max\left\{\frac{\overline{z(b+se_i)}-\overline{z(b)}}{s} \mid s>0\right\}=\lim_{s\downarrow 0}\frac{\overline{z(b+se_i)}-\overline{z(b)}}{s}$$

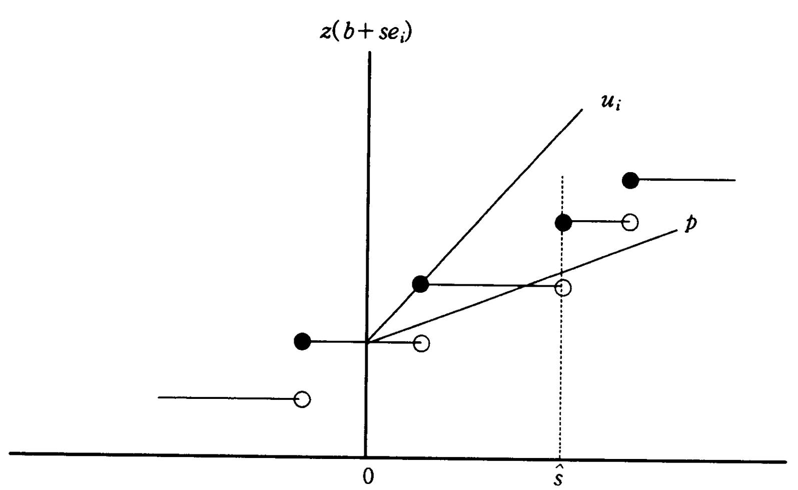


그림 2. 평균잠재가격과 최대이익함수

임을 알 수 있다. 즉 위의 평균잠재가격은 이런 면에서 고전적인 한계 개념의 잠재가격을 포함하는 일반적인 개념의 잠재가격이라는 것을 알 수 있다. 단 고전적인 한계분석을 정수계획모형에 적용할 경우 어떤 자원 $i$이든지 $\lim_{s \downarrow 0} \frac{z(b+se_i)-z(b)}{s}=0$이므로 고전적 한계 분석이 의미를 상실하게 된다. 그림 2는 이 사실을 직관적으로 설명한다. 고전적인 한계분석을 통해서는 모든 자원의 한계가치가 0임에도 불구하고, 경영자는 자원의 추가적 확보를 통해 추가적 순이익 확보를 기대할 수 있는 경우가 얼마든지 있다. 이제 아래의 정리를 통해 평균잠재가격이 갖고 있는 의사결정에의 유용성을 설명할 수 있다. 이의 증명은 정의 3으로부터 자명하게 도출된다.

(정리 1) 자원 $i$의 시장 가격 $p$가 정의 3의 $u_i$보다 작을 경우 자원의 추가적 확보를 통해 추가적 순이익을 얻을 수 있다. 즉 적절한 값 $\hat{s}$에 대해 $z(b+\hat{s}e_i)-z(b)-p\hat{s}>0$가 성립한다. 반대로 자원 $i$의 시장 가격 $p$가 $u_i$보다 클 경우 자원 $i$의 추가적 확보를 통해 추가적 순이익을 기대할 수 없다. 즉 임의의 $s(>0)$에 대해 $z(b+se_i)-z(b)-ps<0$이다.

대칭적으로 자원 $i$의 처분 혹은 판매에 관한 의사결정의 지표가 되는 잠재가격을 정의해 볼 수 있다.

(정의 4 [1, 4]) 자원 $i$에 관한 판매 평균잠재가격 (selling average shadow price) $u_i$를 아래와 같이 정의한다.

$$v_i=\min\left\{\frac{z(b+se_i)-z(b)}{s} \mid s<0\right\}$$

위의 $v_i$는 가정 1, 2에 의해 유한한 값을 갖게 된다. 정수제약 조건이 없는 경우 또한 함수 $\overline{z(d)}$가 오목함수이므로 구매 평균잠재가격의 경우와 같은 이치로 이는 고전적인 한계 개념의 잠재가격과 같게 된다. 즉 정의 4 역시 한계개념을 포함하는 일반적 개념이라고 볼 수 있다. 또한 자원의 처분에 관한 의사결정의 측면에서 역시 아래와 같은 결론을 얻을 수 있다. 이의 증명 역시 정의 4로부터 자명하다고 할 수 있다.

