

# 칼만 필터에 의한 船位의 精度改善에 관한 研究

尹 汝 政

The Studies on the Improvement of Accuracy  
of the Ship's Position by Kalman Filter

Yoon Yeojeong

目 次

Abstract	
Nomenclature	
第 1 章 序 論	
第 2 章 天測船位의 精度改善	第 4 章 誤差三角形에 있어서의 位置推定
2.1 칼만 필터	4.1 칼만 필터의 誤差三角形에의 適用
2.2 天測位置線의 數學的 모델化	4.2 最適位置와 內心, 傍心 및 類似重心과의 關係
2.3 칼만 필터를 天測位置 決定法에 適用하는 알고리즘	4.3 內心과 傍心の 判別
2.4 시뮬레이션 및 檢討	4.4 시뮬레이션 및 檢討
第 3 章 交叉方位法에 의한 船位의 精度改善	第 5 章 船位誤差에 관한 考察
3.1 非線型 칼만 필터의 特性	5.1 船位의 確率圓에 대한 理論的 考察
3.2 修正 非線型 칼만 필터의 構成	5.2 各種船位의 95% 確率圓
3.3 修正 非線型 칼만 필터의 航法에의 適用	5.3 眞位置와 推測位置의 差異로 인한 位置線의 誤差
3.4 시뮬레이션 및 檢討	第 6 章 結 論
	參 考 文 獻

### Abstract

This paper concerns the applications of the Kalman filter to navigation and the revisions of the extended Kalman filter. Methods to apply the Kalman filter to celestial fix, fix by cross bearing and cocked hat are proposed, and numerical simulations under various noise conditions are conducted. The accuracy of the optimal positions obtained by the Kalman filter is compared with that of the fixed positions by radial error method.

In the case of celestial fix, an algorithm to estimate the optimal positions by using the linear Kalman filter is presented. The optimal positions by the Kalman filter are compared with the running fixes and with the most probable positions obtained from a single line of position. It is confirmed that the results of the proposed method are more accurate than the others.

In practical piloting, bearings are generally measured intermittently and the measurement process is nonlinear. It is, therefore, difficult for us to apply the Kalman filter to fix by cross bearing. In order to be used in such an unfavorable case, the extended Kalman filter is revised and the applicability of the revised extended Kalman filter is checked by numerical simulation under various noise conditions.

In a cocked hat, an inside or outside fix is dependent only upon azimuth spread, if the error of each line of position is assumed to be equal both in magnitude and sign. A new technique of selecting a ship's position between an inside fix and an outside fix in a cocked hat by using fix determinant derived from the equation of three lines of position is also presented. The relations among the optimal position by Kalman filter, incentre(or excentre) and random error centre of the cocked hat are discussed theoretically and the accuracy of the optimal position is compared with that of the others by numerical simulation.

Finally, errors of optimal positions are compared with those of celestial fix and fix by cross bearing by radial error method, and the error of celestial line of position caused by the error of calculated azimuth is also checked.

## Nomenclature

In this paper,

- 1) Matrices are expressed by capital letters of English or Greek alphabet.
- 2) Vectors are expressed by small Gothic letters of English alphabet.
- 3) The point which minimizes the sum of square of the distance to each side of a cocked hat is designated as random error centre.

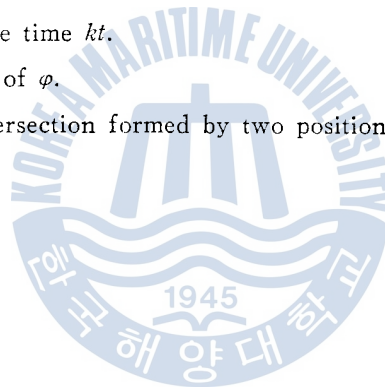
$A$	$3 \times 2$ observation matrix.
$a_k$	Altitude difference at the time $kt$ .
$\Delta a$	Altitude difference error.
$B$	$3 \times 3$ observation matrix.
$\mathbf{b}^T$	3-dimensional row vector.
$C$	Ship's course.
$D_{ex}$	Distance between true position and excentre of a cocked hat.
$D_i$	Distance between true position and incentre of a cocked hat.
$D_{ir}$	Distance between incentre (or excentre) and random error centre of a cocked hat.
$D_{fix}$	Error of the fixed position.
$D_{kal}$	Error of the estimated position by Kalman filter.
$D_r$	Distance between true position and random error centre of a cocked hat.
$d$	Systematic error.
$d_i$	Distance from incentre (or excentre) to each side of a cocked hat.
$d_0$	Initial value of $d$ .
$E[ \ ]$	Expected value operator.
$\mathbf{e}$	3-dimensional column vector whose each element is 1.
$\mathbf{e}_0$	2-dimensional column vector whose each element is 0.
$\mathbf{f}_k$	Vector function.
$G_k$	Filter gain matrix in Kalman filter.
$\mathbf{g}_k$	Vector function.
$H$	$2 \times 3$ observation matrix.
$H_k$	$m \times n$ observation matrix at the $k$ th sampling time.
$h$	Altitude of a celestial body.

$\mathbf{h}_i$	3-dimensional observation column vector at $i$ th time.
$I_n$	$n \times n$ identity matrix.
$k$	Sampling number.
$M_k$	Inversed matrix of $H_k$ .
$m$	$\sigma_2/\sigma_1$ ( $\geq 1$ ).
$N$	$2 \times 3$ matrix.
$P$	Covariance matrix of $\hat{\mathbf{x}}$ .
$P_0$	Covariance matrix of $\hat{\mathbf{x}}_0$ .
$P_1$	$P(3 0)$
$P_d$	Covariance matrix of $\mathbf{x}_d$ .
$P_e$	Covariance matrix of $\mathbf{p}_e$ .
$P_m$	Covariance matrix of $\mathbf{p}_m$ .
$P(i j)$	Covariance matrix of $\hat{\mathbf{x}}(i j)$ .
$\mathbf{p}_A$	$(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{e}$ , 2-dimensional vector.
$\mathbf{p}_e$	Maximum likelihood estimate of $\mathbf{x}$ .
$\mathbf{p}_i$	Coordinate vector of the incentre (or excentre) of a cocked hat.
$\mathbf{p}_m$	Coordinate vector of the intersection of two position lines.
$\mathbf{p}_r$	Coordinate vector of the random error centre of a cocked hat.
$Q$	Covariance matrix of $\mathbf{w}$ .
$q_{ij}$	Element of $Q$ .
$R$	Covariance matrix of $\mathbf{r}$ .
$R_0$	Radius of probable circle, radial error.
$R_c$	Radius of 95% probable circle, 95% radial error.
$R_s$	Covariance matrix of $\mathbf{r}_s$ .
$\mathbf{r}$	Measurement noise vector composed of $r_1, r_2, r_3$ .
$\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{21}$	Equivalent noise vector.
$r_k$	Measurement noise contained in $k$ th celestial fix.
$\mathbf{r}(k)$	Measurement noise vector contained in $k$ th observation.
$\mathbf{r}_s$	Measurement noise vector transformed to state vector.
$r_{vk}$	Measurement noise of velocity at the time $kt$ .
$r_\alpha, r_\beta$	Measurement noise of the bearing $\alpha, \beta$ of the objects respectively.
$s$	Distance between true position and DRP(or AP) in nautical miles.
$t$	Sampling time interval.

- $\Delta t$   $t/n$ .
- $\mathbf{u}_i$  Disturbance noise vector at the time  $i\Delta t$ .
- $u_{bi}$  Beam directional velocity noise.
- $u_{hi}$  Fore and aft directional velocity noise.
- $v_0$  Initial velocity.
- $v_k$  Velocity at the time  $kt$ .
- $v_k'$  Measured velocity at the time  $kt$ .
- $\mathbf{w}_0$  3-dimensional disturbance noise vector.
- $\mathbf{w}(k)$   $n$ -dimensional disturbance noise vector at the time  $kt$ .
- $X$  DRP's east-west-position error in nautical miles.
- $X_1, X_2$  Coordinate of latitude or longitude corresponding to  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  respectively.
- $x$  Difference of longitude between true position and DRP.
- $\mathbf{x}$  State vector composed of  $x, y$  or  $x, y, d$ .
- $x_0$  Initial value of  $x_k$ .
- $\mathbf{x}_0$  Initial value of  $\mathbf{x}$ .
- $\hat{x}_0$  Estimate of  $x_0$ .
- $\hat{\mathbf{x}}_0$  Estimate of  $\mathbf{x}_0$ .
- $\mathbf{x}_d$  3-dimensional column vector composed of  $p_i$  and  $d_i$ .
- $x_i$  Difference of longitude between DRP and the incentre (or excentre) of a cocked hat.
- $\mathbf{x}_i$  The transition of state vector caused by the disturbance noise vector until the time  $i\Delta t (< t)$ .
- $\hat{\mathbf{x}}(i|j)$  Optimal estimate of  $\mathbf{x}(i)$  by using the measurements up to the time  $jt$  ( $j \leq i$ ).
- $x_k$  Difference of longitude between true position and DRP at the time  $kt$ .
- $\mathbf{x}(k)$   $n$ -dimensional state vector at the time  $kt$ .
- $x_k(\alpha, \beta)$  Difference of longitude between true position and DRP computed by using  $\alpha_k$  and  $\beta_k$ .
- $\mathbf{x}_n$  The transition of state vector caused by the disturbance noise vector during sampling time.
- $x_r$  Difference of longitude between DRP and the random error centre of a cocked hat.
- $Y$  DRP's north-south-position error in nautical miles.

- $y$  Difference of latitude between true position and DRP.  
 $y_0$  Initial value of  $y_k$ .  
 $y_i$  Difference of latitude between DRP and the incentre (or excentre) of a cocked hat.  
 $y_k$  Difference of latitude between true position and DRP at the time  $kt$ .  
 $\mathbf{y}(k)$   $m$ -dimensional measurement vector when the measurement noise is 0.  
 $y_k(\alpha, \beta)$  Difference of latitude between true position and DRP computed by using  $\alpha_k$  and  $\beta_k$ .  
 $y_r$  Difference of latitude between DRP and the random error centre of a cocked hat.  
 $z_c$  Computed zenith distance of a celestial body.  
 $z_k$  Altitude difference obtained by  $k$ th observation.  
 $\mathbf{z}(k)$   $m$ -dimensional measurement vector.  
 $z_0$  Observed zenith distance of a celestial body.  
 $\mathbf{z}_s(k)$  Measurement vector transformed to the state vector.  
 $\alpha_k, \beta_k$  Observed bearing of the object at the time  $kt$  respectively.  
 $\Delta$  Fix determinant.  
 $\zeta_k$  Total error contained in  $k$ th observation.  
 $\theta_0$  Difference of azimuth between the two celestial bodies, which is less than  $\pi$ .  
 $\theta_d$  Difference of azimuth between the two celestial bodies except  $\theta_0$ .  
 $\theta_k$  Azimuth of the celestial body at the time  $kt$ .  
 $\Delta\theta$  Azimuth error.  
 $\lambda$  DR longitude.  
 $\lambda_0$  Initial DR longitude.  
 $\lambda_e$  Estimated longitude.  
 $\lambda_k$  DR longitude at the time  $kt$ .  
 $\sigma_0$  Standard deviation of the error of  $x_0$  and  $y_0$ .  
 $\sigma_1, \sigma_2$  The smaller is designated  $\sigma_1$  and the larger is designated  $\sigma_2$  of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$ .  
 $\sigma_a$  Standard deviation of the error of  $a_k$ .  
 $\sigma_b$  Standard deviation of  $u_{bi}$ .  
 $\sigma_{d_0}$  Standard deviation of the error of  $d_0$ .  
 $\sigma_h$  Standard deviation of  $u_{hi}$ .

- $\sigma_r$  Standard deviation of the random error contained in altitude difference.
- $\sigma_v$  Standard deviation of velocity error.
- $\sigma_{v_0}$  Standard deviation of the error of  $v_0$ .
- $\sigma_x, \sigma_y$  Standard deviation of longitude and latitude error of estimated(or fixed) position respectively.
- $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$  Standard deviation of  $x_0$  and  $y_0$  respectively.
- $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}$  Covariance of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  respectively.
- $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}$  Standard deviation of the error of  $\alpha_k$  and  $\beta_k$  respectively.
- $\Phi_z$   $n \times n$  transition matrix.
- $\varphi$  DR latitude.
- $\varphi_0$  Initial DR latitude.
- $\varphi_e$  Estimated latitude.
- $\varphi_k$  DR latitude at the time  $kt$ .
- $\hat{\varphi}$  Optimal estimate of  $\varphi$ .
- $\psi$  The angle of intersection formed by two position lines.



## 第1章 序 論

船舶이나 航空機에 있어서 가장 理想的인 位置決定法은 測定時機와 場所의 制約을 받지 않고 簡便한 方法으로 高精度의 位置를 決定하는 것이다.

그러나 아직은 이와 같은 條件을 모두 具備한 方法이 없기 때문에 現在 利用되고 있는 位置決定法은 多樣하다.

電波航法에 있어서는 주로 Decca, Loran C, Omega, NNSS 中에서 둘 이상을 結合시켜 測定時機나 場所에 따른 制約이나 精度面에서 相互間의 缺點을 補完하는 方式이 採擇되고 있다.<sup>1,2)</sup>

또한 天測位置 決定法은 高度와 方位의 計算에 時間과 勞力이 消費되는 것을 障害要因으로 指摘할 수 있는데, 近年에 天測曆 販賣部數의 增加 趨勢와<sup>3)</sup> 綿森<sup>4)</sup>의 調査로 미루어 보아도 그 信賴性和 確實性때문에 如前히 位置決定의 重要한 手段으로 利用되고 있음이 確實하다.

最近에는 天測計算에 計算機를 活用하는 研究가 活潑하게 進行되고 있는데,<sup>5,6,7,8)</sup> 航海專用的 計算機의 開發은 計算에 所要되는 勞力의 輕減은 勿論이고 位置의 精度向上에도 도움이 된다. 正確한 位置를 決定하기 위해서는 무엇보다도 位置測定裝置의 精度를 改善할 必要가 있다. 그런데 어느 程度 技術의 完成된 裝置의 測定精度를 向上시키는 일은 容易하지 않으므로 소프트 웨어의인 精度改善 方法을 卽하는 것이 바람직하다고 생각된다.

칼만(Kalman)은 1960년에 現在の 測定値와 過去の 測定値를 모두 다 利用하여 精度 높은 推定値를 求하는 알고리즘을 提案하였는데 이를 칼만 필터라 한다.

이 칼만 필터(Kalman filter)<sup>9,10)</sup>는 測定値로부터 不偏倚最小自乘推定値를 求하는 한 가지 方法으로서 現在の 推定値를 決定함에 있어서 過去の 情報를 全部 活用하기 때문에 現在の 測定値가 不正確한 경우라도 推定値의 精度가 改善되어가는 利點이 있다. 그러므로 航海와 關聯되는 分野만 보더라도 人工衛星航法,<sup>11)</sup> 慣性航法,<sup>12)</sup>  $\rho$ - $\rho$ 航法,<sup>13)</sup> 總合航海方式(total navigation system)<sup>14)</sup> 및 船舶의 最適航路決定<sup>15)</sup> 등 多方面에 이 필터를 應用하려는 研究가 오래前부터 活潑히 이루어져 왔다.

從來 船舶이나 航空機에 있어서 各種 方法으로 求한 位置는 그 것을 얻은 그 時刻에 對한 것일 뿐 그 以後에는 別로所用이 없는 것으로서 取扱되어 왔다. 萬一 그 以前에 얻은 正確한 船位를 그 以後의 位置決定에 情報로 活用할 수 있다면 적어도 現在の 測定이 極히 不良하여 精度가 낮은 位置를 얻을 수 밖에 없는 경우에는 大端히 有利한 것이 確實하다. 이런 理由로 最近에는 이 칼만 필터를 在來의 航法에 適用하려는 몇몇 研究가 이루어



지고 있는 것을 볼 수 있다.<sup>16,17,18)</sup>

西<sup>16,17)</sup>는 船位를 座標原點으로부터 x,y軸 方向의 距離로 나타내고 x, y軸 方向의 距離 및 速度의 測定値로부터 線型 칼만 필터를 利用하여 船位 및 速度를 推定하는 方法,<sup>19)</sup> 物標으로부터의 距離와 各 座標軸方向의 速度에 對한 測定値로부터 非線型離散 칼만 필터를 利用하여 最適船位 및 速度를 推定하는 方案<sup>20)</sup>을 提示하였으므로 井濶<sup>21)</sup>는 칼만 필터를 天測에 應用하여 最適船位를 推定할 수 있는 可能性을 示唆하고 있다. 그러나 西나 井濶의 方法은 칼만 필터를 各 物標로부터의 距離에 依한 位置決定法이나 天測位置決定法이 利用할 수 있는 初步적인 研究로서 實用에는 未洽하다.

本 研究에서는 天測 및 方位測定에 依한 位置決定法이 線型 및 非線型 칼만 필터를 適用함으로써 보다 眞位置에 가까운 推定位置(이를 最適位置라 부르기로 한다.)를 求하는 方法을 具體적으로 提示하며, 아울러 實際에 가까운 경우를 假想한 시뮬레이션을 通하여 이 方法의 實用性을 確認하고 船位의 精度改善과 航法의 電算化에 寄與하고자 한다.

本 論文의 第1章은 序論이고 第2章에서는 天測에 依한 位置決定에 칼만 필터를 適用하는 方法에 關해서 考察하고, 井濶의 方法을 改善함으로써 精度가 높고 實用性이 있는 最適位置 推定 알고리즘을 提示하며 第3章에서는 測定過程이 非線型인 方位測定에 依한 位置決定에 修正 非線型 칼만 필터를 適用함으로써 最適位置를 推定하는 알고리즘을 提示한다. 第4章에서는 誤差三角形에 있어서의 位置決定에 칼만 필터를 適用하여 얻은 最適位置와 從來의 方法인 內心, 傍心 또는 類似重心을 船位로 定한 것과 比較 檢討하며, 各 章마다 實際적인 경우를 假想하여 시뮬레이션을 行하고 그 結果를 檢討하며, 第5章에서는 第2,3,4 章의 시뮬레이션 結果 나타난 船位誤差를 誤差圓方式에 依하여 考察하고 第6章 結論에서는 本 論文에서 研究한 結果를 綜合적으로 分析하여 檢討하는 것으로 한다.

## 第 2 章 天測船位의 精度改善

通常 船舶의 現在位置를 알기 爲해서는 두 줄 以上の 位置線이 觀測되어야 하는데 各 位置線에는 測定誤差가 包含되게 마련이므로 그들의 交點을 眞位置로 보기는 어렵다. 天測의 境遇에도 例外일 수 없어서 하나 또는 그 以上の 天測位置線을 얻었을 때 最近似 位置를 求하는 問題는 오래 課題이다.

最近에 DeWit<sup>19)</sup>는 어느 時刻에 얻은 多數의 天測位置線으로부터 最尤推定法에 依하여 船位를 決定하는 方法을, Morrison<sup>20)</sup>은 最小自乘法을 利用하여 船位를 決定하는 方法을 提示하고 있다.

또한 井濶<sup>21)</sup>는 칼만 필터를 天測에 應用하여 最適位置를 求하는 方案을 提示하고 있는데 그는 推測位置로부터 推測位置의 子午線과 位置線과의 交點에 이르는 距離에 測定雜音이

附加된 것을 測定値로하고 位置線을 세 個로 限定, 이들을 一定時間 間隔으로 測定하는 것으로 하여 轉位操作이 正確히 이루어지고 있으나 測定雜音이 있는 때와 없는 때 및 轉位操作이 不正確하고 測定雜音이 없는 때의 세 가지 境遇에 對하여 시뮬레이션을 行함으로써 칼만 필터로 推定한 船位의 性質을 考察하고 있다. 그러나 이는 制限的인 方法으로서 實用上 問題가 있고 다만 天測位置決定法에 칼만 필터를 適用할 수 있는 可能性을 示唆하였을 뿐이다.

本章에서는 天測에 依한 位置決定에 칼만 필터를 適用하여 精度 높은 船位, 船速 및 系統誤差를 推定하는 包括的이고 具體的인 方法을 提示하고 實際로 일어날 수 있는 여러가지 境遇를 假想하여 시뮬레이션을 行함으로써 本 方法의 實効性を 檢討하기로 한다.<sup>21)</sup>

## 2.1 칼만 필터

本 研究는 칼만 필터를 航法에 適用함으로써 測定船位의 精度를 改善하려는 것이므로 于先 칼만 필터의 概略을 紹介하기로 한다.<sup>9,10)</sup>

信號過程과 測定過程이 各各式(2.1)과 式(2.2)와 같이 주어진 경우를 생각하자.