(정리 2) 자원 $i$의 시장 가격 $p$가 정의 4 의 $v_i$보다 클 경우 이 자원의 처분을 통해 추가적 순이익을 얻을 수 있다. 즉 적절한 처분량 $\tilde{s}$에 대해 $p\tilde{s}-\{z(b)-z(b-\tilde{s}e_i)\}>0$가 성립한다. 반대로 자원 $i$의 시장 가격 $p$가 $v_i$보다 작을 경우 자원 $i$의 처분을 통해 추가적 순이익을 기대할 수 없다. 즉 임의의 $s(>0)$에 대해 $ps-\{z(b)-z(b-se_i)\}<0$이다.

종합적으로 정리 1, 2를 통해 평균잠재가격 $u_i$, $v_i$를 알고 있을 경우 아래와 같은 유용한 자원에 관한 의사결정 기준을 사용할 수 있다.

<u>자원 추가 확보를 위한 의사결정 기준</u>

만일 자원의 시장가격이 구매 평균잠재가격 ($u_i$)보다 작으면 자원을 적절히 추가적으로 확보하라. 아니면 확보하지 말라.

자원 처분을 위한 의사결정기준

만일 자원의 시장가격이 판매 평균잠재가격 ($v_i$)보다 크면 자원을 적절히 처분하라. 아니면 처분하지 말라.

지금까지의 논의를 통해 평균잠재가격은 고전적인 한계 분석을 포함하면서도 한계분석이 아닌 일종의 평균분석을 통해 자원의 잠재가격을 제공한다는 점을 살펴보았다. 특히 이들이 각 자원의 추가적 확보나 처분 여부에 관한 경영자의 의사결정에 기준을 제공함을 설명하였다. 이런 의미에서 평균잠재가격을 정수계획모형 (P)에서 평가된 자원 $i$의 잠재가격이라고 할 수 있다. 이의 자세한 계산 절차와 보다 쉬운 상한 및 하한의 계산 방법, 균형가격과의 관계 등에 관한 내용을 논문 [1, 8]에서 찾아볼 수 있다.

## 3. 평균잠재가격의 안정성

전 절에서 정의된 평균잠재가격의 정확한 계산은 정수계획모형의 계산의 복잡성으로 인해 많은 계산량을 요구하는 경우가 많이 발생한다. 따라서 계산된 평균잠재가격이 각 계수들의 작은 변동으로 인해 안정성 없이 재계산을 요구할 만큼 변하게 된다면, 평균잠재가격의 실제적 유용성은 문제점을 갖게 된다. 왜냐하면 현실의 불확실성을 반영할 때 계산된 평균잠재가격의 정확성을 신뢰할 수 없기 때문이다. 이 절에서는 모형을 이루는 약간의 계수의 변동에 대해서는 계산된 평균 잠재 가격이 적절한 해집합과 관련된 조건이 만족될 경우 안정적이라는 사실을 논증한다.

이 절의 논의를 위해 다음과 같이 필요한 용어를 정의한다.

(정의 5) 임의의 자원 $i$에 대해 만일 $z(b+se_i)<z(b+\hat{s}e_i)$의 관계식이 어떤 값 $\hat{s}$에 대해(임의의 $s<\hat{s}$에 대해)성립하면 이 값 $\hat{s}$를 자원 $i$의 임계값이라고 (critical value) 정의한다. 자원$i$에 관한 모든 임계값들의 집합을 $C_i$로 나타내기로 하자.

전 절에 설명한 모형의 가정 1로부터 모든 자원$i$에 대해 $C_i=\phi$이며, 가정 1, 2로부터 각 자원은 유한개의 임계값을 갖게됨을(즉, $|C_i|<\infty$) 알 수 있다. 그림 2는 전형적인 최대이익함수 $z(b+se_i)$의 모양을 자원 $i$의 임계값과 함께 예시해 주고 있다.

(정리 3, [1, 8]) 자원 $i$의 임계값들의 집합 $C_i$에 대해 평균잠재가격 $u_i, v_i$는 아래의 관계식에 의해 도출할 수 있다.

$$u_i=\max\left\{\frac{z(b+se_i)-z(b)}{s} \mid s>0,\ s\in C_i\right\}$$

$$v_i=\min\left\{\frac{z(b+se_i)-z(b)}{s} \mid s<0,\ s\in C_i\right\}$$

(정의 6) 아래와 같이 집합을 정의하기로 하자.

$F_i(A,d)=\{x\in X \mid a_i x \leq = d_i\}$ (단 $a_i$는 행렬 $A$의 $i$번째 행을 의미한다.)

$m_i(A,d)=\max\{a_i x \mid x\in F_i(A,d)\}$

$I(A,d)=\{i \mid m_i(A,d)=d_i\}$

### 3.1. 가용자원량 $b$에 대한 안정성 분석

이 절에서는 적절한 가정 하에서 평균잠재가격이 $b$주변에서 연속함수임을 보인다. 이를 위해 평균잠재가격을 $b$주변에서 우변항 $d$의 함수로 파악하기로 하자. 즉

$$u_i=f_i(d),\ v_i=g_i(d)$$

의 함수로 파악해 보자.

(보조정리 4) 임의의 $i$에 대해 $m_i(A,b)<b_i$가 성립한다고 가정하자. 그러면 적절한 양수 $\varepsilon$이 존재하여, 만일 $d\in B(b,\varepsilon)$이면, 임의의 $i$에 대해, $F_i(A,d)=F_i(A,b)$이고 $m_i(A,d)<d_i$가 성립한다.

(증명) 이제 $\varepsilon_i=\min[b_i-m_i(A,b),\ \min\{a_i x \mid x\in X,\ a_i x>b_i\}]$로 정의하자. 그러면 $\varepsilon_i>0$이다. 또한 $\varepsilon=\min_i\varepsilon_i$로 정의하면 이 $\varepsilon$에 대해 위의 성질이 만족된다.

(정리 5) 만일 임의의 $i$에 대해 $m_i(A,b)<b_i$가 성립하면

(1) 구매 평균잠재가격 $u_i=f(d)$는 $b$에서 연속함수(continuous at $b$)이다.

(2) 또한 $b$주변에서 판매 평균잠재가격의 값은 0이다.

(증명) 보조정리 3의 $\varepsilon$을 생각해보자.

(1) 먼저 자원 $i$가 자유재인 경우 $d\in B(b,\varepsilon)$를 만족하는 임의의 $d$에 대해 만들어진 모형 $(P_d)$에서 자원 $i$가 여전히 자유재임을 알 수 있다. 따라서 $f_i(d)=0$이므로 $u_i$는 $b$에서 상수함수인 연속함수이다. 자원 $i$가 자유재가 아닐 경우 정리 3으로부터

$$f_i(b)=\max\left\{\frac{z(b+se_i)-z(b)}{s} \mid s>0,\ s\in C_i\right\}$$

이므로 새로운 구매 잠재가격 $u_i=f_i(d)$는

$$\begin{aligned} f_i(d)&=\max\left\{\frac{z(b+\tilde{s}e_i)-z(b)}{\tilde{s}} \mid \tilde{s}=s-(di-bi),\ s>0,\ s\in C_i\right\}\\ &=\max\left\{\frac{z(b+\tilde{s}e_i)-z(b)}{\tilde{s}} \mid \tilde{s}=s-(di-bi),\ s>0,\ s\in C_i\right\}\\ &=\max\left\{\frac{z(b+se_i)-z(b)}{\tilde{s}} \mid \tilde{s}=s-(di-bi),\ s>0,\ s\in C_i\right\}\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 임의의 주어진 양수 $\delta$에 대해 만일 충분히 작게 $\varepsilon$를 잡았다면, 임의의 양수의

$s \in C_i$에 대해

$$\left| \frac{z(b+se_i)-z(b)}{\tilde{s}} - \frac{z(b+se_i)-z(b)}{s} \right| < \varepsilon$$

이고 따라서 $|f(d)-f(b)| < \varepsilon$이 만족된다.