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_k \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\mathbf{z}(k) = H_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k) \dots \dots \dots (2.2)$$

단,  $\mathbf{x}(k)$ : 時刻  $kt$ 에 있어서의 狀態벡터( $n$ 次元)이며  $k$ 는 測定番號,  $t$ 는 測定 時間間隔

$\Phi_k$ : 時刻  $kt$ 에 있어서의 遷移行列( $n \times n$ )

$\mathbf{w}(k-1)$ : 時刻  $(k-1)t$ 에 있어서의 平均值가 0인 信號雜音(外亂)벡터( $n$ 次元)

$\mathbf{z}(k)$ : 時刻  $kt$ 에 있어서의 測定値벡터( $m$ 次元)

$H_k$ : 時刻  $kt$ 에 있어서의 測定値行列( $m \times n$ )

$\mathbf{r}(k)$ : 時刻  $kt$ 에 있어서의 平均值가 0인 測定雜音벡터( $m$ 次元)

$$E[\mathbf{w}(k-1)\mathbf{w}(k-1)^T] = \mathbf{Q} \quad (n \times n)$$

$$E[\mathbf{r}(k)\mathbf{r}(k)^T] = \mathbf{R} \quad (m \times m)$$

이 때 칼만 필터는  $\mathbf{z}(1)$ 에서  $\mathbf{z}(k)$ 까지의 測定値가 주어졌을 때 2次型式의 意味에서 共分散行列이 最小되게 하는  $\mathbf{x}(k)$ 의 最適推定値  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ 를 推定하는 한 알고리즘으로서  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ 와 그 共分散行列  $P(k|k)$ 는 다음 式(2.3)에 依해서 求해진다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= \Phi_k \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) \dots \dots \dots \textcircled{1} \\ P(k|k-1) &= \Phi_k P(k-1|k-1) \Phi_k^T + \mathbf{Q} \dots \dots \dots \textcircled{2} \\ G_k &= P(k|k-1) H_k^T [H_k P(k|k-1) H_k^T + \mathbf{R}]^{-1} \dots \dots \textcircled{3} \\ \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + G_k [\mathbf{z}(k) - H_k \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \dots \textcircled{4} \\ P(k|k) &= P(k|k-1) - G_k H_k P(k|k-1) \dots \dots \dots \textcircled{5} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.3)$$

式(2.3)에서  $\hat{x}(k|k-1)$ 은  $z(1)$ 에서  $z(k-1)$ 까지가 주어졌을 때  $x(k)$ 의 最適推定値이며  $P(k|k-1)$ 은  $\hat{x}(k|k-1)$ 의 共分散行列이다. 式(2.3)에서 알 수 있는 바와 같이 칼만 필터는  $x(k)$ 에 對한 過去의 情報을 나타내는  $\hat{x}(k-1|k-1)$ 과 새로운 測定値  $z(k)$ 의 加重平均으로  $\hat{x}(k|k)$ 를 求하고 있다.

칼만 필터는 雜音의 統計的 性質 即  $w(k)$ 와  $r(k)$ 의 平均値(여기에서는 0이라고 하였으나 반드시 0일 必要는 없다.)와 共分散行列 즉  $Q$ 와  $R$ 이 주어져야 하는 缺點이 있다.

式(2.3)으로 表現된 칼만 필터의 構成을 圖示하면 Fig. 2-1과 같다.

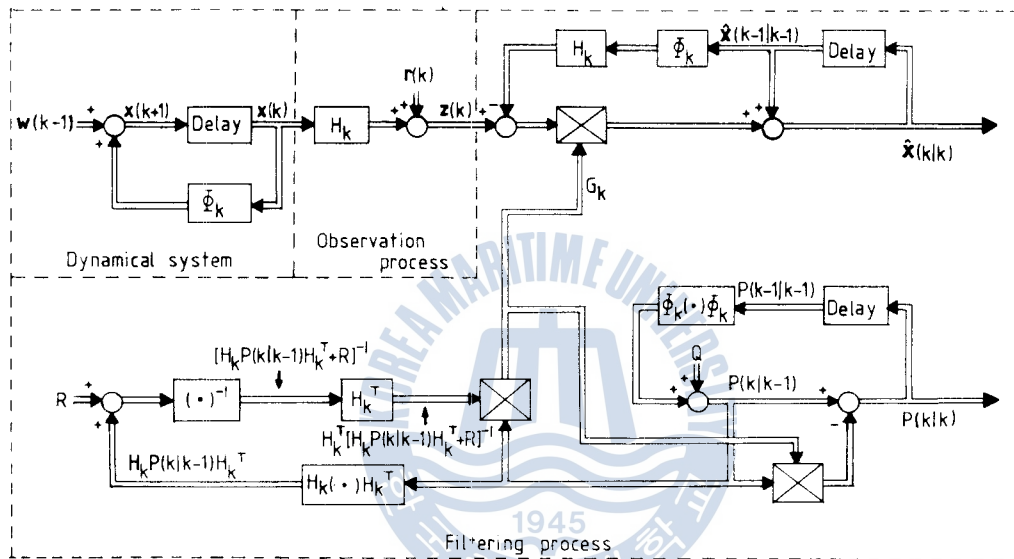


Fig. 2-1. Block diagram of Kalman filter.

### 2.2 天測位置線의 數學的 모델化

天測位置線은 推測位置나 假定位置에 對한 高度差와 方位에 依하여 決定되는데 一般的으로 假定位置를 使用하면 位置線의 誤差가 커짐으로<sup>22)</sup> 位置線의 精度를 높이기 爲해서는 推測位置에 對한 高度差와 方位를 計算할 必要가 있다.

時刻  $kt$ 에 있어서 推測位置의 緯度와 經度를 各各  $\varphi_k, \lambda_k$ 라 하고 이에 對한 高度差  $a_k$  및 方位  $\theta_k$ 가 算出되었다면 그에 對應하는 漸長圖上에서의 位置線은 Fig. 2-2와 같이 된다.

Fig. 2-2에서 位置線  $PL$ 이 正確하면 眞位置  $S$ 는  $PL$  위에 存在하므로 眞位置  $S$ 와 推測位置  $O$  사이의 經度差와 緯度差를 各各  $x_k, y_k$ 라고 하면 位置線의 方程式은 다음과 같다.

$$x_k \sin \theta_k \cos \varphi_k + y_k \cos \theta_k = a_k \dots \dots \dots (2.4)$$

그러나 測定된 高度差에는 誤差가 包含되게 마련이므로 이 誤差를  $\zeta_k$ , 測定된 高度差를  $z_k$ 라고 하면

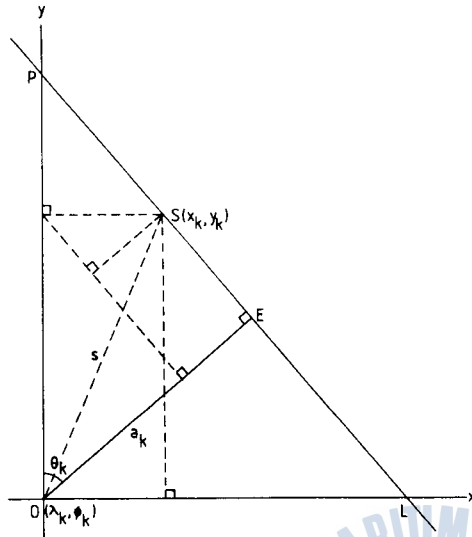


Fig. 2-2. Normal form of a celestial position line.

선의 誤差를 낳는다. DeWit<sup>19)</sup>에 依하면 高度 75° 以下이고 眞位置와 推測位置의 距離가 約 1 海里 以內인 때 0.1 海里 以下로 報告되어 있으나 著者が 第5章에서 檢討한 바에 依하면 이 誤差는 같은 條件下에서 約 0'.25에 達하고 있다.

그러므로 高度 75° 以下이고 眞位置와 推測位置間의 距離가 15 海里 以內이면 以上 두 가지 原因으로 생기는 誤差는 誤差의 結合法則에 따라 *r.m.s.*로 約 0'.27 以下로 볼 수 있다. 또 一般적으로 天體의 高度觀測時에는 六分儀器差, 眼高差, 大氣差 等의 誤差와 個人誤差가 高度差誤差의 原因이 된다.

따라서 式(2.5)로 定義된 位置線의 方程式中  $\zeta_k$ 는 이들 모든 誤差를 代表하는 것으로 볼 수 있는데 Lawson<sup>28)</sup>과 DeWit<sup>19)</sup>는 이 誤差를 平均値가 0이고, 서로 獨立인 偶然誤差만므로 이루어진 것이라 보고 있으나 實際로는 系統誤差와 偶然誤差의 結合으로 보는 것이 妥當하다고 여겨지므로 Morrison<sup>20)</sup>의 方法에 따라  $\zeta_k$ 를 다음과 같이 定義하기로 한다.

$$\zeta_k = d_k + r_k \dots \dots \dots (2.6)$$

式(2.6)의  $d_k$ 와  $r_k$ 는 各各  $k$  번째 測定한 高度差에 包含되는 系統誤差와 偶然誤差이며

$$E[r_k] = 0, E[r_k r_l] = 0 (k \neq l)$$

라고 假定한다.

### 2.3 칼만 필터를 天測位置 決定法에 適用하는 알고리즘

天測에 依한 位置決定에 칼만 필터를 適用하는 過程을 具體적으로 說明하기로 한다.

$$x_k \sin \theta_k \cos \phi_k + y_k \cos \theta_k + \zeta_k = z_k \dots (2.5)$$

가 成立한다.

天測位置線을 漸長圖에 表示하는 境遇에 問題되는 曲率로 因한 誤差는 眞位置와 推測位置 사이의 距離가 15 海里 以內이면 高度 75° 以下의 天體를 觀測하는 境遇 0.1 海里 以內로 볼 수 있고,<sup>19, 22)</sup> 實際로 眞位置와 推測位置의 距離가 15 海里를 넘는 일은 거의 없으며 天體가 天頂附近에 있을 때에는 觀測自體가 困難하므로 觀測하는 天體 高度의 限界를 75°로 잡아도 實用上은 전혀 無理가 없다고 생각된다.

方位를 計算할 때 眞位置 代身에 推測位置에 對하여 計算하므로 眞位置와 推測位置의 差異로 因한 計算位位의 誤差가 位置

式(2.1)의 信號過程

$$\mathbf{x}(k) = \Phi_k \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1)$$

에서 狀態벡터  $\mathbf{x}(k)$ 를 船位  $x_k, y_k$ 와 船速  $v_k$  및 系統誤差  $d_k$ 를 써서

$$\mathbf{x}^T(k) = (x_k, y_k, v_k, d_k) \dots\dots\dots(2.7)$$

라고 定義하면  $\Phi_k$ 는 다음과 같이 된다.

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \sin C \sec \hat{\varphi}_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 & t \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.8)$$

단,  $C$ 는 針路

또  $\mathbf{w}(k-1)$ 은 時刻  $(k-1)t$ 에 作用한 外亂入力을 意味하며 그 共分散行列  $Q$ 는 다음과 같이 하여 求解된다.

즉 測定時間間隔  $t$  동안에  $n$ 번의 外亂이 作用하는 것이라 하고  $\Delta t = t/n$ 라 놓으면 時刻  $kt + (i+1)\Delta t$  에 있어서의 外亂에 의한 狀態벡터의 遷移  $\mathbf{x}_{i+1}$ 는

$$\mathbf{x}_{i+1} = \Phi_i \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_i \dots\dots\dots(2.9)$$

로 나타낼 수 있고, 時刻  $i\Delta t$  에 作用하는 外亂入力  $\mathbf{u}_i$ 를 船首尾方向과 正橫方向에서 서로 獨立적으로 作用하는 速度成分의 雜音  $u_{hi}$ 와  $u_{bi}$ 에 基因하는 것으로 보고 船尾에서 船首方向으로 作用하는 外亂成分 및 左舷에서 右舷으로 作用하는 外亂成分을 ‘-’, 그와 反對方向으로 作用하는 것을 ‘+’로 定義하면 時間  $\Delta t$  동안에 作用한 外亂  $\mathbf{u}_i$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} (u_{hi} \sin C + u_{bi} \cos C) \Delta t \sec \hat{\varphi}_{k-1} \\ (u_{hi} \cos C + u_{bi} \sin C) \Delta t \\ u_{hi} \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.10)$$

또한 時刻  $(k-1)t$ 에서  $kt$ 까지의 測定時間間隔  $t$  동안에는  $n$ 번의 外亂이 作用하게 되므로 그 동안의 狀態벡터의 遷移  $\mathbf{x}_n$ 은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \{n(u_{h1} \sin C + u_{b1} \cos C) + (n-1)(u_{h2} \sin C + u_{b2} \cos C) + \dots + (u_{hn} \sin C + u_{bn} \cos C)\} \Delta t \sec \hat{\varphi}_{k-1} \\ \{n(u_{h1} \cos C + u_{b1} \sin C) + (n-1)(u_{h2} \cos C + u_{b2} \sin C) + \dots + (u_{hn} \cos C + u_{bn} \sin C)\} \Delta t \\ u_{h1} + u_{h2} + \dots + u_{hn} \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.11)$$

式(2.11)의  $\mathbf{x}_n$ 이 式(2.1)의  $\mathbf{w}(k-1)$ 에 해당하므로  $u_{hi}, u_{bi}$ 를 서로 獨立이고, 平均值가 0이며, 標準偏差가  $\sigma_h, \sigma_b$ 인 正規雜音이라고 하면  $\mathbf{w}(k-1)$ 의 共分散行列  $Q$ 는 다음과 같다.

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.12)$$

$$q_{11} = \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) (\sigma_h^2 \sin^2 C + \sigma_b^2 \cos^2 C) \Delta t^2 \sec^2 \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{22} = \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) (\sigma_h^2 \cos^2 C + \sigma_b^2 \sin^2 C) \Delta t^2$$

$$q_{33} = n \sigma_h^2$$

$$q_{12} = q_{21} = \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) (\sigma_h^2 + \sigma_b^2) \Delta t^2 \sin C \cos C \sec \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{13} = q_{31} = \frac{n(n+1)}{2} \Delta t \sigma_h^2 \sin C \sec \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{23} = q_{32} = \frac{n(n+1)}{2} \Delta t \sigma_h^2 \cos C$$

$$q_{14} = q_{41} = q_{24} = q_{42} = q_{34} = q_{43} = q_{44} = 0$$

다음에는 式(2.2)의 測定過程

$$z(k) = H_k x(k) + r(k)$$

에서 高度差를  $a_k$ , 速度를  $v_k$  라 하고 이들의 測定值를 各各  $z_k, v_k'$  라고 하면  $z_k$  에는 式(2.6)으로 定義된 誤差  $\zeta_k$  가 包含되며 速度에도 測定誤差  $r_{vk}$  가 包含된다고 볼 수 있으므로

$$\left. \begin{aligned} z_k &= a_k + d_k + r_k \\ v_k' &= v_k + r_{vk} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.13)$$

로 나타낼 수 있으며 測定值벡터  $z(k)$  는

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_k \\ v_k' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \sin \theta_k \cos \varphi_k + y_k \cos \theta_k + d_k + r_k \\ v_k + r_{vk} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.14)$$

와 같이 定義되고 따라서 測定過程에 있어서  $H_k$  와  $r(k)$  는

$$H_k = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi_k & \cos \theta_k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.15)$$

$$r^T(k) = (r_k, r_{vk}) \dots\dots\dots(2.16)$$

로 되며 特히  $r(k)$  는

$$E[r(k)] = 0 \dots\dots\dots(2.17)$$

이고 高度差와 速度의 測定誤差의 標準偏差를 各各  $\sigma_a, \sigma_v$  라고 하면  $r(k)$  의 共分散行列  $R$  은  $r_k$  와  $r_{vk}$  가 서로 獨立이므로 다음과 같이 된다.

$$R = E[r(k) \cdot r^T(k)] = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.18)$$

또 經度, 緯度, 速度 및 系統誤差의 初期值  $x_0, y_0, v_0, d_0$  에 대한 推定誤差의 標準偏差를 各各  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \sigma_{v_0}, \sigma_{d_0}$  라고 하면 式(2.3)의 ②에서 狀態벡터의 共分散行列  $P(k-1|k-1)$  의

初期值인  $P(0|0)$ 는 다음과 같이 된다.

$$P(0|0) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{a_0}^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.19)$$

以上으로 式(2.3)으로 表示되는 칼만 필터를 適用하기 爲한 要素들이 모두 定義된 셈이커 天體를 觀測하여 高度差와 方位를 求하고 測程儀(log)로 船速을 測定하면 測定值벡터  $z(k)$ 가 決定되고 이  $z(k)$ 를 時刻  $kt$ 까지  $k$ 번을 測定하였을 때 그 時刻에 있어서의 狀態  $x(k)$ 의 最適推定值  $\hat{x}(k)$ 를 計算할 수 있다.

### 2.4 시뮬레이션 및 檢討

관측 횡단을 天測에 의한 位置推定에 適用하는 問題의 實効性を 考察하기 爲하여 시뮬레이션을 行할에 있어서 測定誤差의 系統誤差와 偶然誤差는 勿論이고, 外亂, 初期推定值의 誤差等 實際로 發生할 수 있는 諸誤差를 假想하여 船位를 何의가치로 變化시키면서 實施한다.

그리고 最近 測定計器의 發達로 船速을 比較的 正確히 測定할 수 있게는 되었으나 一般的 一瞬時觀測하여 位置線을 轉位하는 境遇의 船位誤差가 크고, 또 다른 時點에 있어서 何의 天測位置線을 同時에 測定하는 것은 實際로 行할 수 없게 兩時觀測의 境遇를 擇하여 計算해보고 있다.

특히 何의 太陽을 觀測하여 兩時觀測位置(running fix)를 決定하는 境遇가 다른 여파 때문에 何 時間동안 觀測이 可能하여 칼만 필터의 適用에 適合한 時期로 여기기므로 이 時期를 擇하여 兩時觀測의 位置線 하나씩을 轉位하여 決定한 船位와 칼만 필터로 推定한 最適位置와의 精度를 比較하기로 한다.

今 1982年 7月 25日 ZT 06\*30에 34°40'.0N, 129°05'.0E의 地點을 出發點으로 하여 針路 250°, 速力 15kn로 航海中의 船位를 假想하고 ZT 06\*30부터 ZT 18\*30까지 便宜上 30分 間隔으로 太陽을 21번에 걸쳐 觀測하는 것으로 何의 計算시뮬레이션을 行한다.

天測計算에 있어서 基礎라 할 수 있는 天體의 座標(GHA, Dec.)는 綿森<sup>9)</sup>가 檢討한 바와 같이 天體位置 略算式을 利用하여라도 實用上 滿足할만한 精度로써 求할 수 있고 實際로 太陽과 恒星의 座標는 天測曆없이 直接 計算機에서 求할 수 있도록 프로그램이 된 計算機들이 市販되고 있으므로 天測計算을 完全히 電算化하려면 天體位置 略算式을 利用하여야 할 것이다. 그러나 本 論文에서는 船位의 精度를 比較하는 것이 主目的이므로 天測曆을 使用하여 太陽의 座標를 구하기로 한다.

位置의 精度를 檢討함에 있어서는 天測할 때마다

- i) 칼만 필터로 推定한 最適位置
- ii) 交角關係를 考慮하여 1時間 30分 以前에 얻은 位置線을 轉位하여 求한 隔時觀測位置
- iii) 推測位置에서 各位置線에 내린 垂線의 발인 最近似位置

等 3種類의 位置를 求하여 比較하기로 한다.

시뮬레이션의 過程에서 2點間의 距離, 針路 等 必要한 計算은 距等圈航法과 漸長緯度航法을 使用하고 天體의 高度( $h$ ) 및 方位( $\theta$ )는 다음 公式에 依한다.

$$\left. \begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \text{Dec.} + \cos \varphi \cos \text{Dec.} \cos(\text{GHA} + \lambda) \\ \sin \theta &= \sin(\text{GHA} + \lambda) \cos \text{Dec.} \operatorname{sech} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.20)$$

式(2.20)中 緯度( $\varphi$ ), 赤緯(Dec.)는  $N$ 이면 ‘+’,  $S$ 이면 ‘-’로 하고 經度( $\lambda$ )는  $E$ 를 ‘+’,  $W$ 를 ‘-’로 定義한다. 또한 測定誤差  $r_k$ ,  $r_{vk}$  및 外亂은 서로 獨立인 正規亂數를 使用하며 그 밖에 採擇한 定數(標準偏差)는 다음과 같다.

- $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1'.0, 3'.0, 5'.0$
- $\sigma_{v_0} = 2.3kn$
- $\sigma_{d_0} = 0'.0, 0'.5, 1'.0$
- $v_0 = 15kn$
- $\sigma_a = 0'.5, 1'.0, 1'.5, 2'.0$
- $\sigma_v = 0.5kn, 1.0kn, 1.5kn, 2.0kn$
- $\sigma_h = \sigma_b = 0.015kn, 0.030kn, 0.045kn$
- $t = 0.5(\text{hour}), \Delta t = 0.005(\text{hour})$

以上の 定數 中  $\sigma_{v_0} = 2.3kn$ ,  $\sigma_{d_0} = 0'.0$ 으로 하여 다른 定數를 바꾸어 가면 36가지 境遇가 되는데 이들 각 境遇에 對하여 眞位置와 隔時觀測位置間의 距離 즉 測定位置의 誤差를  $D_{fix}$ , 眞位置와 最近似位置間의 距離 즉 最近似位置의 誤差를  $D_{mpp}$ , 眞位置와 칼만 필터로 推定한 位置間의 距離 즉 最適位置의 誤差를  $D_{kal}$ 이라 하고,  $\sigma_{d_0} = 0'.0, 0'.5, 1'.0$ 等 세 가지 境遇에  $k=4$ 부터 24까지  $D_{fix}$ ,  $D_{mpp}$ ,  $D_{kal}$ 의 平均値를 求하면 Table 2-1에 表示한 것과 같다.

Table 2-1에 依하면 칼만 필터로 推定한 位置가 어떤 境遇에나 顯著히 精度가 높고 最近似位置의 精度도 比較的 높게 나타나고 있다.

Fig. 2-3은 隔時觀測位置를 求한  $k=4$ 부터 24까지의 各時刻에 있어서 位置線들의 交角을 나타낸 것인데  $30^\circ$ 以內인 것이 總 21回中 14回임을 알 수 있다.

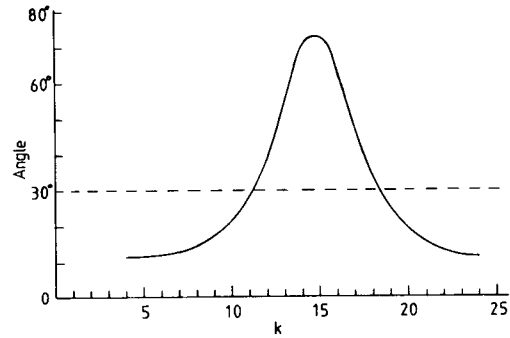


Fig. 2-3. The angle of intersection formed by two position lines at each measured time, kt.



Table 2-1. Comparison of the mean value of  $D_{fix}$ ,  $D_{mpp}$  and  $D_{kat}$ .

No.	measurement error		disturbance $\sigma_h$ & $\sigma_b$ (kn)	initial error $\sigma_{x_0}$ & $\sigma_{y_0}$	mean value of $D_{fix}$			mean value of $D_{mpp}$			mean value of $D_{kat}$		
	$\sigma_u$	$\sigma_v$ (kn)			$\sigma_{d_5}$	$\sigma_{d_0}$	$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_5}$	$\sigma_{d_0}$	$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_5}$	$\sigma_{d_0}$	$\sigma_{d_1}$
			0'0	0'5	1'0	0'0	0'5	1'0	0'0	0'5	1'0		
1	0'5	0.5	0.015	1'0	2.17	2.23	2.48	1.12	1.18	1.44	0.32	0.62	0.73
2	1'0	1.0	"	"	4.37	4.33	4.47	1.83	1.84	1.99	0.84	0.95	1.08
3	1'5	1.5	"	"	6.56	6.49	6.53	2.58	2.56	2.65	1.06	1.14	1.34
4	2'0	2.0	"	"	8.74	8.65	8.66	3.22	3.20	3.23	1.25	1.30	1.51
5	0'5	0.5	0.030	"	2.18	2.25	2.50	1.18	1.23	1.49	0.56	0.65	0.74
6	1'0	1.0	"	"	4.35	4.33	4.47	1.89	1.89	2.02	0.92	0.98	1.11
7	1'5	1.5	"	"	6.55	6.48	6.53	2.64	2.61	2.67	1.17	1.22	1.39
8	2'0	2.0	"	"	8.74	8.66	8.66	3.30	3.34	3.38	1.41	1.45	1.60
9	0'5	0.5	0.045	"	2.20	2.27	2.52	1.23	1.28	1.53	0.58	0.67	0.76
10	1'0	1.0	"	"	4.25	4.31	4.48	1.95	1.95	2.13	0.96	1.02	1.12
11	1'5	1.5	"	"	6.53	6.48	6.54	2.71	2.67	2.73	1.26	1.30	1.43
12	2'0	2.0	"	"	8.71	8.64	8.64	3.44	3.41	3.43	1.52	1.53	1.68
13	0'5	0.5	0.015	3'0	2.17	2.23	2.48	2.89	2.94	3.07	0.61	0.89	0.84
14	1'0	1.0	"	"	4.36	4.32	4.47	3.52	3.53	3.62	1.09	1.16	1.27
15	1'5	1.5	"	"	6.56	6.50	6.54	4.26	4.19	4.23	1.36	1.52	1.67
16	2'0	2.0	"	"	8.75	8.68	8.66	4.89	4.87	4.90	1.66	1.81	1.98
17	0'5	0.5	0.030	"	2.18	2.25	2.49	2.95	2.99	3.12	0.65	0.85	0.88
18	1'0	1.0	"	"	4.36	4.33	4.47	3.58	3.59	3.67	1.05	1.20	1.29
19	1'5	1.5	"	"	6.55	6.47	6.53	4.15	4.21	4.28	1.44	1.56	1.67
20	2'0	2.0	"	"	8.74	8.67	8.66	4.94	4.92	4.95	1.76	1.85	1.98
21	0'5	0.5	0.045	"	2.19	2.27	2.52	3.00	3.04	3.17	0.70	0.89	0.92
22	1'0	1.0	"	"	4.35	4.31	4.48	3.62	3.64	3.72	1.11	1.25	1.33
23	1'5	1.5	"	"	6.53	6.48	6.54	4.27	4.24	4.33	1.51	1.63	1.73
24	2'0	2.0	"	"	8.71	8.64	8.65	5.01	4.97	5.00	1.86	1.94	2.05
25	0'5	0.5	0.015	5'0	2.17	2.24	2.49	4.53	4.70	4.83	0.68	0.96	0.97
26	1'0	1.0	"	"	4.37	4.33	4.47	5.03	5.33	5.46	1.12	1.70	1.51
27	1'5	1.5	"	"	6.54	6.47	6.53	5.41	5.94	5.99	1.47	1.64	1.87
28	2'0	2.0	"	"	8.75	8.68	8.66	6.02	6.50	6.61	1.82	1.94	2.17
29	0'5	0.5	0.030	"	2.19	2.26	2.50	4.77	4.81	4.90	0.78	0.95	1.01
30	1'0	1.0	"	"	4.35	4.31	4.47	5.37	5.39	5.45	1.13	1.36	1.51
31	1'5	1.5	"	"	6.52	6.47	6.52	6.03	6.03	6.04	1.51	1.87	1.84
32	2'0	2.0	"	"	8.74	8.69	8.62	6.65	6.63	6.67	1.87	1.96	2.15
33	0'5	0.5	0.045	"	2.19	2.27	2.51	4.83	4.87	4.95	0.79	0.99	0.97
34	1'0	1.0	"	"	4.25	4.34	4.48	5.42	5.44	5.51	1.20	1.46	1.55
35	1'5	1.5	"	"	6.53	6.48	6.52	6.06	6.05	6.10	1.57	1.72	1.88
36	2'0	2.0	"	"	8.76	8.6	8.64	6.72	6.70	6.72	1.95	2.05	2.20

位置線과 사이의 交角이 작은 狀態에서 隔時觀測位置를 求하면 船位의 精度는 當然히 下降할 것으로 豫想되는데 Table 2-1을 이를 間 反映하고 있다. 因해서 因해 太陽에 依한 隔時觀測位置를 求하는 境遇에는 單一 位置線에서 일승 最近似位置를 輕視할 수 없다의 경가된다.

Fig. 2-4부터 Fig. 2-11까지는 Table 2-1에 表示한 36까지 境遇 가운데 8가지 境遇를 擇하여 各 測定時刻  $t$ 에 對한  $D_{kat}$ 을 實線,  $D_{fix}$ 을 點線으로 하여 片對數 座標紙에 描된 것이다.

이들로부터 알 수 있는 共通點은 交角關係가 不良하여 隔時觀測位置가 不正確한 初期에는

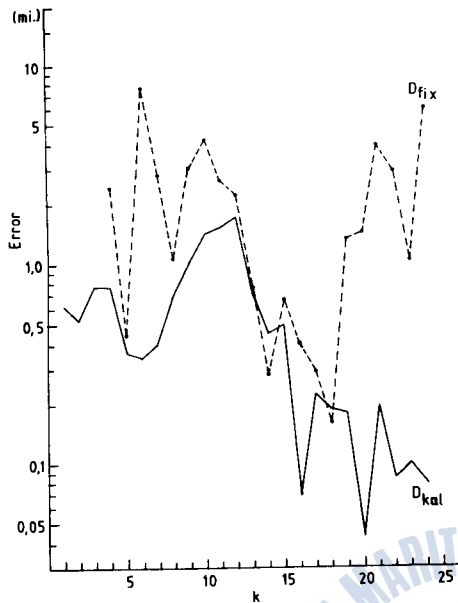


Fig. 2-4. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_a=0'.5, \sigma_v=0.5\text{kn}, \sigma_h=\sigma_b=0.015\text{kn}, \sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0)$ .

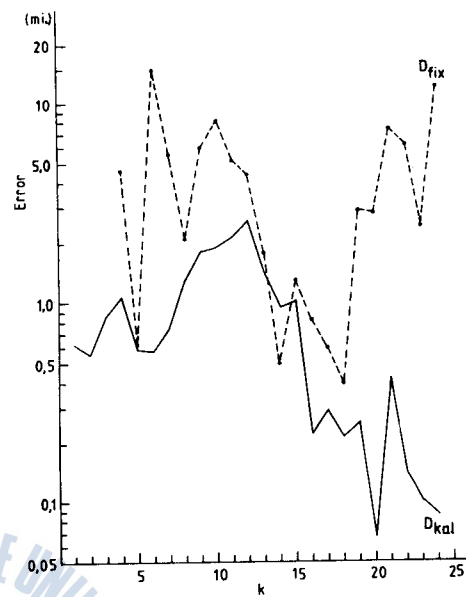


Fig. 2-5. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_a=1'.0, \sigma_v=1.0\text{kn}, \sigma_h=\sigma_b=0.015\text{kn}, \sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0)$ .

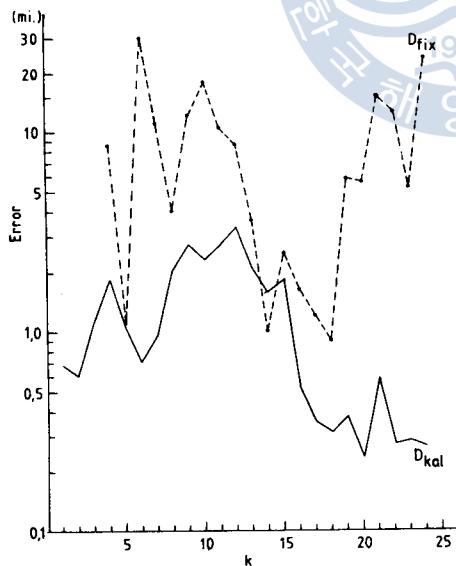


Fig. 2-6. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_a=2'.0, \sigma_v=2.0\text{kn}, \sigma_h=\sigma_b=0.015\text{kn}, \sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0)$ .

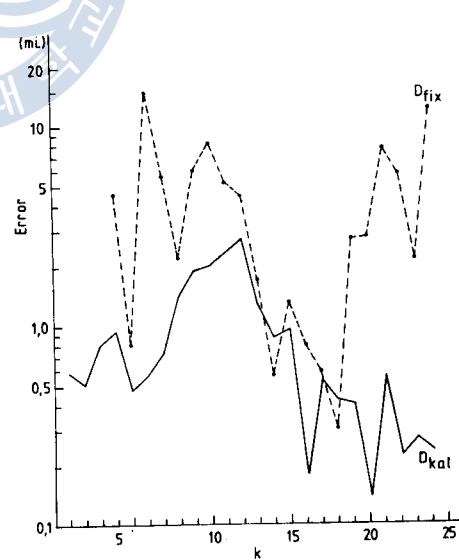


Fig. 2-7. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_a=1'.0, \sigma_v=1.0\text{kn}, \sigma_h=\sigma_b=0.030\text{kn}, \sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0)$ .

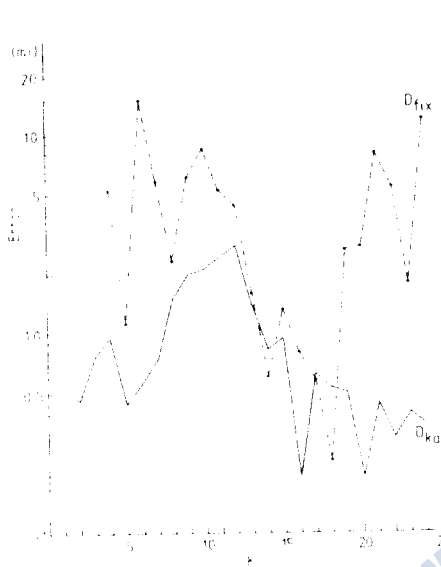


Fig. 2-8. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 ( $\sigma_a = 1'.0$ ,  $\sigma_v = 1.0$ kn,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.015$ kn,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1'.0$ ).

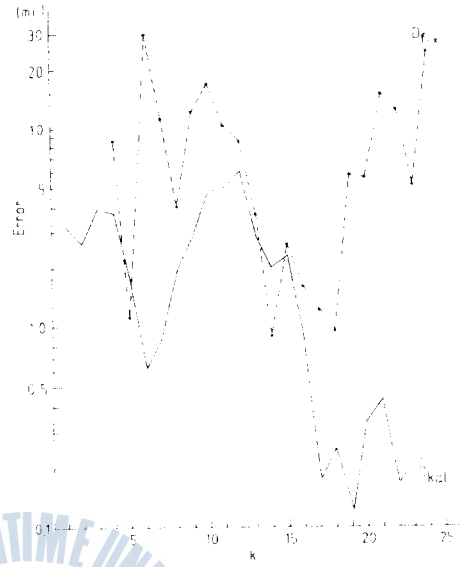


Fig. 2-9. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 ( $\sigma_a = 2'.0$ ,  $\sigma_v = 2.0$ kn,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.015$ kn,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ ).

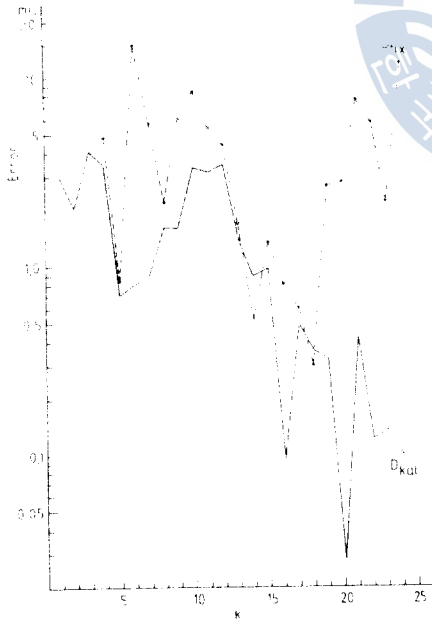


Fig. 2-10. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 ( $\sigma_a = 1'.0$ ,  $\sigma_v = 1.0$ kn,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.030$ kn,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ ).

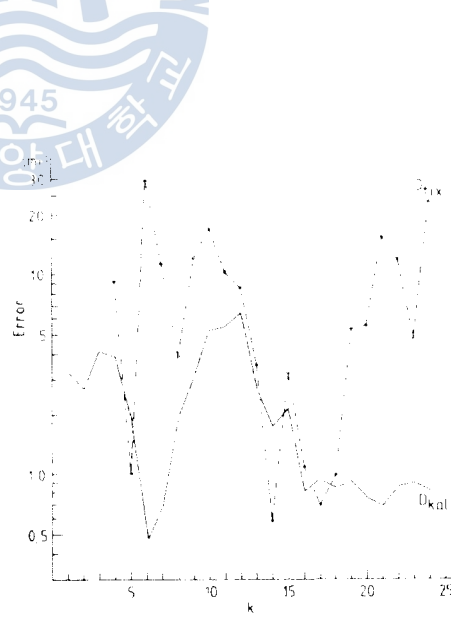


Fig. 2-11. Errors of the estimated position by Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight ( $D_{fix}$ ).  
 ( $\sigma_a = 2'.0$ ,  $\sigma_v = 2.0$ kn,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.045$ kn,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ ).

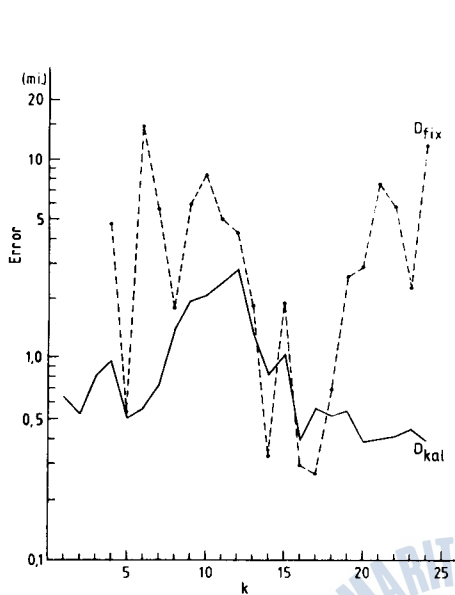


Fig. 2-12. Errors of the estimated position by Kalman filter( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight( $D_{fix}$ ).  
( $\sigma_a=1'.0$ ,  $\sigma_v=1.0\text{kn}$ ,  $\sigma_k=\sigma_b=0.030\text{kn}$ ,  
 $d=2'.0$ ,  $\sigma_{d_0}=0'.5$ ,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ ).

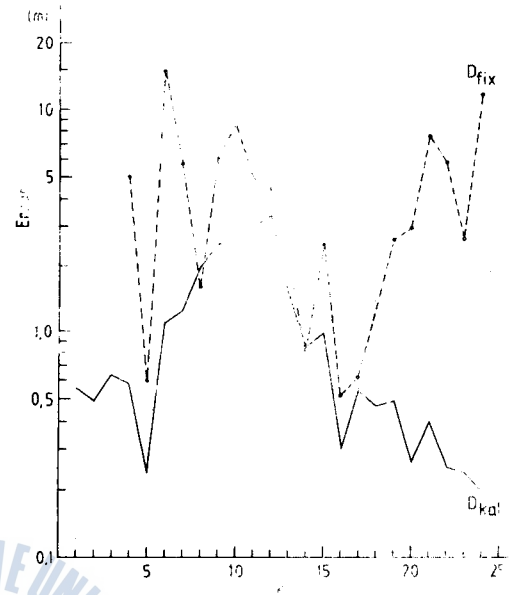


Fig. 2-13. Errors of the estimated position by Kalman filter( $D_{kal}$ ) and the running fix by sun sight( $D_{fix}$ ).  
( $\sigma_a=1'.0$ ,  $\sigma_v=1.0\text{kn}$ ,  $\sigma_k=\sigma_b=0.030\text{kn}$ ,  
 $d=2'.0$ ,  $\sigma_{d_0}=1'.0$ ,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ ).

$D_{kal}$ 도 比較的 크게 나타나고 있는데 交角關係가 좋아져서 測定된 位置의 精度가 높아지는  $k=14$ 以後부터는 急激히 減小하며 뒤에 다시 交角關係가 나빠져  $D_{fix}$ 는 커지더라도  $D_{kal}$ 은 큰 變動없이 거의 一定한 값을 갖는 傾向이 있는 點이다.

Fig. 2-4, Fig. 2-5, Fig. 2-6을 서로 比較하여 보면 測定值誤差에 의한 影響을 알 수 있다. 즉 測定值誤差가 커짐에 따라  $D_{fix}$ 는 顯著히 커지지만  $D_{kal}$ 은 큰 變動이 없다.

Fig. 2-5와 Fig. 2-7 또는 Fig. 2-8을 比較해 보면 外亂이 커져도  $D_{fix}$ 는 거의 變化하지 않으나  $D_{kal}$ 은 外亂이 클수록 커지는 傾向이 있음을 알 수 있다.

Fig. 2-6과 Fig. 2-9 또는 Fig. 2-7과 Fig. 2-10에서 初期推定誤差가 큰 경우에는 작은 경우에 比하여 初期에는  $D_{kal}$ 이 크게 나타나지만 一旦 精密測定이 이루어진 다음부터는 初期推定誤差의 影響은 거의 볼 수 없음을 알 수 있다.

다음에 系統誤差가  $D_{kal}$ 에 미치는 影響은 Table 2-1에서도 알 수 있는 바와 같이 系統誤差의 推定誤差  $\sigma_{d_0}$ 가 크면 클수록 全體의으로는  $D_{kal}$ 이 커지지만 그 差異는 微小하다.

Fig. 2-12와 Fig. 2-13은 Fig. 2-7에 表示한 경우와 꼭 같은 條件이면서 다만 系統誤差  $2'.0$ 에 對한 推定誤差  $\sigma_{d_0}$ 를  $0'.5$ 과  $1'.0$ 으로 하였을 때의  $D_{kal}$ 과  $D_{fix}$ 를 나타낸 것이다. Fig. 2-13의 경우  $\sigma_{d_0}=1'.0$ 인데 Fig. 2-7의  $\sigma_{d_0}=0'.0$ 인 때와 比較하여 精密測定이 되었다고 보여지는  $k=14$ 以後에는 큰 差異가 없는 것을 알 수 있다.

### 第3章 交叉方位法에 의한 船位의 精度改善

沿岸航海時에 陸上의 物標方位를 測定하여 位置를 決定하는 境遇에는 測定過程이 非線型 이므로 非線型 칼만 필터를 適用하여야 한다. 그러나 原來 非線型 칼만 필터는 信號過程이나 測定過程이 非線型이어서 이를 Taylor 級數로 展開하여 1次項까지만 取한 近似式을 利用 하고 있기 때문에 電波航法에서와 같이 連續的인 測定이 이루어지 測定時間間隔이 아주 짧은 場合に 適用될 수 있는 式이다.

그런데 沿岸航海時에 方位를 測定하는 境遇에는 測定時間間隔이 比較的 長기 때문에 非線型 칼만 필터를 그대로 適用하기 困難하다.

따라서 本章에서는 이와 같은 境遇에도 適用할 수 있도록 非線型 칼만 필터를 部分的으로 修正하였는데 이를 修正 非線型 칼만 필터라 부르고 있다. 그리고 方位測定에 의한 位置 決定에서 修正 非線型 칼만 필터를 適用하는 方法에 對해서 考察하였고, 이 物標의 方位와 船速의 測定值가 주어지는 것으로 있다. 또한 船速의 測定이 있어서 x軸, y軸 方向의 分力을 測定하는 것은 非現實的으로 船舶의 進行方向에 對한 船速을 測定하는 것으로 하고 이 位置의 座標는 經緯度로 나타내기로 하였다.