(2) 임의의 $d \in B(b, \varepsilon)$에 대해 $z(d)=z(b)$이고, $(P_d)$의 최적해 $x^*$에 대해 $Ax^* < d$가 성립하므로 정의 4로부터 모든 자원 $i$에 대해 $v_i=0$이 성립한다.

이제 보다 가정을 완화하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(정리 6) 만일 $I(A,b) \neq \phi$이면, 임의의 양수 $\delta$에 대해 적절한 양수 $\varepsilon$이 존재하여 다음과 같은 성질을 만족한다 : 만일 $d \in B(b, \delta)$이고, 임의의 $i \in I(A,b)$에 대해 $d_i=b_i$이면

(1) 임의의 자원 $i \in I(A,b)$에 대해 $u_i, v_i$의 평균잠재가격은 변하지 않는다.

(2) 임의의 자원 $k \notin I(A,b)$에 대해 $|f_k(d)-f_k(b)| < \delta$이고 $g_k(d)=g_k(b)=0$이다.

(증명) 보조정리 4를 다시 적용하면 임의의 $i \in I(A,b)$에 대해 $d_i=b_i$이고 $d \in B(b, \varepsilon)$이기만 하면, 임의의 $k \notin I(A,b)$에 대해 $F_k(A,d)=F_k(A,b)$이고 $m_k(A,d) < d_k$가 성립하는 양수 $\varepsilon$이 존재한다. 이제 이 양수 $e$을 생각하여 보자.

(1) 그러면 임의의 실수 $s$에 대해 $z(d+se_i)=z(b+se_i)$가 성립하므로, 위의 결론은 평균잠재가격의 정의로부터 자명하다.

(2) 정리 5의 (1)의 증명 과정과 같은 추론에 의해 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

이상 논의에 의해 적절한 가정 하에서 평균잠재가격이 작은 우변의 변동에 대해 (작은 가용 자원량의 변동에 대해) 연속함수의 성격을 갖는 안정성을 가짐을 논증하였다.

### 3.2 기술계수 A의 변동에 대한 안정성

이 절의 분석을 위해 평균잠재가격을 현재의 기술계수행렬 $A=(a_{ij})$의 주변에서 이 기술계수들 $a'_{ij}$의 함수로 표현해 보자. 즉

$$u_i=f_i(a'_{11}, a'_{12}, \cdots, a'_{mn})=f_i(a'_1, \cdots, a'_m)$$
$$v_i=g_i(a'_{11}, a'_{12}, \cdots, a'_{mn})=g_i(a'_1, \cdots, a'_m)$$

로 표현해 보기로 하자. 이 절에서의 편의를 위해 $a'=(a'_1, \cdots, a'_m)$이라고 정의해 보자.

(보조정리 7) 임의의 $i$에 대해 $m_i(A,b) < b_i$가 성립한다고 하자. 그러면 적절한 양수 $\varepsilon$이 존재하여 임의의 $a' \in B(a, \varepsilon)$과, 임의의 $i$에 대해, $F_i(A',b)=F_i(A,b)$이고 $m_i(A',b) < b_i$가 성립한다.

(증명) 함수 $a_i \mapsto a_i x$가 선형함수이며, 따라서 연속함수이므로, 또한 집합 $X$가 유한개의 정수벡터로

구성된 집합이므로 이 성질을 이용하여 원하는 양수 $\varepsilon$의 존재가 증명된다.

(정리 8) 만일 임의의 $i$에 대해 $m_i(A,b)<b_i$가 성립하고, 임의의 양수의 임계값 $\hat{s}\in C_i$에 대해 이에 대응하는 해 $x\in X_i$가 유일하게 존재한다면, 즉 $a_ix-b_i=\hat{s}$가 오직 한 $x\in X_i$에 대해 성립할 경우,

(1) 구매 잠재가격 $u_i$는 $a$에서 연속함수이다.

(2) 또한 적절한 양수 $\varepsilon$에 대해 만일 $a'\in B(a,\varepsilon)$이면 $v_i=g_i(a')=0$이 성립한다.

(증명) 보조정리 7의 양수 $\varepsilon$을 생각해 보자.

(1) 만일 자원 $i$가 자유재이면 모형 $(P_b)$가 새로운 행렬 $A'$ 하에서도 자원 $i$를 자유재로 도출하므로 $u_i=0$이 유지되어 상수함수로서 연속함수임을 알 수 있다. 자원 $i$가 자유재가 아닌 경우 임계값에 대응하는 해 $x\in X_i$가 유일하다는 전제와, 양수의 임계값의 개수가 유한하다는 사실로부터 $\varepsilon$을 충분히 작게 잡았을 경우 동일한 해에서 임계값을 갖게 된다는 점을 알 수 있다. 나머지는 정리 5를 증명할 때와 유사한 추론을 통해 함수 $f_i(a')$이 $a$에서 연속임을 알 수 있다.

(2) 임의의 최적해 $x^*$에서 $A'x^*<b$가 성립하므로 자명하다.

이제 위의 정리를 보다 완화된 가정에서 논의하면 다음과 같다.

(정리 9) 만일 $I(A,b)\neq\phi$이고 임의의 양수의 임계값 $\hat{s}\in C_i$에 대해 이에 대응하는 해 $x\in X_i$가 유일하게 존재한다면, 즉 $a_ix-b_i=\hat{s}$가 오직 한 $x\in X_i$에 대해 성립하면, 임의의 양수 $\delta$에 대해 다음과 같은 성질을 만족하는 양수 $\varepsilon$이 존재한다 : 만일 임의의 $i\in I(A,b)\neq\phi$대해서 $a'_i=a_i$이고, $a'\in B(a,\varepsilon)$이면

(1) 임의의 $i\in I(A,b)$대해서 $f_i(a')=f_i(a)$이고, $g_i(a')=g_i(a)$이다. 즉 평균잠재가격이 변하지 않는다.

(2) 만일 $k\in I(A,b)$이면 $|f_i(a')-f_i(a)|<\delta$이고, $g_i(a')=0$이다.

(증명) 보조정리 7을 다시 적용하면 적절한 양수 $\varepsilon$이 존재하여, 만일 임의의 $i\in I(A,b)$ 대해서 $a'_i=a_i$이고, $a'\in B(a,\varepsilon)$이면, 임의의 $k\notin I(A,b)$에 대해, $F_k(A',b)=F_k(A,b)$이고 $m_k(A',b)<b_k$가 성립함을 알 수 있다. 이제 이 양수 $\varepsilon$과 $a'$을 사용하여 보자.

(1) 그러면 정리 6의 (1) 의 증명과 같은 맥락에서 평균잠재가격이 불변임을 알 수 있다.

(2) 정리 8 (1) 의 증명과 유사한 추론을 통해 쉽게 결론에 도달할 수 있다.

결국 기술계수를 이루는 행렬 $A$의 작은 변동에 대해서도 적절한 가정 하에 평균잠재가격이 연속함수적인 안정성을 갖고 있음을 논증하였다.

### 3.3 목적함수 계수 $c$에 대한 안정성 분석

목적함수의 계수 $c$는 각 활동의 단위당 수익을 의미한다. 이제 현재의 계수 $c$주변에서 목적함수계수 $c'$의 함수로 평균잠재가격을 표현해 보기로 하자.

$$u_i=f_i(c'_1,\cdots,c'_n)=f_i(c'),\ v_i=g_i(c'_1,\cdots,c'_n)=g_i(c')$$

먼저 평균잠재가격은 목적함수 계수의 함수로서 이들의 1차 동차 함수임을 (positively homogeneous of degree 1) 아래와 같이 논할 수 있다.