第2章에서 檢討한 方法에 依하여 系統誤差, 推定值 船位推定에 根本的인 影響을 미치는 誤差를 判斷하였을 結果에 依하여 系統誤差를 補正할 方法을 對해서도 考察하고 있다.

#### 3.1 非線型 칼만 필터의 特性

方位測定時에 4-1 測定過程이 非線型이므로 航海中에 位置, 方位와 船速의 實測值로부터 船位 座標를 利用하여 最適位置를 求하기 爲해서 非線型 칼만 필터를 適用하여서 한다.

다음 信號過程과 測定過程을 各各

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}_k[\mathbf{x}(k-1)] + \mathbf{w}(k-1) \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{g}_k[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{r}(k) \dots \dots \dots (3.2)$$

라 하면 一般的으로  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{z}(k)$ 가 모두 非線型이다. 이 중 하나가 非線型인 것은 非線型 칼만 필터(extended Kalman filter)라고 하며, 이 境遇에 式(2.3)의 ①, ④는 다음과 같이 表現된다.

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}_k[\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)] \dots \dots \dots (3.3)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{G}_k[\mathbf{z}(k) - \mathbf{g}_k[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]] \dots \dots \dots (3.4)$$

그러므로 이 때 式(2.3)의 ②, ③, ⑤는 同式을 얻으나 式中의  $\phi_k$  및  $H_k$ 는 다음과 같이 된다.

$$\Phi_k = \frac{d}{d[\mathbf{x}(k-1)]} \mathbf{f}_k[\mathbf{x}(k-1)]_{\mathbf{x}(k-1)=\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)} \dots \dots \dots (3.5)$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{d}{d[\mathbf{x}(k)]} \mathbf{g}_k[\mathbf{x}(k)]_{\mathbf{x}(k)=\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)} \dots \dots \dots (3.6)$$

그런데 벡터函數  $\mathbf{f}_k(\cdot)$  및  $\mathbf{g}_k(\cdot)$ 가 非線型일 때에는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  또는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 과의 差異가 微小하다고 보고 函數  $\mathbf{f}_k$ 와  $\mathbf{g}_k$ 를  $\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$  또는  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 의 근방에서 Taylor 級數로 展開하여 그 1次項까지만 取한 다음의 式(3.7)을 利用하여 近似的으로 計算한다.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_k[\mathbf{x}(k-1)] &\doteq \mathbf{f}_k[\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)] + \Phi_k[\mathbf{x}(k-1) - \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)] \\ \mathbf{g}_k[\mathbf{x}(k)] &\doteq \mathbf{g}_k[\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] + \mathbf{H}_k[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.7)$$

따라서 非線型 칼만 필터는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  또는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 과의 差異가 微小한 때에만 適用할 수 있는 近似式이다.

### 3.2 修正 非線型 칼만 필터의 構成

非線型 칼만 필터는 測定時間間隔이 極히 짧아  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  또는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 의 差異가 微小한 때가 아니면 使用할 수 없으므로 測定時間間隔을 길게 잡은 境遇에는 이 필터는 使用할 수 없다.

그러므로 連續인 船位測定裝置를 利用하지 않고 陸上의 物標나 無線局의 方位를 測定하여 船位를 決定하는 境遇에는 測定時間間隔이 相當히 길어지기 때문에 이와 같은 境遇에도 利用할 수 있는 修正된 非線型 칼만 필터를 構成하기로 한다.

非線型 칼만 필터에서

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \mathbf{y}(k) + \mathbf{r}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}_k[\mathbf{x}(k)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.8)$$

라고 놓고 于先 다음과 같은 假定을 設定한다.

(i) 測定值벡터와 狀態벡터의 次元은 같다.

(ii) 函數  $\mathbf{g}_k$ 의 逆函數  $\mathbf{g}_k^{-1}$ 가 存在한다.

$$\text{즉, } \mathbf{x}(k) = \mathbf{g}_k^{-1}[\mathbf{y}(k)]$$

(iii)  $\det \mathbf{H}_k \neq 0$

$$\text{즉, } \mathbf{H}_k^{-1} = \mathbf{M}_k$$

그리고 狀態벡터로 換算한 測定值벡터를

$$\mathbf{z}_s(k) = \mathbf{g}_k^{-1}[\mathbf{z}(k)] \dots \dots \dots (3.9)$$

狀態벡터로 換算한 測定雜音벡터를

$$\mathbf{r}_s(k) = \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{r}(k) = \mathbf{M}_k \mathbf{r}(k) \dots \dots \dots (3.10)$$

라 하고  $\mathbf{r}_s(k)$ 는 平均值가 0이고 그 共分散行列은  $\mathbf{R}_s$ 라 한다.

즉,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{r}_s(k)] &= 0 \\ E[\mathbf{r}_s(k)\mathbf{r}_s^T(k)] &= E[M_k\mathbf{r}(k)\mathbf{r}^T(k)M_k^T] \\ &= M_kRM_k^T = R_s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

따라서  $\mathbf{z}(k)$  代身  $\mathbf{z}_s(k)$ 가 測定되고 測定雜音도  $\mathbf{r}(k)$  代身에  $\mathbf{r}_s(k)$ 라고 생각하면 測定過程은

$$\mathbf{z}_s(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}_s(k)$$

와 같이 表現되어 非線型 칼만 필터의 式은 다음과 같이 一部가 修正된다.

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{f}_k[\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)] \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

$$P(k|k-1) = \phi_k P(k-1|k-1)\phi_k^T + Q \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

$$G_k = P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1} \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + G_k[\mathbf{z}_s(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \quad \dots\dots\dots(3.15)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - G_k P(k|k-1) \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

또한 式(3.15)와 式(3.16)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= [I_n - P(k|k-1)\{P(k|k-1) + R_s\}^{-1}]\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ &\quad + P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1}\mathbf{z}_s(k) \\ &= R_s[P(k|k-1) + R_s]^{-1}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ &\quad + P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1}\mathbf{z}_s(k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

$$\begin{aligned} P(k|k) &= P(k|k-1) - G_k P(k|k-1) \\ &= P(k|k-1)[I_n - P(k|k-1)\{P(k|k-1) + R_s\}^{-1}] \\ &= P(k|k-1)R_s[P(k|k-1) + R_s]^{-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

한편 非線型 칼만 필터에서  $H_k$ 가 正則行列이고  $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 이 微小하다면

$$\begin{aligned} G_k &= P(k|k-1)H_k^T[H_k P(k|k-1)H_k^T + R]^{-1} \\ &= P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1}H_k^{-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

이므로 이를 式(3.4)에 代入하면

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1} \cdot \\ &\quad H_k^{-1}[\mathbf{z}(k) - \mathbf{g}_k\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

으로 되며 위 式中

$$H_k^{-1}[\mathbf{z}(k) - \mathbf{g}_k\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\}] \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

은 式(3.7), 式(3.8), 式(3.10)들에 依하여 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &H_k^{-1}[\mathbf{z}(k) - \mathbf{g}_k\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\}] \\ &= H_k^{-1}[\mathbf{g}_k\{\mathbf{x}(k)\} - \mathbf{g}_k\{\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)\} + \mathbf{r}(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \doteq \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}_s(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ & = \mathbf{z}_s(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \dots\dots\dots(3.22) \\ \therefore \hat{\mathbf{x}}(k|k) &= \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1} \cdot \\ & \quad [\mathbf{z}_s(k) - \hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \dots\dots\dots(3.23) \end{aligned}$$

같은 방법으로  $P(k|k)$ 를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore P(k|k) &= P(k|k-1) - P(k|k-1) \cdot \\ & \quad [P(k|k-1) + R_s]^{-1} P(k|k-1) \dots\dots\dots(3.24) \end{aligned}$$

여기에서 다시

$$G_k = P(k|k-1)[P(k|k-1) + R_s]^{-1} \dots\dots\dots(3.25)$$

라고 놓으면 非線型 칼만 필터의 式들인 式(3.23)과 式(3.24)는 修正 非線型 칼만 필터의 式들인 式(3.15), 式(3.16)과 一致함을 알 수 있다.

따라서  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  또는  $\mathbf{x}(k)$ 와  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 의 값의 差異가 微小하면 非線型 칼만 필터와 修正 非線型 칼만 필터가 一致하지만 그 差異가 큰 때에는 修正 非線型 칼만 필터를 利用하지 않으면 안된다. 다만 이 때 留意할 것은 앞의 假定이 成立하여야 한다는 點이다.

### 3.3 修正 非線型 칼만 필터의 航法에의 適用

Fig. 3-1에서 物標를  $A, B$ 라 하고 船舶의 位置를  $S$ , 針路를  $C$ 라고 한다.

지금 方位 測定時인 時刻  $kt$ 에 있어서의 推測位置를 原點  $O(\lambda_k, \varphi_k)$ 로 잡고 物標의 座標를 各各  $A(\lambda_1, \varphi_1), B(\lambda_2, \varphi_2)$ , 船舶의 座標를  $S(x_k, y_k)$ , 船速을  $v_k$ 라 하고 狀態 벡터  $\mathbf{x}(k)$ 는 다음과 같이 定義한다.

$$\mathbf{x}^T(k) = (x_k, y_k, v_k) \dots\dots\dots(3.26)$$

이 때 修正 非線型 칼만 필터인 式(3.12) ~ 式(3.16)을 適用하기 爲한 基本要素들은 다음과 같다.

時刻  $kt$ 에 推定한  $\mathbf{x}(k)$ 의 推定值 :

$$\hat{\mathbf{x}}^T(k|k) = (\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{v}_k) \dots\dots\dots(3.27)$$

遷移行列 :

$$\phi_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \sin C \sec \hat{\varphi}_{k-1} \\ 0 & 1 & t \cos C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.28)$$

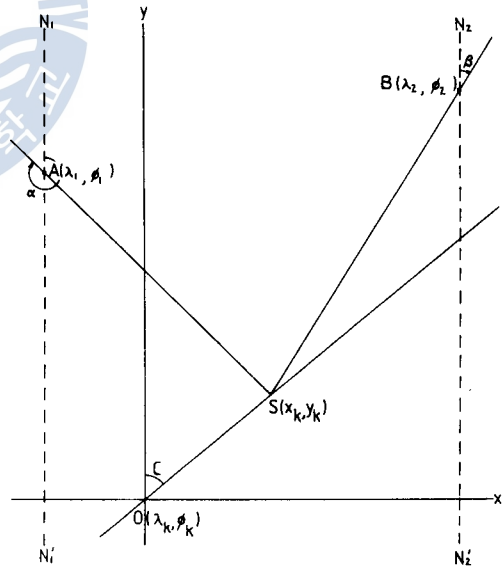


Fig. 3-1. A fix by two bearing lines.



그러므로  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 을 求하려면 式(3·12)를 適用하여야 하는데 이 境遇 信號過程  $\mathbf{x}(k)$ 는 線型이므로 式(2·3)의 ①에 依하여 다음과 같이 된다.

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} + \hat{v}_{k-1} t \sin C \sec \varphi_{k-1} \\ \hat{y}_{k-1} + \hat{v}_{k-1} t \cos C \\ \hat{v}_{k-1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3\cdot29)$$

각 時刻  $kt$ 에 있어서 方位測定值  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  및 船速測定值  $v_k'$ 를 얻었다면 測定值 벡터  $\mathbf{z}(k)$ 와 測定值行列  $H_k$ 는 다음과 같이 表現된다.

$$\mathbf{z}^T(k) = (\alpha_k, \beta_k, v_k') \dots\dots\dots (3\cdot30)$$

$$\alpha_k = \pi \text{ (or } 2\pi) + \tan^{-1}\{(\lambda_1 - \lambda_c)(\varphi_1 - \varphi_c)^{-1} \cos \varphi_c\} + r_{\alpha}$$

$$\beta_k = \pi \text{ (or } 2\pi) + \tan^{-1}\{(\lambda_2 - \lambda_c)(\varphi_2 - \varphi_c)^{-1} \cos \varphi_c\} + r_{\beta}$$

$$v_k' = v_k + r_v$$

단, (i)  $\lambda_c, \varphi_c$ 는  $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ 에 依하여 求할 經度와 緯度

(ii)  $\varphi_1 - \varphi_c < 0, \varphi_2 - \varphi_c < 0$ 이면  $\pi$ ,

$\varphi_1 - \varphi_c > 0, \varphi_2 - \varphi_c > 0$ 이면  $2\pi$ .

(iii)  $r_{\alpha}, r_{\beta}, r_v$ 는 各各의 平均值가 0이고 標準偏差가  $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \sigma_v$ 이며 統計的으로 相互 獨立인 正規亂數

$$H_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \lambda_c} & \frac{\partial \alpha_k}{\partial \varphi_c} & 0 \\ \frac{\partial \beta_k}{\partial \lambda_c} & \frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3\cdot31)$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \lambda_c} = (\varphi_c - \varphi_1) \cos \varphi_c \{ (\lambda_1 - \lambda_c)^2 \cos^2 \varphi_c + (\varphi_1 - \varphi_c)^2 \}^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \lambda_c} = (\varphi_c - \varphi_2) \cos \varphi_c \{ (\lambda_2 - \lambda_c)^2 \cos^2 \varphi_c + (\varphi_2 - \varphi_c)^2 \}^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \varphi_c} = \{ (\lambda_1 - \lambda_c) \cos \varphi_c - (\lambda_1 - \lambda_c)(\varphi_1 - \varphi_c) \sin \varphi_c \} \{ (\lambda_1 - \lambda_c)^2 \cos^2 \varphi_c + (\varphi_1 - \varphi_c)^2 \}^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_c} = \{ (\lambda_2 - \lambda_c) \cos \varphi_c - (\lambda_2 - \lambda_c)(\varphi_2 - \varphi_c) \sin \varphi_c \} \{ (\lambda_2 - \lambda_c)^2 \cos^2 \varphi_c + (\varphi_2 - \varphi_c)^2 \}^{-1/2}$$

다음에  $\alpha_k, \beta_k, v_k'$ 의 測定誤差  $r_{\alpha}, r_{\beta}, r_v$ 의 標準偏差를 各各  $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \sigma_v$ 라고 하면 測定值 벡터의 共分散行列  $R$ 은

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\beta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3\cdot32)$$

으로 되며  $H_k$ 는 3·2에서의 假定 (iii)을 滿足하므로 式(3·11)에 依하여  $R_k$ 를 求할 수 있다. 한편  $\alpha_k, \beta_k$ 가 測定되면  $S$ 의 座標가 定하여지고  $S$ 의 座標가 定하여지면  $\alpha_k, \beta_k$ 도 定해

진다. 즉 3·2에서의 假定 (ii)가 成立하므로 式(3·9)의  $z_s(k)$ 를 求하면 다음과 같다.

$$z_s^T(k)=[x_k(\alpha, \beta), y_k(\alpha, \beta), v_k'] \dots\dots\dots(3\cdot33)$$

$$x_k(\alpha, \beta)=(\lambda_1 \cos \varphi_1 \cot \alpha_k - \lambda_2 \cos \varphi_2 \cot \beta_k + \varphi_2 - \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_1 \cot \alpha_k - \cos \varphi_2 \cot \beta_k)^{-1}$$

$$y_k(\alpha, \beta)=[(\lambda_1 \cos \varphi_1 \cot \alpha_k - \lambda_2 \cos \varphi_2 \cot \beta_k + \varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_1 \cot \alpha_k] \cdot (\cos \varphi_1 \cot \alpha_k - \cos \varphi_2 \cot \beta_k)^{-1} - \lambda_1 \cos \varphi_1 \cot \alpha_k + \varphi_1$$

단,  $x_k(\alpha, \beta), y_k(\alpha, \beta)$ 는  $\alpha_k, \beta_k$ 로부터 求한  $x_k, y_k$ .

一般的으로 測定時間間隔  $t$  內의 任意時刻  $(i+1)\Delta t$ 에 있어서 外亂에 依한 狀態벡터  $x_{i+1}$ 은

$$x_{i+1}=\Phi_k x_i + u_i \dots\dots\dots(3\cdot34)$$

로 表示되며 時刻  $i\Delta t$ 에 作用하는 外亂入力  $u_i$ 는 船首尾線方向과 正橫方向의 서로 獨立된 速度成分으로 發生한 것이라 생각하여 이들을 各各  $u_{hi}, u_{bi}$ 라 하고 船尾에서 船首方向과 左舷에서 右舷方向으로 作用하는 것을 ‘+’, 그와 反對인 境遇를 ‘-’라고 하면 時間  $\Delta t$  동안에 作用하는 外亂  $u_i$ 는

$$u_i = \begin{pmatrix} (u_{hi} \sin C + u_{bi} \cos C) \Delta t \sec \hat{\varphi}_{k-1} \\ (u_{hi} \cos C + u_{bi} \sin C) \Delta t \\ u_{hi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3\cdot35)$$

로 表現되고 時間  $t$  동안에  $n$  번( $n=t/\Delta t$ )의 外亂이 作用하는 것으로 보고 이를  $x_n$  이라면

$$x_n = \begin{pmatrix} \{n(u_{h1} \sin C - u_{b1} \cos C) + \dots + (u_{hn} \sin C + u_{bn} \cos C)\} \Delta t \sec \hat{\varphi}_{k-1} \\ \{n(u_{h1} \cos C + u_{b1} \sin C) + \dots + (u_{hn} \cos C + u_{bn} \sin C)\} \Delta t \\ u_{h1} + u_{h2} + \dots + u_{hn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3\cdot36)$$

이며  $x_n$ 의 共分散行列  $Q$ 는  $u_{hi}, u_{bi}$ 의 標準偏差를 各各  $\sigma_h, \sigma_b$ 라고 하면

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3\cdot37)$$

$$q_{11} = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \Delta t \sigma_h^2 \sin^2 C \sec^2 \hat{\varphi}_{k-1} + \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \Delta t^2 \sigma_b^2 \cos^2 C \sec^2 \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$= \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) (\sigma_h^2 \sin^2 C + \sigma_b^2 \cos^2 C) \Delta t^2 \sec^2 \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{22} = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) (\sigma_h^2 \cos^2 C + \sigma_b^2 \sin^2 C) \Delta t^2$$

$$q_{33} = n \sigma_h^2$$

$$q_{12} = q_{21} = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) (\sigma_h^2 + \sigma_b^2) \Delta t^2 \sin C \cos C \sec \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{13}=q_{31}=\frac{n(n+1)}{2} \Delta t \sigma_h^2 \sin C \sec \hat{\varphi}_{k-1}$$

$$q_{23}=q_{32}=\frac{n(n+1)}{2} \Delta t \sigma_h^2 \cos C$$

으로 된다. 그리고 狀態 벡터의 初期值  $\mathbf{x}(0)$ 의 共分散行列  $P(0|0)$ 는 다음과 같다.

$$P(0|0)=\begin{pmatrix} \sigma_{x_0}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{v_0}^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.38)$$

**3.4 시뮬레이션 및 檢計**

本 시뮬레이션에서는 緯度 34°40'.0N, 經度 129°05'.0E인 出發地에서 緯度 32°06'.1N, 經度 120°38'.5E인 目的地를 向하여 針路 250°, 速力 15kn로 航海中인 船舶에서 30分마다 2個의 物標의 方位를 同時觀測하여 船位와 함께 速力도 測定하는 것으로 한다.

이를 위하여 航路附近에 12個의 物標位置를 定하며 이들을 順次로 바꾸어 가면서 測定하는 것으로 假定하였는데 이들 物標位置와 測定順序는 各各 Table 3-1 및 Table 3-2와 같다.

또 測定誤差  $r_\alpha, r_\beta, r_v$ 는 平均值가 0 이고 서로 獨立인 正規亂數를 使用하였으며 시뮬레이션에 採擇한 定數는 다음과 같다.

- $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0, 5'.0, 10'.0$
- $v_0=15 \text{ kn}$
- $\sigma_v=0.5 \text{ kn}, 1.0 \text{ kn}, 1.5 \text{ kn}$
- $\sigma_{v_0}=2.3 \text{ kn}$
- $\sigma_h=0.015 \text{ kn}, 0.030 \text{ kn}$
- $\sigma_b=0.015 \text{ kn}, 0.030 \text{ kn}$
- $t=0.5(\text{hour}), \Delta t=0.005(\text{hour})$
- $\sigma_\alpha=\sigma_\beta=1^\circ.0, 2^\circ.0, 3^\circ.0$

**Table 3-1. Positions of selected objects.**

Object	N Lat.	E Long.	Object	N Lat.	E Long.
L <sub>1</sub>	34°47'.0	128°49'.9	L <sub>7</sub>	34°16'.0	127°10'.5
L <sub>2</sub>	34°31'.0	128°45'.0	L <sub>8</sub>	34°11'.0	126°53'.0
L <sub>3</sub>	34°36'.7	128°34'.0	L <sub>9</sub>	34°05'.2	126°36'.2
L <sub>4</sub>	34°36'.4	128°15'.0	L <sub>10</sub>	33°59'.0	126°10'.0
L <sub>5</sub>	34°40'.0	127°58'.0	L <sub>11</sub>	33°55'.0	125°46'.5
L <sub>6</sub>	34°21'.0	127°27'.0	L <sub>12</sub>	33°48'.0	125°18'.0

Table 3-2. The order and number of measuring of selected objects.

The order of measuring	The name of objects	Number of measuring
k= 1~3	L <sub>1</sub> , L <sub>2</sub>	3
k= 4~6	L <sub>2</sub> , L <sub>3</sub>	3
k= 7~9	L <sub>4</sub> , L <sub>5</sub>	3
k=10~12	L <sub>6</sub> , L <sub>7</sub>	3
k=13~15	L <sub>7</sub> , L <sub>8</sub>	3
k=16~18	L <sub>8</sub> , L <sub>10</sub>	3
k=19~24	L <sub>10</sub> , L <sub>11</sub>	6
k=25~30	L <sub>11</sub> , L <sub>12</sub>	6

以上에서 보는 바와 같이  $\sigma_h, \sigma_b, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_v, \sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$  등은 각각 여러가지 境遇를 假想하여 이들 값을 바꾸어 가면서 시뮬레이션을 行하였다.

그 結果 原來의 非線型 칼만 필터를 利用하면 船位推定의 精度가 修正 非線型 칼만 필터를 利用한 境遇에 比하여 매우 나쁜 것을 確認할 수 있었으며 특히 初期에 推定한 船位誤差가 큰 때에는 推定船位가 改善되지 않았다.

Fig. 3-2는  $\sigma_h = \sigma_b = 0.015 \text{ kn}$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1^\circ.0$ ,  $\sigma_v = 0.5 \text{ kn}$ ,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 10'.0$ 인 境遇 原來의 非線型 칼만 필터와 修正 非線型 칼만 필터로 求한 最適船位와 眞位置間의 距離를 各時刻  $kt$  마다에 대하여 計算한 結果를 圖示한 것인데 이를 잘 나타내고 있다.

Fig. 3-3~Fig. 3-6은 여러가지 경우에 있어서 修正 非線型 칼만 필터를 使用하여 計算한 最適位置와 眞位置間의 距離( $D_{kat}$ ) 및 交叉方位法에 依한 船位와 眞位置間의 距離( $D_{fix}$ )를 時刻  $kt$  마다에 대하여 表示한 것이다. 測定雜音과 交角關係가 推定位置의 精度에 미치는 影響을 살피기 위하여 시뮬레이션을 行할 때 包含된 測定雜音  $\sigma_\alpha$ 와  $\sigma_\beta$ 로부터  $\sigma = \sqrt{(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2)/2}$ 의 값을 測角誤差로 定義하고, 또 方位測定時의 交角과  $90^\circ$ 와의 差異를  $|90^\circ - \text{交角}|$ 으로 하여 圖示하면 Fig. 3-3, Fig. 3-4의 경우는 Fig. 3-7과 같이 되고 Fig. 3-5, Fig. 3-6의 경우는 Fig. 3-8과 같이 된다.

이들로부터 分명한 것은 測角誤差가 크고 交角關係가 나쁜 때일수록  $D_{fix}$ 는 커지나  $D_{kat}$ 은 別로 影響을 받지 않는다는 點이다. 이로 미루어 測定이 不良한 경우에 칼만 필터는 威力을 發揮한다고 할 수 있을 것이다.

Fig. 3-9는 定數가 Fig. 3-6과 같은 境遇인데 다만 交角關係를 極히 良好한 狀態( $90^\circ \pm 20^\circ$ )로 定하여 시뮬레이션을 行한 것이다. 이에 의하면 方位測定時에 交角關係가 좋으면 當然히 測定船位의 精度가 높아지는데 이 때에도 칼만 필터에 依한 最適位置의 精度는 높아지는 傾向을 보인다.

다음에 初期에 推定한 船位誤差의 標準偏差  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}$ 를  $1'.0, 5'.0$  및  $10'.0$  등 세가지로 바꾸어 본 바 한 두차례 測定한 以後부터는 最適位置가 거의 같아졌으며 外亂에 依한

影響도 方位測定時에 交角關係가 極히 不良한 境遇가 아니면 微小하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 3-10은 初期條件으로  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1^\circ.0$ ,  $\sigma_v = 0.5 \text{ kn}$ ,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ 로 하고 外亂의 標準偏差  $\sigma_h$ 와  $\sigma_b$ 를  $0.015 \text{ kn}$ 로 한 境遇의  $D_{kat}$ 을 點線으로 表示하고 外亂이 2倍인  $0.030 \text{ kn}$ 인 때의  $D_{kat}$ 을 實線으로 表示한 것이다.

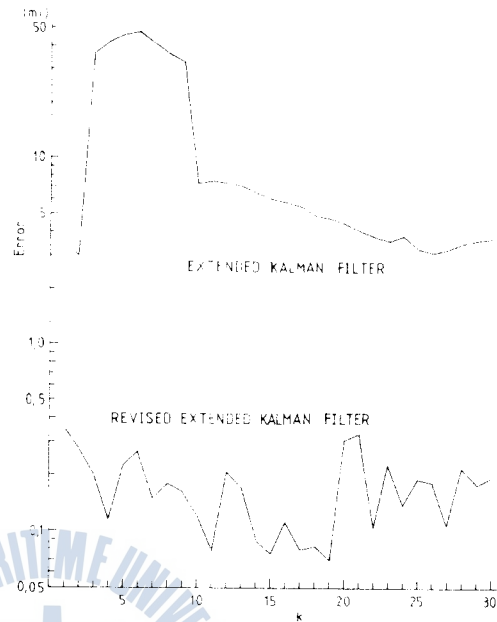


Fig. 3-2. Position errors deduced by extended Kalman filter and revised extended Kalman filter. ( $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1^\circ.0$ ,  $\sigma_v = 0.5 \text{ kn}$ ,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 10'.0$ ).

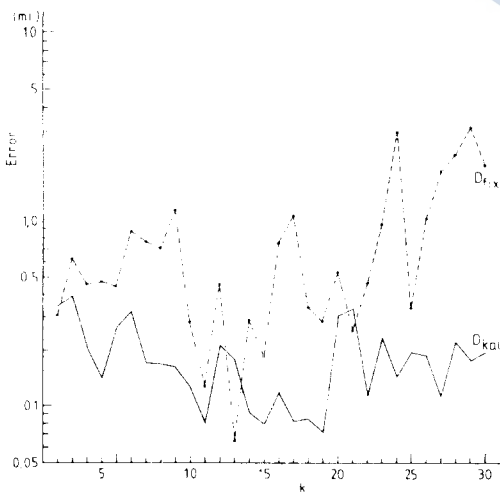


Fig. 3-3. Errors of the estimated position by revised extended Kalman filter ( $D_{kat}$ ) and the fix by cross bearing ( $D_{fix}$ ). ( $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1^\circ.0$ ,  $\sigma_v = 0.5 \text{ kn}$ ,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.015 \text{ kn}$ ,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1'.0$ )

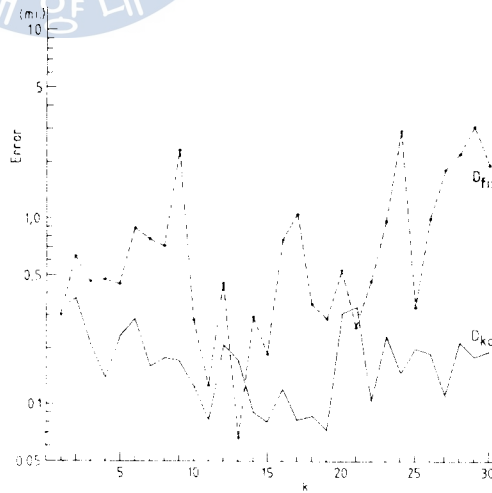


Fig. 3-4. Errors of the estimated position by revised extended Kalman filter ( $D_{kat}$ ) and the fix by cross bearing ( $D_{fix}$ ). ( $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1^\circ.0$ ,  $\sigma_v = 0.5 \text{ kn}$ ,  $\sigma_h = \sigma_b = 0.015 \text{ kn}$ ,  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ ).

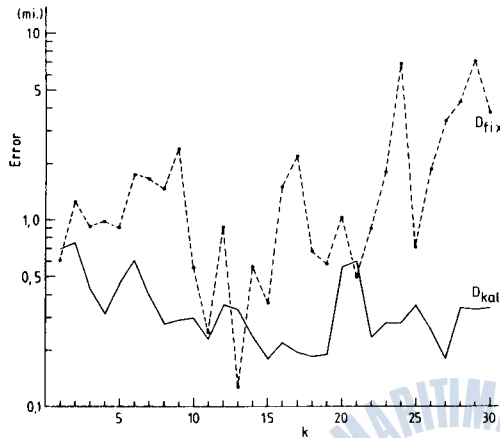


Fig. 3-5. Errors of the estimated position by revised extended Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the fix by cross bearing ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 2^\circ.0, \sigma_v = 1.0kn, \sigma_h = \sigma_b = 0.015kn, \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1'.0)$ .

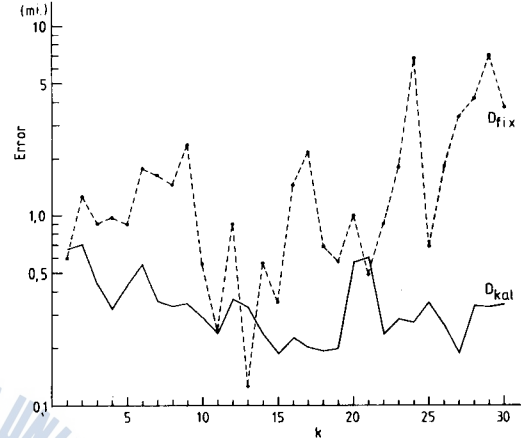


Fig. 3-6. Errors of the estimated position by revised extended Kalman filter ( $D_{kal}$ ) and the fix by cross bearing ( $D_{fix}$ ).  
 $(\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 2^\circ.0, \sigma_v = 1.0kn, \sigma_h = \sigma_b = 0.015kn, \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0)$ .

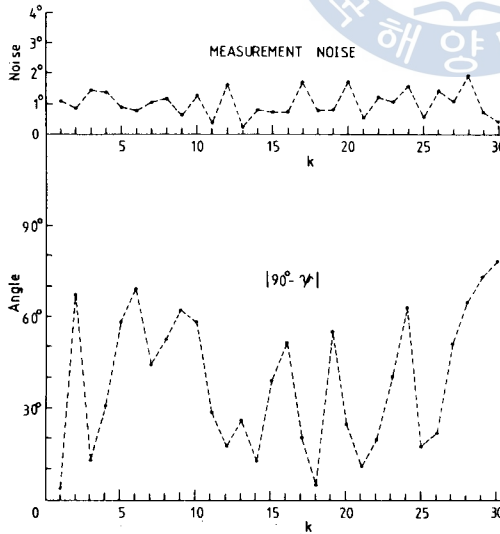


Fig. 3-7. Measurement noises and the angles of intersection formed by two position lines in case of the same condition as Fig. 3-3 & 3-4.

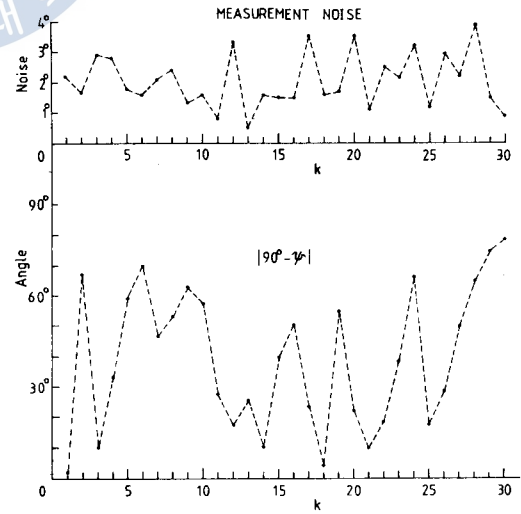


Fig. 3-8. Measurement noises and the angles of intersection formed by two position lines in case of the same condition as Fig. 3-5 & 3-6.

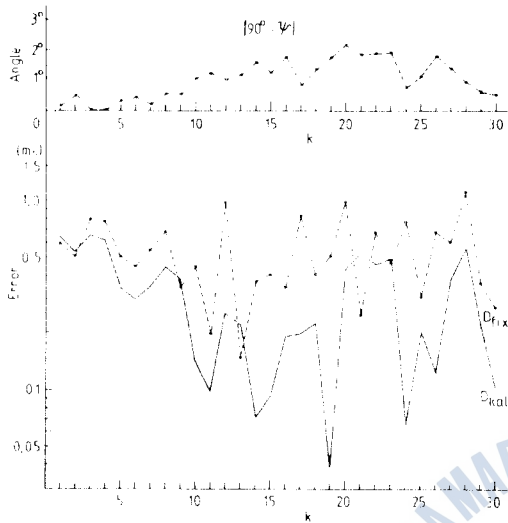


Fig. 3-9.  $D_{kal}$  and  $D_{fix}$  in case that the angle of intersection formed by two position lines are nearly  $90^\circ; 90^\circ \pm 20^\circ$ .

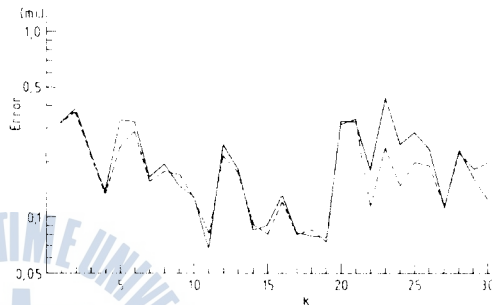


Fig. 3-10. Computations of  $D_{kal}$  when  $\sigma_h = \sigma_k = 0.015kn$  (dotted line) and  $\sigma_h = \sigma_k = 0.030kn$  (Solid line). Other conditions are same as Fig. 3-4.

#### 第 4 章 誤差三角形에 있어서의 位置推定

一般적으로 同時 또는 隔時觀測으로 얻은 세 位置線을 交叉시켜 位置를 求할 때 各 位置線에 誤差가 包含되어 있거나 또는 轉位操作이 不正確한 境遇에는 誤差三角形을 이루게 된다. 특히 天測 位置線이나 方位線을 利用한 船位決定法에 있어서 誤差三角形의 處理에 對하여는 오랫동안 研究되어 왔는데 方位線을 利用한 船位決定法에 있어서는 物標觀測地點과의 距離가 多少 인 때에는 近似的으로 天測의 境遇와 같이 取扱할 수 있다. 따라서 本章에서는 天測의 境遇를 例로 하여 誤差三角形에 관한 필터를 適用하여 位置를 推定하는 方法을 提示함과 동시에 이 推定位置와 內心, 傍心 또는 類似重心<sup>25)</sup>과의 關係 및 系統誤差만으로 誤差三角形이 생길 때에 세 位置線의 方程式에서 求해지는 行列式을 利用하여 船位를 判別하는 方法 等에

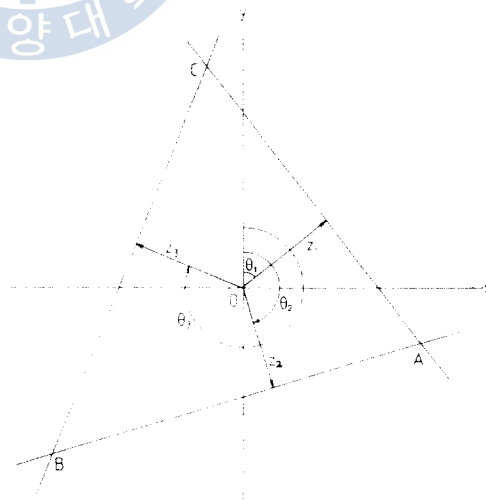


Fig. 4-1. Cocked hat formed by three celestial position lines.

對하여 考察하기로 한다.

Fig. 4-1과 같이 天測으로 얻은 세 位置線이 誤差三角形을 이루었을 때 船位의 座標를  $(x, y)$ , 系統誤差를  $d$ , 高度差의 測定值를  $z_1, z_2, z_3$ , 偶然誤差를 各各  $r_1, r_2, r_3$ 라 하면 다음 式이 成立한다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{r} \dots\dots\dots(4.1)$$

$$\text{단, } \mathbf{z}^T = (z_1, z_2, z_3)$$

$$\mathbf{r}^T = (r_1, r_2, r_3)$$

$$\mathbf{x}^T = (x, y, d)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cos\hat{\varphi}_1 & \cos\theta_1 & 1 \\ \sin\theta_2 \cos\hat{\varphi}_2 & \cos\theta_2 & 1 \\ \sin\theta_3 \cos\hat{\varphi}_3 & \cos\theta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

式(4.1)에서 式은 3個이고 未知數는  $x, y, d, r_1, r_2, r_3$ 의 6個이므로 이 解는 無限히 많다. 그러므로 이 중 가장 合理的인 解는 偶然誤差를 0으로 보고 求한 解이며 이 때의 船位 座標와 系統誤差로 이루어지는 벡터를  $\mathbf{x}_d$ 라고 하면 이 解는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{z} \dots\dots\dots(4.2)$$

$$\text{단, } \mathbf{x}_d^T = (\mathbf{p}_i, d_i)$$

$$\mathbf{p}_i^T = (x_i, y_i)$$

$(x_i, y_i)$  : 內心 또는 傍心の 座標

式(4.2)에서  $\mathbf{p}_i$ 는 Fig. 4-1의 誤差三角形의 內心 또는 傍心を 나타내며  $d_i$ 는 誤差三角形의 內心 또는 傍心에서 各邊까지의 距離이다.

萬一  $d=0$ 이라고 하면 式(4.1)의 合理的인 解는 最小誤差自乘法에 依한 解이다. 따라서  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{p}_r$ 을 各各

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cos\hat{\varphi}_1 & \cos\theta_1 \\ \sin\theta_2 \cos\hat{\varphi}_2 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_3 \cos\hat{\varphi}_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_r^T &= (x_r, y_r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.3)$$

단,  $(x_r, y_r)$  : 類似重心의 座標

라고 定義하면 위의 解는

$$L = \|\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathbf{p}_r\|^2 \dots\dots\dots(4.4)$$

을 最小되게 하는  $\mathbf{p}_r$ 로서 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{p}_r = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z} \dots\dots\dots(4.5)$$



4.1 칼만 필터의 誤差三角形에의 適用

誤差三角形을 이루는 세 位置線은 同時觀測된 境遇와 隔時觀測된 境遇가 있으며 隔時觀測에 의한 境遇에는 반드시 轉位操作이 必要하다. 轉位操作이 正確하면 同時觀測인 境遇와 같이 取扱될 수 있으나 轉位操作이 不正確하면 同時觀測인 境遇와 다르게 取扱되어야 한다.

[1] 轉位操作이 不正確한 境遇

狀態벡터를

$$\mathbf{x}^T = (x, y, d) \dots\dots\dots(4.6)$$

단,  $(x, y)$ 는 船位座標

라고 하면 遷移行列  $\Phi_k$ 는 3次의 單位行列이 되며 信號過程은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}_0 \dots\dots\dots(4.7)$$

단,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(3)$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(0) + \mathbf{w}(1) + \mathbf{w}(2) \text{ (3次의 벡터)}$$

또한 測定過程은

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{r} \dots\dots\dots(4.8)$$

이 되고

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{r}] &= E[\mathbf{w}_0] = 0 \\ E[\mathbf{r}\mathbf{r}^T] &= \mathbf{R} \\ E[\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0^T] &= \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.9)$$

라 하면  $\mathbf{x}$ 의 推定値  $\hat{\mathbf{x}}$ 는 式(2.3)으로부터 다음과 같이 計算된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{P}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{P}_1\mathbf{B}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_0) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{P}_1\mathbf{B}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 &= \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.10)$$

단,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(3|3)$ 이며  $\hat{\mathbf{x}}$ 의 共分散行列  
 $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}(3|0)$ 이며  $\mathbf{z}$ 를 測定하기 前의  $\hat{\mathbf{x}}$ 의 共分散行列  
 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(0|0)$ 이며  $\mathbf{x}_0$ 의 共分散行列

式(4.9)의  $\hat{\mathbf{x}}$ 가 誤差三角形에 있어서 轉位操作이 不正確할 때 칼만 필터에 의한 最適 位置가 된다.

그러나 이 位置는 세 位置線의 情報를 全部 利用하여 推定된 것임에도 不拘하고 轉位 操作의 不正確 때문에 各 位置線의 測定順序에 따라 推定位置가 달라진다. 이에 關하여 二 位置線의 境遇를 例로 들어 具體的으로 考察하기로 한다.