(정리 10) 평균잠재가격은 목적함수 계수에 대해 1차 동차 함수이다. 즉 임의의 양수 $\alpha$에 대해 $f_i(\alpha c)=\alpha f_i(c)$이고, $g_i(\alpha c)=\alpha g_i(c)$임이 성립한다.

(증명) 임의의 양수 $t$와 $C_i$의 최소값 이상인 임의의 $s$에 관해

$$\begin{aligned}&\max\{tcx \mid x\in X_i,\ a_ix\le b_i+s\}\\ =&\,t\max\{cx \mid x\in X_i,\ a_ix\le b_i+s\}\\ =&\,tz(b+se_i)\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 평균잠재가격의 정의로부터 자명하게 도출된다.

위에서 보인 1차 동차성은 각 활동의 단위당 수익과 평균잠재가격 사이에 비례관계가 성립하고 있음을 알려준다. 예를 들어 모든 활동의 단위당 수익이 2배로 되면 평균잠재가격도 두 배로 평가되는 바람직한 성질을 갖고 있는 것이다.

(정리 11) 만일 임의의 $s$에 대해 $\max\{cx \mid a_ix\le b_i+s,\ x\in X_i\}$가 최적해가 존재할 경우 항상 유일한 최적해가 존재한다면, 평균잠재가격 $u_i=f_i(c')$, $v_i=g_i(c')$은 $c$에서 연속함수이다.

(증명) 임의의 임계값 $\hat{s}$에 대해 $\max\{cx \mid a_ix\le b_i+\hat{s},\ x\in X_i\}$의 유일한 최적 해를 $x(\hat{s})$라고 해보자. 임계값의 수는 유한하고 임의의 두 개의 이웃하는 임계값 $s_1, s_2$에 대해 $x(s_1)$이 임의의 $s\in[s_1, s_2)$에 의해 정의된 $\max\{cx \mid a_ix\le b_i+s,\ x\in X_i\}$의 유일한 최적 해이므로, 적절한 양수 $\varepsilon$에 대해 만일 $c'\le B(c,\varepsilon)$이면 임계값과 최적해가 그대로 유지되는 $\varepsilon$이 존재한다. 현재의 $(s=0)$ 최적 해를 $x^0$라고 정의하자. 그러면 또한 임의의 주어진 양수 $\delta$에 대해 이 $\varepsilon$을 충분히 작게 잡아 주면, 모든 임계값 $\hat{s}$에서

$$\left|\frac{c'\hat{x}-c'x^0}{\hat{s}}-\frac{c\hat{x}-cx^0}{\hat{s}}\right|<\delta$$

가 성립한다. 따라서 정리 3에 의해 $|f_i(c')-f_i(c)|<\delta$, $|g_i(c')-g_i(c)|<\delta$가 성립함을 알 수 있다. 이로써 $c$에서의 연속성이 증명된 것이다.

종합적으로 평균잠재가격은 이 절에서 전제한 해집합의 구조에 대한 적절한 가정 하에서 모형의 계수들의 작은 변동에 대해 값이 급격하게 변하지 않으며, 현재의 계수들의 값에서 이들에 대해 연속함수적인 성격을 갖고 있음을 논증하였다.

## 4. 결　　론

이 논문에서는 경영의사결정의 관점에서 새롭게 개발된 평균잠재가격을 정수선형계획을 대상으

로 논의하였다. 이는 기존의 한계분석을 벗어난 새로운 시도이지만 고전적인 미시경제학의 가정이 적용되는 상황하에서는 전통적인 한계분석과 일치하는 일반성도 갖고 있다는 점을 설명하였다.