지금 測定된 二 位置線을 各各  $P_1L_1, P_2L_2$ 라고 하면 이들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_1L_1 : z_1 = \mathbf{h}_1^T \mathbf{x}(1) + r_1 \dots\dots\dots(4.11)$$

$$P_2L_2 : z_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{x}(2) + r_2 \dots\dots\dots(4.12)$$

$$\text{단, } \mathbf{h}_i^T = (\sin\theta_i \cos\hat{\varphi}_i, \cos\theta_i, 1)$$

(1) 位置線  $P_1L_1$ 을 轉位하는 境遇

式(2.1)의 信號過程式에서

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(1) + \mathbf{w}(1)$$

$$\therefore \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(2) - \mathbf{w}(1) \dots\dots\dots(4.13)$$

이며  $P_1L_1$ 을 먼저 측정하고 이를 다음 觀測時까지 轉位한다는 것은 式(4.11)의  $\mathbf{x}(1)$  代身에 式(4.13)을 代入하는 것과 같으므로

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \mathbf{h}_1^T \mathbf{x}(2) + r_1 - \mathbf{h}_1^T \mathbf{w}(1) \\ z_2 &= \mathbf{h}_2^T \mathbf{x}(2) + r_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.14)$$

로 된다. 지금

$$\mathbf{z}^T = (z_1, z_2), \quad \mathbf{H}^T = (\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T),$$

$$\mathbf{r}_{12}^T = [r_1 - \mathbf{h}_1^T \mathbf{w}(1), r_2]$$

라고 놓으면 式(4.14)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}(2) + \mathbf{r}_{12} \dots\dots\dots(4.15)$$

(2) 位置線  $P_2L_2$ 를 轉位하는 境遇

位置線  $P_2L_2$ 를 먼저 測定하고 이를 다음 觀測時까지 轉位하는 것이라면  $z_1, z_2$ 는 各各 다음과 같이 된다.

$$P_2L_2 : z_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{x}(1) + r_2 \dots\dots\dots(4.16)$$

$$P_1L_1 : z_1 = \mathbf{h}_1^T \mathbf{x}(2) + r_1 \dots\dots\dots(4.17)$$

式(4.16)의  $\mathbf{x}(1)$  代身에 式(4.13)을 代入하고

$$\mathbf{r}_{21}^T = [r_1, r_2 - \mathbf{h}_2^T \mathbf{w}(1)]$$

이라고 놓으면 다음 式을 얻는다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}(2) + \mathbf{r}_{21} \dots\dots\dots(4.18)$$

以上 (1), (2)의 各 境遇에 있어서 信號過程은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{w}'(0) \dots\dots\dots(4.19)$$

$$\text{단, } \mathbf{w}'(0) = \mathbf{w}(0) + \mathbf{w}(1)$$

位置線의 轉位操作이 不正確하다는 것은 곧 外亂  $\mathbf{w}(k)$ 가 0이 아니라는 뜻이므로 信號過程 式(4.19)에 對한 測定過程 式(4.15)와 式(4.18)로 求한  $\mathbf{x}(2)$ 의 推定値는  $\mathbf{r}_{12}$ 와  $\mathbf{r}_{21}$ 이 같지 않으므로 相異하게 된다. 그러나 萬一  $\mathbf{w}(1)$ 이 0 即 轉位操作이 正確하면  $\mathbf{r}_{12}$ 와  $\mathbf{r}_{21}$ 이 같게 되어 式(4.15)와 式(4.18)은 같은 式이 되므로  $\mathbf{x}(2)$ 의 推定値는 位置線의 測定順序

에는 關係없이 같아진다.

즉 轉位操作이 不正確할 때에는 두 位置線의 交點이 位置線의 測定順序에 따라 다르게 될 수 있는 바 推定位置 또는 두 位置線의 交點의 差異의 程度는  $w(1)$ 의 크기 및  $h_1, h_2$ 에 따라 決定된다.

〔2〕 轉位操作이 正確한 境遇

이 때는 同時에 세 位置線을 測定한 境遇와 同一하며 位置線의 測定順序에 關係없이 推定值  $\hat{x}$ 는 一定해진다. 또한 外亂  $w(0)=w(1)=w(2)=0$  이므로

$$Q=0, P_1=P_0 \dots\dots\dots(4.20)$$

가 된다.

(1) 系統誤차가 0이 아닐 때

式(4.10)으로부터

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} (z - B \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} B P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.21)$$

(2) 系統誤차가 0일 때

이 때는 偶然誤차만 있는 境遇이며 狀態벡터를 다시 定義하여

$$x^T = (x, y) \dots\dots\dots(4.22)$$

라고 하면  $\phi_k$ 는 2次の 單位行列이며  $w_0$ 는 2次の 벡터가 된다.

測定過程은

$$z = Ax + r \dots\dots\dots(4.23)$$

로 表現되고  $\hat{x}$ 와  $P$ 는 各各 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} (z - A \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} A P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.24)$$

式(4.21) 또는 式(4.24)의  $\hat{x}$ 가 誤差三角形에 있어서 轉位操作이 正確하거나 세 位置線을 同時에 觀測하였을 때 칼만 필터로 推定한 船位가 되며 이 位置는 誤差三角形의 모양 以外에도  $x$ 의 初期推定值  $\hat{x}_0$ 와 그 共分散行列  $P_0$ 에 依하여 決定된다.

實際로 船位에 對한 事前知識은 多少나마 가지고 있는 것이 普通이므로 誤差三角形에 있어서 가장 精度 높은 最適位置는 式(4.10) 또는 式(4.21)과 式(4.24)에 依하여 計算되는  $\hat{x}$ 가 된다.

4.2 最適位置와 內心, 傍心 및 類似重心과의 關係

〔1〕 內心 또는 傍心과의 關係

式(4.21)을 變形하면<sup>26, 27)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + (B^T R^{-1} B + P_0^{-1})^{-1} B^T R^{-1} (z - B \hat{x}) \\ P &= P_0 - P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} B P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.25)$$

로 되며  $x_d$ 의 共分散行列을  $P_d$ 라고 하면 式(4.2)에서

$$P_d = B^{-1} R B^{-T} \dots\dots\dots (4.26)$$

이므로 式(4.2)와 式(4.26)을 參照하여 式(4.25)를 고쳐쓰면  $\hat{x}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = (P_d^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_d^{-1} x_d + (P_d^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_0^{-1} \hat{x}_0 \dots\dots\dots (4.27)$$

式(4.27)로부터 칼만 필터에 依한 推定位置  $\hat{x}$ 는 初期推定值  $\hat{x}_0$ , 그 共分散行列  $P_0$ , 測定值에 依하여 定하여지는  $x_d$ 와 그 共分散行列  $P_d$ 에 依하여 決定되는 것을 알 수 있다.

萬一 初期推定值에 對한 事前 情報가 全혀 없을 때에는  $P_0 \rightarrow \infty$ 이므로 式(4.27)은 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = x_d = B^{-1} z \dots\dots\dots (4.28)$$

즉 이 때 칼만 필터에 依한 推定位置는 內心 또는 傍心이 되고 系統誤差의 推定値는 內心 또는 傍心에서 各邊에의 距離가 됨을 알 수 있다.

또 萬一 測定值가 全혀 信憑性이 없다면  $R \rightarrow \infty$ 가 되어 式(4.27)은 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \dots\dots\dots (4.29)$$

## [2] 類似重心과의 關係

式(4.24)를 變形하면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + (A^T R^{-1} A + P_0^{-1})^{-1} A^T R^{-1} (z - A \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} A P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.30)$$

式(4.23)에서  $r$ 이 正規分布일 때  $x$ 의 最尤推定值(maximum likelihood estimate)를  $p_e$ 라고 하면

$$\left. \begin{aligned} p_e &= (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} z \\ \text{COV}(p_e) &= P_e = (A^T R^{-1} A)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.31)$$

에는 關係없이 같아진다.

즉 轉位操作이 不正確할 때에는 두 位置線의 交點이 位置線의 測定順序에 따라 다르게 됨을 알 수 있는 바 推定位置 또는 두 位置線의 交點의 差異의 程度는  $w(1)$ 의 크기 및  $h_1$ ,  $h_2$ 에 따라 決定된다.

[2] 轉位操作이 正確한 境遇

이 때는 同時에 세 位置線을 測定한 境遇와 同一하며 位置線의 測定順序에 關係없이 推定值  $\hat{x}$ 는 一定해진다. 또한 外亂  $w(0)=w(1)=w(2)=0$  이므로

$$Q=0, P_1=P_0 \dots\dots\dots(4.20)$$

가 된다.

(1) 系統誤差가 0이 아닐 때

式(4.10)으로부터

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} (z - B \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} B P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.21)$$

(2) 系統誤差가 0일 때

이 때는 偶然誤差만 있는 境遇이며 狀態벡터를 다시 定義하여

$$x^T = (x, y) \dots\dots\dots(4.22)$$

라고 하면  $\phi_k$ 는 2次の 單位行列이며  $w_0$ 는 2次の 벡터가 된다.

測定過程은

$$z = Ax + r \dots\dots\dots(4.23)$$

로 表現되고  $\hat{x}$ 와  $P$ 는 各各 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} (z - A \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} A P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.24)$$

式(4.21) 또는 式(4.24)의  $\hat{x}$ 가 誤差三角形에 있어서 轉位操作이 正確하거나 세 位置線을 同時에 觀測하였을 때 칼만 필터로 推定한 船位가 되며 이 位置는 誤差三角形의 모양 以外에도  $x$ 의 初期推定值  $\hat{x}_0$ 와 그 共分散行列  $P_0$ 에 依하여 決定된다.

實際로 船位에 對한 事前知識은 多少나마 가지고 있는 것이 普通이므로 誤差三角形에 있어서 가장 精度 높은 最適位置는 式(4.10) 또는 式(4.21)과 式(4.24)에 依하여 計算되는  $\hat{x}$ 가 된다.

4.2 最適位置와 內心, 傍心 및 類似重心과의 關係

[1] 內心 또는 傍心과의 關係

式(4.21)을 變形하면<sup>26, 27)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + (B^T R^{-1} B + P_0^{-1})^{-1} B^T R^{-1} (z - B \hat{x}) \\ P &= P_0 - P_0 B^T (B P_0 B^T + R)^{-1} B P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.25)$$

로 되며  $x_d$ 의 共分散行列을  $P_d$ 라고 하면 式(4.2)에서

$$P_d = B^{-1} R B^{-T} \dots\dots\dots(4.26)$$

이므로 式(4.2)와 式(4.26)을 參照하여 式(4.25)를 고쳐쓰면  $\hat{x}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = (P_d^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_d^{-1} x_d + (P_d^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_0^{-1} \hat{x}_0 \dots\dots\dots(4.27)$$

式(4.27)로부터 칼만 필터에 依한 推定位置  $\hat{x}$ 는 初期推定值  $\hat{x}_0$ , 그 共分散行列  $P_0$ , 測定值에 依하여 定하여지는  $x_d$ 와 그 共分散行列  $P_d$ 에 依하여 決定되는 것을 알 수 있다.

萬一 初期推定值에 對한 事前 情報가 全히 없을 때에는  $P_0 \rightarrow \infty$ 이므로 式(4.27)은 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = x_d = B^{-1} z \dots\dots\dots(4.28)$$

즉 이 때 칼만 필터에 依한 推定位置는 內心 또는 傍心이 되고 系統誤差의 推定值는 內心 또는 傍心에서 各邊에의 距離가 됨을 알 수 있다.

또 萬一 測定值가 全히 信憑性이 없다면  $R \rightarrow \infty$ 가 되어 式(4.27)은 다음과 같이 된다.

$$\hat{x} = \hat{x}_0 \dots\dots\dots(4.29)$$

[2] 類似重心과의 關係

式(4.24)를 變形하면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}_0 + (A^T R^{-1} A + P_0^{-1})^{-1} A^T R^{-1} (z - A \hat{x}_0) \\ P &= P_0 - P_0 A^T (A P_0 A^T + R)^{-1} A P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.30)$$

式(4.23)에서  $r$ 이 正規分布일 때  $x$ 의 最尤推定值(maximum likelihood estimate)를  $p_r$ 라고 하면

$$\left. \begin{aligned} p_r &= (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} z \\ \text{cov}(p_r) &= P_r = (A^T R^{-1} A)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.31)$$

로 表現되며 式(4.30)에 式(4.31)을 代入하여 變形하면 다음 式을 얻는다.

$$\hat{x} = (P_r^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_r^{-1} p_r + (P_r^{-1} + P_0^{-1})^{-1} P_0^{-1} \hat{x}_0 \dots\dots\dots(4.32)$$

이 때  $\hat{x}$ 는  $\hat{x}_0$  및  $p_r$ 의 2點과 그 點들의 分散의 크기에 따라 決定되는 點이 된다.

萬一 測定雜音이 白色正規雜音 即

$$R = \sigma_r^2 I \dots\dots\dots(4.33)$$

이면  $p_r$ 는 式(4.5)의 類似重心  $p_r$ 과 一致하게 되며 더우기 初期推定位置에 對한 事前情報가 全히 없을 때 即  $P_0 \rightarrow \infty$ 이면 式(4.32)는

$$\hat{x} = p_r \dots\dots\dots(4.34)$$

이 되어 칼만 필터에 의한 推定位置는 類似重心과 一致하게 된다.

[3] 內心 또는 傍心과 類似重心과의 關係

前述한 바와 같이 三角形의 內心 또는 傍心과 類似重心은 誤差三角形에 있어서 推定 船位와 매우 重要的 關係가 있는 點들이다. 다음에 이들의 相互關係에 대하여 考察의 보기로 한다.

$$\mathbf{e}^T = (1, 1, 1) \dots\dots\dots(4.35)$$

이러 놓으면 式(4.1)과 式(4.3)으로 부터 다음 式을 얻는다.

$$B = (A \mid \mathbf{e})$$

$$B^{-1} = (A \mid \mathbf{e})^{-1} = \left( \begin{array}{c} N \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right) \dots\dots\dots(4.36)$$

단,  $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $N$ :  $2 \times 3$ 行列

$$(A \mid \mathbf{e}) \left( \begin{array}{c} N \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right) = I_3$$

$$AN + \mathbf{e}\mathbf{b}^T = I_3$$

$$\therefore N = (A^T A)^{-1} A^T (I_3 - \mathbf{e}\mathbf{b}^T) \dots\dots\dots(4.37)$$

$$\left( \begin{array}{c} N \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right) (A \mid \mathbf{e}) = I_3$$

$$\left. \begin{array}{l} NA = I_2 \\ N\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{b}^T A = \mathbf{e}_0^T \\ \mathbf{b}^T \mathbf{e} = 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4.38)$$

단,  $\mathbf{e}_0^T = (0, 0)$

式(4.2)에서

$$\mathbf{x}_d = B^{-1}\mathbf{z} = \left( \begin{array}{c} N \\ \mathbf{b}^T \end{array} \right) \mathbf{z} = \left( \begin{array}{c} N\mathbf{z} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{z} \end{array} \right) \dots\dots\dots(4.39)$$

이므로 內心 또는 傍心の 좌표  $\mathbf{p}_i$  및 三角形의 內心 또는 傍心에서 各邊에 이르는 距離  $d_i$ 는 式(4.2) 및 式(4.39)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_i = N\mathbf{z} = (A^T A)^{-1} A^T (I_3 - \mathbf{e}\mathbf{b}^T) \mathbf{z} \\ d_i = \mathbf{b}^T \mathbf{z} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4.40)$$

그러므로 內心 또는 傍心과 類似重心과의 關係는 式(4.5) 및 式(4.40)에 의하여 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_r - d_i \mathbf{p}_A \\ \text{단, } \mathbf{p}_A = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{e} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4.41)$$

內心 또는 傍心과 類似重心과의 距離를  $D_{ir}$ 이라면

$$D_{ir} = d_i \|\mathbf{p}_A\| \dots\dots\dots(4.42)$$



으로 表現되며 正三角形의 境遇에는  $p_A$ 가 0이 되어 內心과 類似重心은 一致한다.

### 4.3 內心과 傍心の 判別

眞位置와 推測位置와의 經度差를  $x$ , 緯度差를  $y$ 라하고 測定時에 系統誤差  $d$ 만 包含된 것으로 보면 高度差의 測定值  $z$ 는 다음과 같이 된다.

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \cos \theta + d = z \dots\dots\dots(4.43)$$

지금 세 天體  $M_1, M_2, M_3$ 의 方位를 各各  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 라 하고 各各의 高度差를  $z_1, z_2, z_3$ 라고 하면 다음 式이 成立한다.<sup>22)</sup>

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ y \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4.44)$$

系統誤差로 因하여 생긴 誤差三角形의 特性은 式(4.44)의 左邊의 行列式에 依하여 左右되므로 이를 fix determinant<sup>22)</sup>라 부르기로 하고 이 fix determinant의 값과 內心 또는 傍心과의 關係에 대하여 考察해 보기로 한다.

fix determinant를  $\Delta$ 로 表示하면  $\Delta$ 는 다음과 같이 된다.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 1 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 1 \end{vmatrix} = -\sin(\theta_3 - \theta_2) - \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_1 - \theta_3) \dots\dots(4.45)$$

세 天體의 方位中에서 어느 두 方位差를 求하면 적어도 하나는  $\pi$ 보다 작다. 지금  $\theta_2 - \theta_1$ 이  $\pi$ 보다 작다고 하고 이를  $\theta_0$ , 또  $\theta_0$  以外의 任意의 두 天體의 方位差인  $\theta_3 - \theta_1$ 을  $\theta_d$ 라고 하면 式(4.45)에서  $\Delta$ 는 다음과 같이 表現된다.

$$\Delta = 4 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_d}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta_d}{2} \dots\dots\dots(4.46)$$

式(4.46)에서  $0 \leq \frac{\theta_0}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \frac{\theta_d}{2} \leq \pi$ 이므로  $\sin \frac{\theta_d}{2} > 0$ ,  $\sin \frac{\theta_0}{2} > 0$  이고 또한  $0 \leq \left| \frac{\theta_0 - \theta_d}{2} \right| \leq \pi$ 인 點에 留意하면  $\Delta$ 의 符號는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \theta_d < \theta_0 \text{ 이면 } \Delta > 0 \\ \text{ii) } \theta_d > \theta_0 \text{ 이면 } \Delta < 0 \\ \text{iii) } \theta_d = 0, \text{ 또는 } \theta_0 = 0, \text{ 또는 } \theta_d = \theta_0 \text{ 이면 } \Delta = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(4.47)$$

특히 式(4.47)의 iii)의 境遇에는 어느 두 天體의 方位가 같아져서 誤差三角形이 이루어지지 않음을 意味한다.

式(4.46)에서

$$\frac{d\Delta}{d\theta_d} = 4 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \left( \frac{\theta_0}{2} - \theta_d \right) \dots\dots\dots(4.48)$$



이므로  $0 \leq \theta_d \leq 2\pi$ 임을 考慮하면  $\Delta$ 는  $\theta_d$ 가  $\frac{\theta_0}{2}$ 일 때 極大,  $\pi + \frac{\theta_0}{2}$ 일 때 極小이며 이를 式 (4.46)에 代入하면 極大值  $\Delta_{max}$ . 및 極小值  $\Delta_{min}$ .을 얻을 수 있다.

$$\Delta_{max} = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} (1 - \cos \frac{\theta_0}{2}) \dots\dots\dots (4.49)$$

특히  $\theta_0 = 0$ 이면  $\Delta_{max} = 0$ ,  $\theta_0 = \pi$ 이면  $\Delta_{max} = 2$ 이므로  $\Delta_{max}$ .가 취하는 값은 다음과 같다.

$$0 \leq \Delta_{max} \leq 2 \dots\dots\dots (4.50)$$

$$\Delta_{min} = -2 \sin \frac{\theta_0}{2} (1 + \cos \frac{\theta_0}{2}) \dots\dots\dots (4.51)$$

그런데  $\Delta_{min}$ .은  $\theta_0$ 에 따라 그 값이 달라지며  $\theta_0 = \frac{2}{3}\pi$ 이고  $\theta_d = \pi + \frac{\theta_0}{2}$  일 때  $\Delta_{min}$ .은 最小이고 그 最小値는  $-2.598$ 이 된다.

또 任意의 角  $\omega$ 에 대하여

$$\Delta_{\theta_d = \frac{\theta_0}{2} + \omega} = \Delta_{\theta_d = \frac{\theta_0}{2} - \omega} \dots\dots\dots (4.52)$$

$$\Delta_{\theta_d = \pi + \frac{\theta_0}{2} + \omega} = \Delta_{\theta_d = \pi + \frac{\theta_0}{2} - \omega}$$

이므로  $\Delta$ 는  $\theta_d = \frac{\theta_0}{2}$  및  $\theta_d = \pi + \frac{\theta_0}{2}$ 에 대하여 對稱이다.

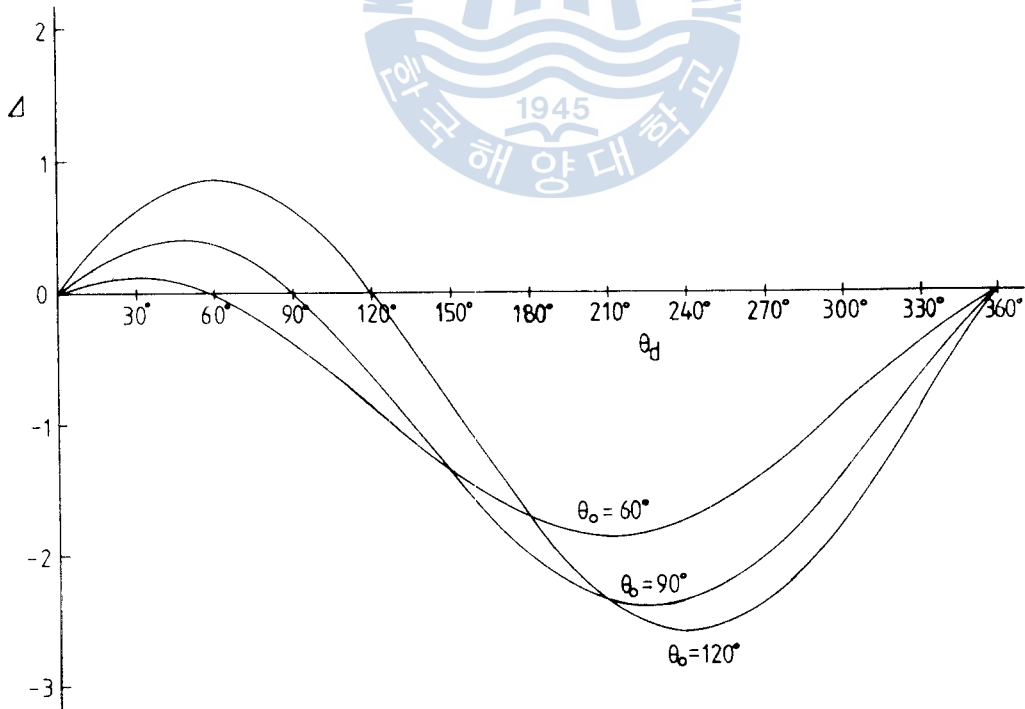


Fig. 4-2. Relation between  $\theta_d$  and  $\Delta$ .