이 논문의 주 내용은 평균잠재가격의 안정성을 논증하는 것인데 이는 한번 계산된 평균잠재각격의 신뢰성을 위해 매우 중요한 주제이다. 이를 위해 모형을 이루는 계수들을 가용 자원량에 해당하는 우변항과 ($b$), 경영의 기술을 나타내는 계수인 기술 계수 행렬 $A$, 그리고 각 활동의 단위당 수익 혹은 이익을 표현하는 목적함수의 계수 $c$의 셋으로 크게 나누고 각각의 작은 변동에 대한 평균잠재가격의 안정성을 논증하였다. 제 3절에서 제시한 적절한 가정이 만족되는 상황하에서는 이 계수들의 작은 변동에 대해 평균잠재가격이 그대로 유지되거나, 또는 계수들의 연속함수가 된다는 것을 논증하여 안정성을 설명하였다. 전제한 가정들의 주 내용은 모형의 해들이 현재의 계수들에 대해 대개 내점들이어야 (interior points) 한다는 것이다. 물론 이는 선형계획모형의 상황이라면 현실적으로 무리한 가정이다. 그러나 여기서는 정수계획모형을 대상으로 다루었으므로 의사결정의 이산성으로 인하여 이 논문에서 가정한 것들은 실제로 자주 발생하는 것들이다.

이 논문에서는 모든 제약식들에 대해 등식으로 만족되는 정수의 실행가능해가 존재하는 경우는 다루지 않았다. 정수계획모형의 이산성과 계산적 어려움 때문에 이 경우의 안정성 분석은 보다 많은 연구를 요구하는 것으로 판단된다. 이는 앞으로 지속적으로 연구할 수 있는 과제 중 하나라고 할 수 있다.

또한 이 논문에서는 모든 계수들의 변동이 연속적으로 변하는 경우만을 상정하였다. 현실적으로 어떤 계수의 변동이 오직 이산적으로만 가능할 경우 – 예를 들면 추가적 자원의 확보는 계약에 의해 어떤 양 이상의 단위로만 구입할 수 있을 경우 – 이 논문의 안정성분석의 결과를 적용할 수 없다. 이 경우는 수학적으로 연속함수이외에의 다른 분석도구를 필요로 할 것이다. 또한 오늘날 정수계획모형의 해법이나 민감도 분석 도구에 관해 아직도 일반적으로 효율적인 것이 개발되지 않고 있는 만큼 미래의 과제로 남겨두되 선결해야 할 적지 않은 난제들을 남겨 두고 있다.

## 참 고 문 헌

[1] 조성철, 정수선형계획법에서의 잠재가격에 관한 연구, 한국과학기술원 석사학위 논문 (1985).

[2] 조성철, 수리계획법에서의 새로운 쌍대이론에 대한 연구, 한국과학기술원 박사학위 논문 (1989).

[3] M. Avriel, *Nonlinear Programming : Analysis and Methods* (Prentice Hall, 1976).

[4] S. Cho and S. Kim, "Average Shadow Prices in Mathematical Programming". *Journal of Optimization Theory and Applications* 74 (1992) 57～74.

[5] A. Crema, "Average Shadow Prices in a Mixed Integer Linear Programming Problem". *European Journal of Operational Research* 85 (1995) 625～635.

[6] J. Gauvin, "Shadow Prices in Nonconvex Mathematical Programming". *Mathematical Programming* 19 (1980) 300～312.

[7] L.V. Kantorovich, "Mathematics in Economics : Achievements, Difficulties, Perspectives". *Mathematical Programming* 11 (1976) 204～211

[8] S. Kim and S. – C. Cho, "A Shadow Price in Integer Programming for Management Decision".

*European Journal of Operational Research* 37 (1988) 328～335.
[9] T.C. Koopmans, "Concepts of Optimality and Their Uses". *Mathematical Programming* 11 (1976) 212～228
[10] P.A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis* (Harvard University Press, 1948)
[11] W.I. Zangwill, *Nonlinear Programming : A Unified Approach* (Prentice-Hall, 1969)