그리고  $\pi < \theta_d < \pi + \theta_0$ 인 境遇에 船位는 誤差三角形의 內部에, 그 밖의 境遇에는 外部에 存在하므로 그 境界는  $\theta_d = \pi$  또는  $\theta_d = \pi + \theta_0$ 이고 이 때  $\Delta$ 는 式(4.46)에서

$$\Delta = -2 \sin \theta_0 \dots \dots \dots (4.53)$$

로 表現되며 이 境遇에는 두 位置線이 平行하게 되어 誤差三角形은 形成되지 않으나 船位는 各位置線에 이르는 距離가 同一한 點으로써 決定된다.

以上の 結果를 圖示하면 Fig. 4-2와 같고 또  $\Delta$ 의 값과 船位의 關係는 다음과 같이 要約된다.

- (i)  $\Delta < -2 \sin \theta_0$ 이면 船位는 誤差三角形의 內心이다.
- (ii)  $\Delta > -2 \sin \theta_0$ 이면 船位는 誤差三角形의 傍心이다.
- (iii)  $\Delta = 0$  또는  $\Delta = -2 \sin \theta_0$ 이면 誤差三角形은 생기지 않으나 船位는 各位置線에 이르는 距離가 同一한 點으로써 決定된다.

以上과 같이 세 天體의 方位  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 에 依하여 이루어지는 行列式  $\Delta$ 를 利用하면 系統 誤差로 因하여 誤差三角形이 생겼을 때 그 船位를 內心 또는 傍心 가운데 어느 쪽으로 定할 것인가를 決定할 수 있다. 이를 例題를 通하여 確認코자 한다.

[例題 1] 세 天體의 方位가 各各  $000^\circ.2, 091^\circ.3, 158^\circ.4$ 인 境遇

[解] 式(4.45)에 依하여

$$\Delta = -\sin 67^\circ.1 - \sin 91^\circ.2 - \sin(-158^\circ.2) = -1.55$$

$$\theta_0 = 91^\circ.2 (< \pi) \text{로 보면}$$

$$-2 \sin \theta_0 = -2.00$$

$$\therefore \Delta > -2 \sin \theta_0$$

故로 船位는 誤差三角形의 傍心이다.

[例題 2] 세 天體의 方位가 各各  $030^\circ.5, 129^\circ.6, 309^\circ.6$ 인 境遇

[解]  $\Delta = -\sin 180^\circ - \sin 99^\circ.1 - \sin(-279^\circ.1) = 0$

故로 이 때에는 誤差三角形이 생기지는 않으나 各位置線에 이르는 距離가 同一한 點이 船位이다.

[例題 3] 세 天體의 方位가 各各  $063^\circ.5, 158^\circ.4, 327^\circ.5$ 인 境遇

[解]  $\Delta = -\sin 169^\circ.1 - \sin 94^\circ.9 - \sin(-246^\circ.0) = -2.18$

$$\theta_0 = 94^\circ.9 \text{라면}$$

$$-2 \sin \theta_0 = -2.00$$

$$\therefore \Delta < -2 \sin \theta_0$$

故로 船位는 誤差三角形의 內心이다.

4.4 시뮬레이션 및 檢討

本節에서는 以上の 結果를 土臺로 誤差三角形이 생겼을 때 칼만 필터에 의한 推定位置가 內心, 傍心 또는 類似重心을 船位로 定한 것과 比較하여 얼마나 精度改善이 되는가를 시뮬레이션을 通하여 檢討하기로 한다.

Table 4-1. Azimuth adopted in simulation and identification of internal or external fix by  $\Delta$ .

Case	$\theta_i$	Fix determinant( $\Delta$ )	Inside or outside
1	000°, 090°, 210°	-2.366	Inside
2	000°, 120°, 240°	-2.598	Inside
3	000°, 150°, 300°	-1.866	Inside
4	000°, 030°, 090°	-0.366	Outside
5	000°, 060°, 120°	-0.866	Outside
6	000°, 060°, 150°	-1.366	Outside

Table 4-1에 나타난 여섯가지 境遇에 대하여 시뮬레이션을 行하기로 하고 여기에 採擇한 定數는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} &= \sigma_{y_0} = 1'.0, 3'.0, 5'.0 \\ d &= 0, 1'.5, 3'.0 \\ \sigma_{d_0} &= 0.15 \times d \end{aligned}$$

또 測定雜音  $r_k$ 는 平均值가 0이고 서로 獨立인 正規亂數를 使用하고 그 標準偏差  $\sigma_r$ 을 0'.1에서 1'.0까지 0'.1間隔으로 바꾸어 가면서 眞位置로부터 內心, 傍心, 類似重心 및 칼만 필터에 의한 推定位置까지의 距離인  $D_i, D_{ex}, D_r$  및  $D_{kal}$ 을 計算하여 그 精度를 比較 檢討하기로 한다.

시뮬레이션의 結果 Table 4-1의 1, 2, 3과 같이 船位가 誤差三角形의 內部에 있는 境遇에서는 初期推定位置의 精度가 比較的 낮고( $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 5'.0$ ) 또한  $\sigma_r$ 이 작을 때( $\sigma_r \leq 0'.2$ )에만 例外的으로  $D_i$ 가 最小로 되었을 뿐 恒常  $D_{kal}$ 이 最小로 되어 칼만 필터에 의한 推定位置의 精度가 높다는 것이 判明되었다.

다음에 4, 5, 6과 같이 船位가 誤差三角形의 外部에 存在하는 境遇에서는  $d, \sigma_r$ 의 크기에 따라 複雜하게 變化하여  $D_{ex}, D_r$  및  $D_{kal}$ 의 關係를 一律적으로 斷定할 수 없다. 다만 初期推定位置의 精度가 比較的 높은 때( $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1'.0$ )에는 다음 事實이 確認되었다.  $d=0$ 인 때에는  $\sigma_r$ 이 微小하여 誤差三角形이 極端 작고 따라서  $D_{ex} \approx D_r \approx D_{kal}$ 이 되는 때가 아니면

恒常  $D_{kal} < D_r$  이 된다.

다음에  $d \neq 0$ 인 경우에는  $\sigma_r$ 이 微小하면  $D_{ex} < D_{kal}$ ,  $\sigma_r$ 이 큰 때에는  $D_{kal} < D_{ex}$ 이 되는데 初期推定位置의 誤差가 작을수록 偶然誤差의 크기에 關係없이  $D_{kal} < D_{ex}$ 로 되는 傾向을 볼 수 있다.

以上の 結果로 미루어 誤差三角形에 있어서 칼만 필터에 의한 推定船位의 精度는 初期推定位置의 精度에 左右된다고 보아야 할 것 같다.

시뮬레이션을 행한 上記 여섯가지 境遇중에서 2의 境遇는 誤差三角形이 正三角形이 되어  $D_i = D_r = D_{kal}$ 이 되므로 이를 除外하고 特히  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 3'.0$ ,  $d = 1'.5$ 인 때 Table 4-1의 1, 3, 4, 5, 6의 各 境遇에 대한  $D_i$ ,  $D_{ex}$ ,  $D_r$  및  $D_{kal}$  등의 關係를 圖示하면 Fig. 4-3~Fig. 4-7과 같다.

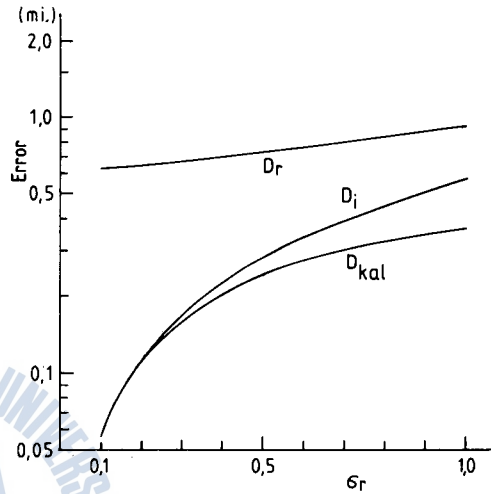


Fig. 4-3.  $D_i$ ,  $D_r$  and  $D_{kal}$  vs  $\sigma_r$ .  
( $\theta_1 = 000^\circ$ ,  $\theta_2 = 090^\circ$ ,  $\theta_3 = 210^\circ$ ).

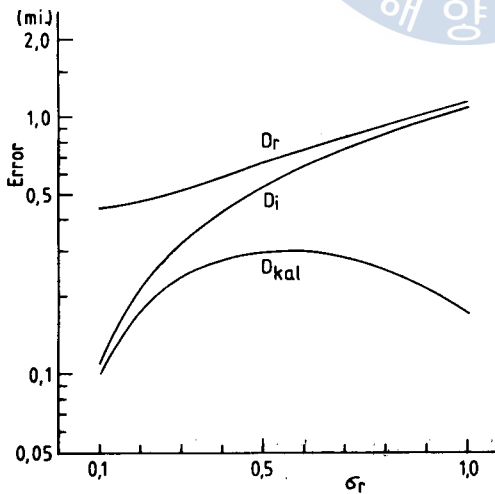


Fig. 4-4.  $D_i$ ,  $D_r$  and  $D_{kal}$  vs  $\sigma_r$ .  
( $\theta_1 = 000^\circ$ ,  $\theta_2 = 150^\circ$ ,  $\theta_3 = 300^\circ$ ).

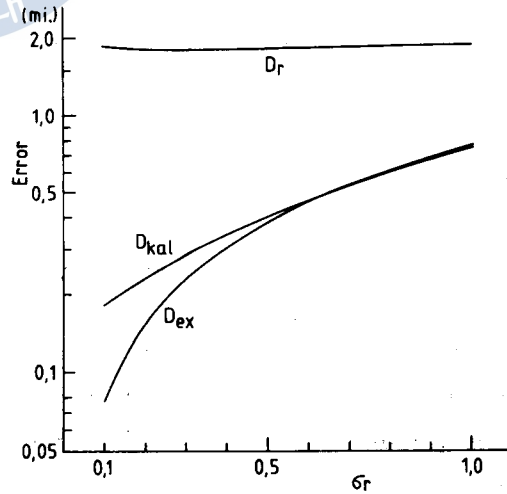


Fig. 4-5.  $D_{ex}$ ,  $D_r$  and  $D_{kal}$  vs  $\sigma_r$ .  
( $\theta_1 = 000^\circ$ ,  $\theta_2 = 030^\circ$ ,  $\theta_3 = 090^\circ$ ).

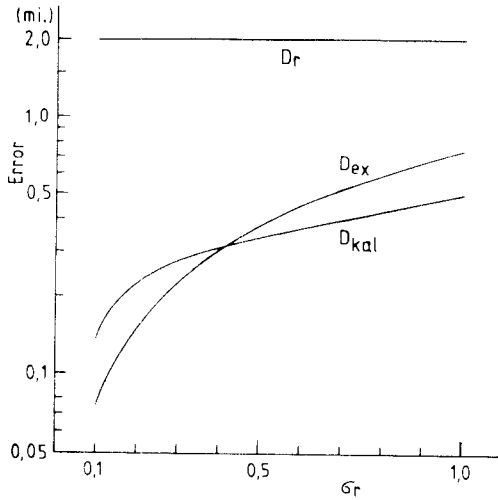


Fig. 4-6.  $D_{ex}$ ,  $D_r$  and  $D_{kal}$  vs  $\sigma_r$ .  
 ( $\theta_1=000^\circ$ ,  $\theta_2=060^\circ$ ,  $\theta_3=120^\circ$ ).

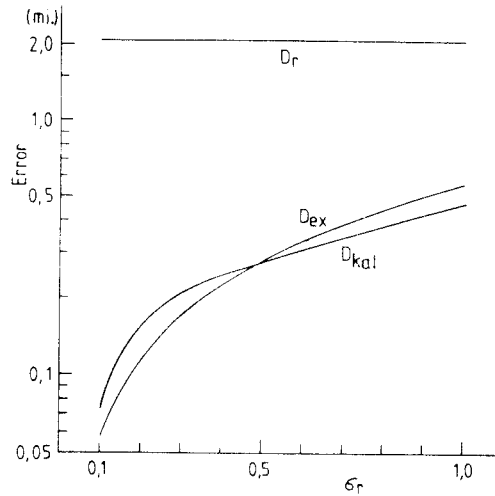


Fig. 4-7.  $D_{ex}$ ,  $D_r$  and  $D_{kal}$  vs  $\sigma_r$ .  
 ( $\theta_1=000^\circ$ ,  $\theta_2=060^\circ$ ,  $\theta_3=150^\circ$ ).

## 第 5 章 船位誤差에 關한 考察

測定된 船位의 誤差를 나타내는 方法으로는 誤差平行四邊形方式, 誤差橢圓方式 및 誤差圓方式 等을 들 수 있다.

이들은 各己 特色이 있으나 本章에서는 第2章과 第3章에서의 實測位置와 칼만 필터로 推定한 最適位置의 誤差界를 實用性에 보다 重點을 두는 誤差圓方式에 依하여 表示하는 方法 및 그 結果를 서로 比較檢討하므로써 칼만 필터에 依한 推定船位의 精度가 改善되는 程度에 對하여 考察하려 한다.

그리고 天測位置 決定法에 있어서 眞位置와 推測 또는 假定位置와의 差異로 因한 計算方位의 誤差에 關해서도 檢討하기로 한다.

### 5.1 船位의 確率圓에 對한 理論的 考察

推定 또는 實測位置의 經度誤差와 緯度誤差를 距離로 換算한 各各의 標準偏差  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  중에서 작은 것을  $\sigma_1$ , 큰 것을  $\sigma_2$ 라 하고 船位를 原點으로 하는 直交座標에서 標準偏差가 작은 쪽의 座標를  $X_1$ , 큰 쪽의 座標를  $X_2$ 라 하며  $X_1$ 과  $X_2$ 는 統計的으로 서로 獨立인 正規分布

$$X_1 : N(0, \sigma_1^2)$$

$$X_2 : N(0, \sigma_2^2)$$

라고 假定하면  $X_1$ 과  $X_2$ 의 結合確率密度函數  $f(X_1, X_2)$ 는 다음과 같이 된다.

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{X_2^2}{\sigma_2^2}\right)} \dots\dots\dots(5.1)$$

Fig. 5-1에서 推定 또는 實測位置  $O$ 를 中心으로 하고 半徑  $R_0$ 인 圓의 內部에 船位가 存在할 確率  $F(R_0)$ 를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F(R_0) &= \iint_{X_1^2 + X_2^2 \leq R_0^2} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-R_0}^{R_0} \left( e^{-\frac{X_2^2}{2\sigma_2^2}} \int_{-\sqrt{R_0^2 - X_2^2}}^{\sqrt{R_0^2 - X_2^2}} e^{-\frac{X_1^2}{2\sigma_1^2}} dX_1 \right) dX_2 \\ &= \frac{4}{2m\pi\sigma_1^2} \int_0^{R_0} e^{-\frac{X_2^2}{2m^2\sigma_1^2}} \int_0^{\sqrt{R_0^2 - X_2^2}} e^{-\frac{X_1^2}{2\sigma_1^2}} dX_1 dX_2 \dots\dots\dots(5.2) \end{aligned}$$

단,  $m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geq 1$

95% 確率圓의 半徑 즉  $F(R_0) = 0.95$ 인  $R$ 의 값을  $R_c$ 라하면 式(5.2)에 의하여 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\frac{2}{m\pi\sigma_1^2} \int_0^{R_c} \left( e^{-\frac{X_2^2}{2m^2\sigma_1^2}} \int_0^{\sqrt{R_c^2 - X_2^2}} e^{-\frac{X_1^2}{2\sigma_1^2}} dX_1 \right) dX_2 = 0.95 \dots\dots\dots(5.3)$$

다음에  $m=1$ 인 경우와  $m \neq 1$ 인 경우의  $R_c$ 에 對하여 살펴보기로 한다.

[1]  $m=1$  ( $\sigma_1 = \sigma_2$ )인 경우

이 때는 式(5.3)을 滿足하는  $R_c$ 를 다음과 같이 求할 수 있다.

지금 直角座標 ( $X_1, X_2$ )를 極座標 ( $r, \theta$ )로 變換하기 위하여

$$X_1 = r \cos \theta, \quad X_2 = r \sin \theta$$

라 놓으면

$$X_1^2 + X_2^2 = r^2$$

$$f(r, \theta) = f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial X_2}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

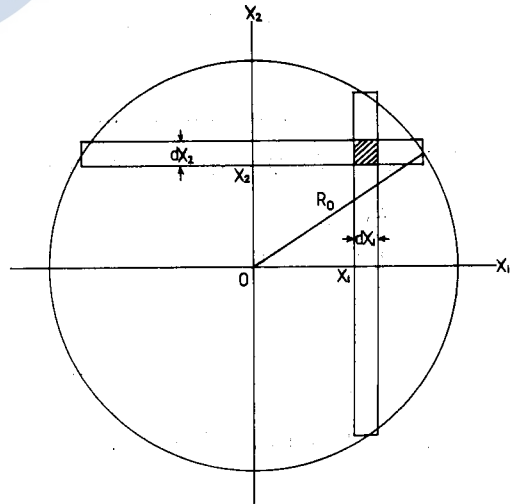


Fig. 5-1. Computation of radial error.

이므로 座標變換의 函數行列式  $|J|$ 는

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \dots\dots\dots(5.4)$$

로 表現된다. 따라서 다음 關係가 成立한다.

$$\begin{aligned} \iint_{X_1^2+X_2^2 \leq R_0^2} f(X_1, X_2) dX_1 dX_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} f(r, \theta) |J| dr d\theta \\ &= \int_0^{R_0} f(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{\sigma_1^2} \int_0^{R_0} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}} r dr \dots\dots\dots(5.5) \end{aligned}$$

式(5.5)에서  $\frac{r^2}{2\sigma_1^2} = z$ 라 놓으면

$$\frac{r}{\sigma_1^2} dr = dz \dots\dots\dots(5.6)$$

이므로  $R_c$ 는 다음과 같이 求해진다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{R_c^2}{2\sigma_1^2}} e^{-z} dz &= 0.95 \\ 1 - e^{-\frac{R_c^2}{2\sigma_1^2}} &= 0.95 \\ \therefore R_c &= \sqrt{2 \log_e 20} \sigma_1 = \sqrt{5.99} \sigma_1 = 2.448 \sigma_1 \\ &= \sqrt{2.995} \sigma = 1.73 \sigma \dots\dots\dots(5.7) \end{aligned}$$

단,  $\sigma = \sqrt{2} \sigma_1$

[2]  $m \neq 1$  ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ )인 경우

式(5.3)에서

$$R_c = K_0 \sigma_1 \dots\dots\dots(5.8)$$

이라 놓으면 式(5.3)은 다음과 같이 變形된다.

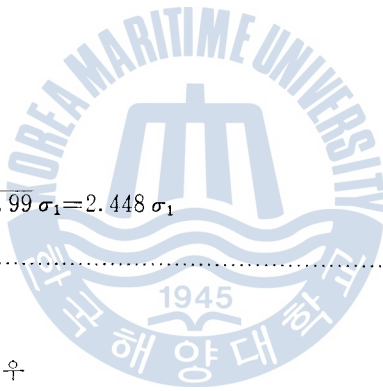
$$\int_0^{K_0} \left( e^{-\frac{X_2^2}{2m^2}} \int_0^{\sqrt{K_0^2 - X_2^2}} e^{-\frac{X_1^2}{2}} dX_1 \right) dX_2 = 0.475 m \pi \dots\dots\dots(5.9)$$

다음에

$$\left. \begin{aligned} R_c &= K\sigma \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.10)$$

이라 놓으면 다음 關係式을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} K_0 \\ \sigma &= \sqrt{1+m^2} \sigma_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.11)$$



式(5.9) 및 式(5.11)에서  $K_0$  및  $K$ 는  $m$ 만의 函數임을 알 수 있다. 그러나 이  $K_0$ 와  $K$ 의 값은 解析的으로 求하기는 困難하고 數值計算에 依하여 求할 수 밖에 없으므로<sup>28)</sup> 여러가지  $m$ 값에 대하여  $K_0$ 와  $K$ 의 값을 數值計算하여 圖示하면 Fig. 5-2와 같다.

Fig. 5-2에서 보면  $K$ 의 값은  $m$ 의 廣範圍한 變化에도 거의 1.73~2.00의 範圍內에 있는 것을 알 수 있다. 따라서 近似的으로  $R_c$ 를 求할 때에는 다음 式을 利用하여도 좋다.

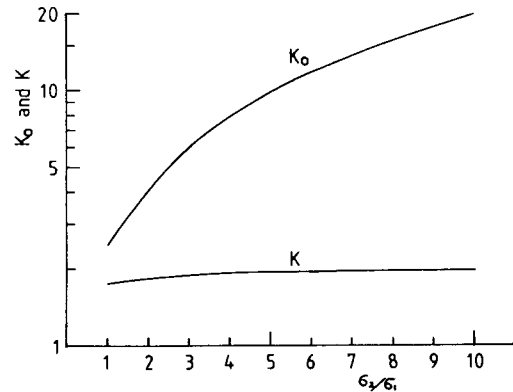


Fig. 5-2.  $K_0$  and  $K$  vs  $\sigma_2/\sigma_1$ .

$$R_c \doteq 2\sigma \dots\dots\dots(5.12)$$

5.2 各種船位의 95%確率圓

本節에서는 前節에서 考察한 結果를 利用하여 第2章, 第3章에서 얻은 諸船位 즉 칼만 필터에 依한 推定位置와 位置線의 交點으로 얻은 實測位置에 對하여 95%確率圓의 半徑이 測定回數와 더불어 어떻게 變化하는가를 比較檢討하기로 한다.

[1]  $\sigma_x$  및  $\sigma_y$ 의 計算

95%確率圓의 半徑을 計算하기 위해서는 于先 各船位의 經度方向의 標準偏差  $\sigma_x$  및 緯度方向의 標準偏差  $\sigma_y$ 를 알아야 하는바 이는 다음과 같이 計算된다.

(1) 칼만 필터에 依한 推定位置의 경우

第2章 및 第3章에 있어서  $\hat{x}(k|k)$ 의 共分散行列  $P(k|k)$ 의  $(i, j)$ 要素를  $P_{ij}$ 라고 하면

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= P_{11} \cos^2 \varphi \\ \sigma_y^2 &= P_{22} \\ \therefore \sigma_x &= \cos \varphi \sqrt{P_{11}} \\ \sigma_y &= \sqrt{P_{22}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.13)$$

(2) 天測位置線의 交點인 경우

確率圓에 對하여 考察하는 限 座標軸은 絕對的인 것이 아니므로 Fig. 5-3과 같이 推測位置  $O$ 를 지나 任意의 位置線과 平行한 方向으로  $x$ 軸을 잡고 亦是  $O$ 를 지나 이와 直角인 方向에  $y$ 軸을 잡아 두 位置線의 交點  $S$ 의  $x$ 座標,  $y$ 座標를 各各 推測位置와의 經度差 및 緯度差로 보면 두 天測位置線의 方程式은



$$z = Hp_m \dots\dots\dots(5.14)$$

$$\text{단, } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\psi \cos\varphi & -\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$z^T = (z_1, z_2)$$

$$p_m^T = (x, y)$$

로 表現되고 두 位置線의 交點은 다음 式으로 求해진다.

$$p_m = H^{-1}z \dots\dots\dots(5.15)$$

그리고

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_2}^2 \end{pmatrix}$$

$$P_m = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

라고 하면

$$P_m = H^{-1}RH^{-T} \dots\dots\dots(5.16)$$

이며  $\sigma_x, \sigma_y$ 는 다음 式으로 求해진다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_{a_1}^2 \cot^2\psi + \sigma_{a_2}^2 \csc^2\psi \\ \sigma_y &= \sigma_{a_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.17)$$

(3) 方位에 의한 두 位置線의 交點인 경우

이 경우는 式(3.11)의  $R_s$  즉

$$R_s = M_k R M_k^T \dots\dots\dots(5.18)$$

가 交點의 共分散行列이다. 따라서  $R_s$ 의  $(i, j)$ 要素를  $R_{ij}$ 라고 하면  $\sigma_x, \sigma_y$ 는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2 &= R_{11} \cos^2\varphi \\ \sigma_y^2 &= R_{22} \\ \therefore \sigma_x &= \cos\varphi \sqrt{R_{11}} \\ \sigma_y &= \sqrt{R_{22}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.19)$$

[2] 시뮬레이션 및 檢討

推定 또는 實測位置의 共分散行列  $P(k|k), P_m, R_s$  등을 調査하여 보면 그 對角要素 以外の 要素들의 값이 一般의으로는 0이 되지 않고 작으나마 값을 갖는다. 즉 推定 또는 實測位置의 經緯度座標가 統計的으로서로 獨立이 아니다. 그러나 그 相關係數는 一般의으로 微小하므로 本節에서는 이를 無視하기로 하고 칼만 필터에 의한 推定位置와 두 位置線의 交點으로 求한 位置에 對하여 95% 確率圓의 半徑  $R_c$ 를 計算하여 圖示하면 Fig. 5-4 및 Fig. 5-5와 같다. 이에 依하면 恒常 칼만 필터에 의한 船位의 精度가 顯著히 높다는 것을 알 수 있다.

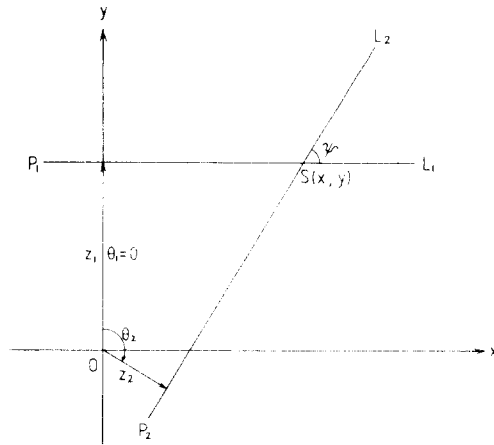
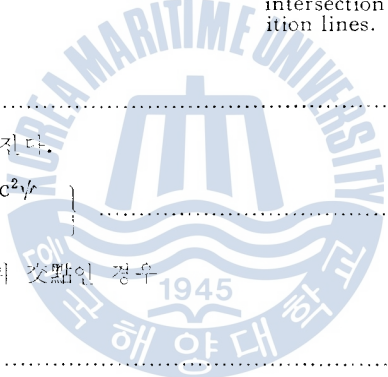


Fig. 5-3. Computation of  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  of the intersection of two celestial position lines.



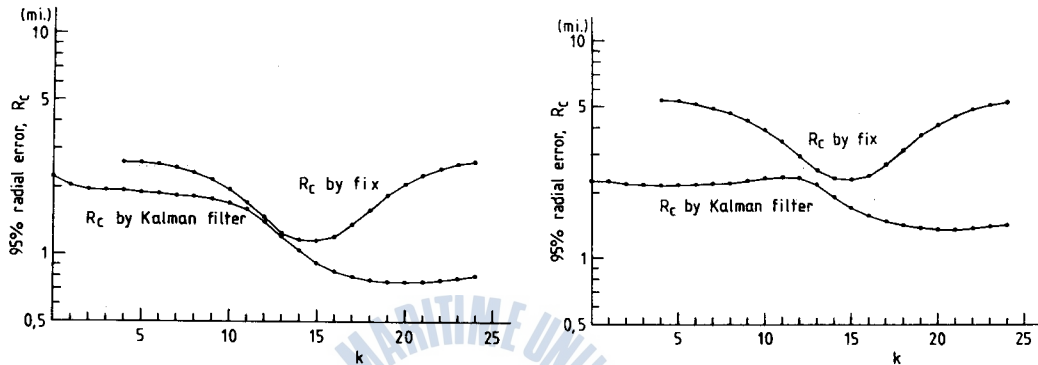


Fig. 5-4. A. 95% radial errors( $R_c$ ) of the running fix by sun sight and the estimated position by Kalman filter. ( $\sigma_a=0'.5$ ,  $\sigma_v=0.5$ kn,  $\sigma_{v_0}=2.3$ kn,  $\sigma_h=\sigma_b=0.015$ kn,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ )

Fig. 5-4. B. 95% radial errors( $R_c$ ) of the running fix by sun sight and the estimated position by Kalman filter. ( $\sigma_a=1'.0$ ,  $\sigma_v=1.0$ kn,  $\theta_{v_0}=2.3$ kn,  $\sigma_h=\sigma_b=0.030$ kn,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ ).

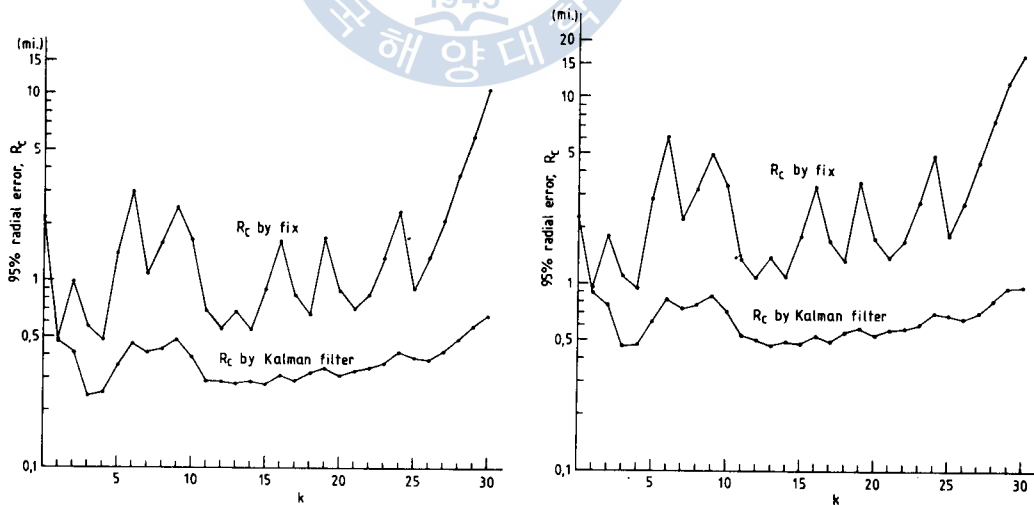


Fig. 5-5. A. 95% radial errors( $R_c$ ) of the fix by cross bearing and the estimated position by Kalman filter. ( $\sigma_\alpha=\sigma_\beta=1^\circ.0$ ,  $\sigma_v=0.5$ kn,  $\sigma_{v_0}=2.3$ kn,  $\sigma_h=\sigma_b=0.015$ kn,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ ).

Fig. 5-5. B. 95% radial errors( $R_c$ ) of the fix by cross bearing and the estimated position by Kalman filter. ( $\sigma_\alpha=\sigma_\beta=2^\circ.0$ ,  $\sigma_v=1.0$ kn,  $\sigma_{v_0}=2.3$ kn,  $\sigma_h=\sigma_b=0.015$ kn,  $\sigma_{x_0}=\sigma_{y_0}=1'.0$ ).

5.3 眞位置와 推測位置의 差異로 因한 位置線의 誤差

天測位置線을 決定할 때에는 通常 眞位置를 알 수 없으므로 推測 또는 假定位置에 對한 方位를 計算하게 되므로 이 때에 眞位置와 推測 또는 假定位置와의 差異때문에 計算方位에 誤差가 생기게 된다. 이 方位誤差가 位置線의 誤差로 作用하게 되는데 本節에서는 이의 影響에 對하여 살펴보기로 한다.

眞位置와 推測位置間의 東西方向의 距離를  $X$ , 南北方向의 距離를  $Y$ 라고 하면 Fig. 2-2에서 位置線의 方程式은

$$X \sin \theta + Y \cos \theta = a \dots \dots \dots (5.20)$$

로 表現되며 方位  $\theta$ 에  $\Delta\theta$ 인 誤差가 包含되어 있다면 高度差  $a$ 에도  $\Delta a$ 만큼의 誤差가 包含되며 이것이 位置線의 誤差로 된다.

지금 Fig. 2-2에서 眞位置  $S$ 와 推測 또는 假定位置  $O$ 와의 距離를  $s$ (單位는 파일)라고 하면  $\Delta a$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta a &= [X \sin(\theta + \Delta\theta) + Y \cos(\theta + \Delta\theta)] - (X \sin \theta + Y \cos \theta) \\ &= X \sin \theta \cos \Delta\theta + X \cos \theta \sin \Delta\theta + Y \cos \theta \cos \Delta\theta - Y \sin \theta \sin \Delta\theta - (X \sin \theta + Y \cos \theta) \end{aligned}$$

그런데  $\Delta\theta$ 는 微小角이므로  $\cos \Delta\theta = 1$ ,  $\sin \Delta\theta = \Delta\theta$ 라 놓으면

$$\Delta a = (X \cos \theta - Y \sin \theta) \Delta\theta = ES \cdot \Delta\theta \dots \dots \dots (5.21)$$

단,  $\Delta\theta$ 는 radian單位

로 된다.

다음에 方位誤差  $\Delta\theta$ 를 구하기 爲하여 Fig. 5-6과 같이 位置圈  $ES$ 上的 眞位置를  $S$ , 推測 또는 假定 位置를  $O$ , 天體의 地位를  $M$ 이라 하고 이들을 各各 大圈으로 連結하여 이루어진 球面三角形  $OSM$ 에 Sine 法測을 適用하면

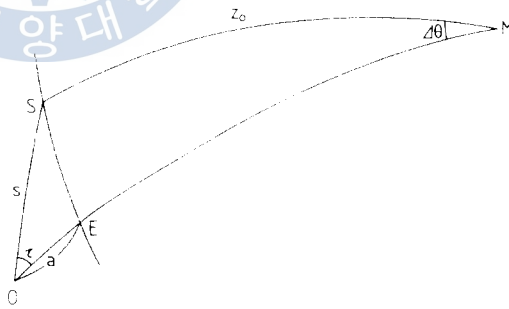


Fig. 5-6. Explanation of  $s$  and  $\Delta\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sin \Delta\theta}{\sin s} &= \frac{\sin \tau}{\sin z_0} \\ \therefore \sin \Delta\theta &= \frac{\sin s \sin \tau}{\sin z_0} \dots \dots \dots (5.22) \end{aligned}$$

를 얻게 되며  $\Delta\theta$  및  $s$ 는 微小하므로  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ ,  $\sin s \approx s$ 이고 또  $\tau = 90^\circ$ 일 때  $\Delta\theta$ 는 最大이므로 이를  $\Delta\theta_{max}$ 라고 놓으면 式(5.22)는 다음과 같이 된다.

$$\Delta\theta_{max} = \frac{s}{60 \sin z_0} \dots \dots \dots (5.23)$$

단,  $\Delta\theta_{max}$ 는 度,  $s$ 는 分單位

그런데  $\tau=90^\circ$ 인 때  $a=0$ 이므로 式(5.21)의  $ES$  및 式(5.23)의  $s$ 는 모두

$$s = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda \cos\varphi)^2} \dots\dots\dots (5.24)$$

로 나타낼 수 있으며 따라서 式(5.23)과 式(5.24)를 式(5.21)에 代入하고 單位를 考慮하면 方位의 最大誤差  $\Delta\theta_{max}$ 에 對한 高度差의 最大誤差  $\Delta a_{max}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\Delta a_{max} = \frac{s^2}{3438 \sin z_0} = \frac{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda \cos\varphi)^2}{3438 \sin z_0} \dots\dots\dots (5.25)$$

一般的으로  $s$ 는 Morrison이 假定한 것처럼 15海里를 넘는 일은 없으나<sup>22)</sup> 假定位置를 써서 計算하는 경우에는  $s$ 의 最大值  $s_{max}$ 는

$$s_{max} = \sqrt{(30)^2 + (30 \cos\varphi)^2}$$

으로 볼 수 있으므로 式(5.23)에 依한  $\Delta\theta_{max}$  및 式(5.25)에  $s_{max}$ 를 代入하여 求한  $\Delta a_{max}$ 를 各各 算出하면 Table 5-1과 같이 된다.

이 結果를 보면  $s=15'$ 이고 高度  $75^\circ$ 以下에 對하여 計算方位誤差로 因한 位置線의 誤差는 最大로  $0'.25$ 에 達하는 것을 알 수 있다.

특히 假定位置를 使用하여 計算하는 경우에 이 誤差는 高度  $75^\circ$ 以下로 보아도 最大  $2'.02$ 에 達하는 바 이 誤差가 位置線에 意外로 큰 影響을 미칠 수도 있다는 點을 看過하여서는 안된다.

Table 5-1. Computations of  $\Delta\theta_{max}$  and  $\Delta a_{max}$ .

$\varphi$	$s$	$z_0$											
		60°		50°		40°		30°		20°		15°	
		$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$	$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$	$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$	$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$	$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$	$\Delta\theta_{max}$	$\Delta a_{max}$
0°	15'	0°.29	0'.08	0°.33	0'.09	0°.39	0'.10	0°.50	0'.13	0°.73	0'.19	0°.97	0'.25
	42'.4	0°.82	0'.60	0°.92	0'.68	1°.10	0'.81	1°.41	1'.05	2°.07	1'.52	2°.73	2'.02
30°	15'	0°.29	0'.08	0°.33	0'.09	0°.39	0'.10	0°.50	0'.13	0°.73	0'.19	0°.97	0'.25
	39'.7	0°.76	0'.53	0°.86	0'.60	1°.03	0'.71	1°.32	0'.92	1°.93	1'.34	2°.56	1'.77
60°	15'	0°.29	0'.08	0°.33	0'.09	0°.39	0'.10	0°.50	0'.13	0°.73	0'.19	0°.97	0'.25
	33'.5	0°.64	0'.38	0°.73	0'.43	0°.87	0'.51	1°.12	0'.65	1°.63	0'.95	2°.16	1'.26

### 第 6 章 結 論

本 論文에서는 그 適用이 比較的 어렵다고 여겨지는 天測과 交叉方位法에 依한 船位 測定法에 찰만 필터를 適用함으로써 船位의 精度를 改善하는 方法과 誤差三角形의 處理問題

및 船位誤差界에 對해서 考察하였다.

그 結果 測定時間間隔이 긴 天測時와 方位測定時에도 칼만 필터를 適用할 수 있으며 이 方法에 依한 推定位置의 精度가 매우 높다는 것을 알 수 있었다.

天測位置決定에 있어서 線型 칼만 필터를 適用하여 얻은 推定位置 즉 最適位置를 決定하는 알고리즘을 提示하고 여러가지 境遇에 對한 시뮬레이션을 通하여 實測位置와 最適位置를 比較檢討한 바 測定回數가 增加할수록 最適位置의 精度가 높아짐은 물론이고 2, 3회의 測定만으로도 最適位置의 精度는 두텁이 改善되는 것이 確認되었다. 또한 位置線의 精度가 높고 交角條件이 良好하여 測定位置의 精度가 높은 때일수록 칼만 필터에 依한 最適位置는 精度가 높아지는 데 實測位置의 誤差에 對한 最適位置의 誤差의 比( $D_{kat}/D_{fix}$ )는 오히려 測定의 精度가 낮은 때에 작은 것을 알 수 있었다. 이는 精密測定이 되지 않는 경우에도 칼만 필터의 效果가 크다는 것을 意味한다. 最適位置는 外亂, 船位 및 系統誤差에 對한 初期推定值의 誤差에도 影響을 받으며 이들 誤差가 크면 當然히 精度는 떨어지는 傾向을 보인다. 시뮬레이션에서 이들 誤差 즉 雜音을 實際의 경우보다 多少 過大하게 取하였음에도 實測位置보다도 最適位置의 精度가 恒常 높게 나타났다. 따라서 外亂, 初期推定值 및 系統誤差를 正確히 推定하면 할수록 最適位置의 精度는 더욱 높아진다는 것을 알 수 있다.

交叉方法에 있어서는 一般적으로 測定時間間隔이 길 뿐만 아니라 測定過程이 非線型이어서 原來의 非線型 칼만 필터를 그대로 適用하기 困難하다. 그러므로 非線型 칼만 필터를 一部 修正하여 交叉方法에도 適用될 수 있는 修正 非線型 칼만 필터를 構成하는 方法을 提示하였는데 이 필터는 實際로 船位推定에 매우 効果적인 方法임이 시뮬레이션을 通하여 判明되었다. 이 경우에도 天測의 경우와 마찬가지로 最適位置의 精度는 測定의 精度와 外亂, 初期推定值의 誤差 등과 密接한 關係가 있으나 測定回數에 關係없이 最適位置의 精度가 항상 높고 測定回數가 增加하면 外亂, 初期推定值의 誤差 등에는 거의 影響을 받지 않는다는 것이 確認되었다.

天測의 경우를 例로 들어 세 位置線에 依하여 이루어지는 誤差三角形에 있어서 船位를 推定하는 方法과 系統誤差만에 依해서 誤差三角形이 생긴 경우의 船位判定法에 對해서도 考察하였다. 誤差三角形은 位置線을 轉位하는 경우와 同時觀測의 경우에 생기는데 특히 轉位 誤差로 因하여 誤差三角形이 생기는 때에는 칼만 필터로 推定한 位置는 位置線을 轉位하는 順序에 따라 다르게 됨을 밝혔다. 또 칼만 필터로 推定한 最適位置와 誤差三角形의 內心, 傍心 및 類似重心과의 相互關係를 理論적으로 究明하고 이를 基礎로 시뮬레이션을 通해 誤差三角形에 있어서 칼만 필터로 推定한 位置의 精度에 對하여 檢討하였다. 그 結果 初期推定位置의 精度가 높을수록 칼만 필터에 依한 推定位置에 對한 信賴度가 높아지며 특히 誤差三角形의 外部에 船位가 存在하는 때에는 더욱 그러함을 알 수 있었다. 系統誤差만으로

생긴 誤差三角形에 있어서 內心 또는 傍心の 判定은 現在 세 天體의 方位差에 依한 方法이 利用되고 있으나 筆者는 이것이 fix determinant의 값  $\Delta$ 에 依해서 可能함을 밝혔다. 즉  $\Delta$ 가  $-2\sin\theta$ , ( $\theta$ 는 두 天體의 方位差로서  $\pi$ 보다 작은 角)보다 작으면 內心이,  $-2\sin\theta$ 보다 크면 傍心이 船位가 된다. 船位推定計算을 電算化하는 경우에는 이 方法이 더 便利할 것으로 생각한다.

最適位置의 精度를 確認하는 方法으로 誤差圓方式을 採擇하여 이를 理論적으로 考察하고 實測位置와 最適位置의 95%確率圓의 半徑을 各各 求하여 比較檢討하였는 바 칼만 필터에 依한 最適位置의 精度가 높다는 事實이 確認되었다. 또한 天測位置決定에 있어서 計算方位의 誤差가 位置線에 미치는 影響에 대하여도 考察하였는데 이 誤差는 意外로 커서 境遇에 따라서는 位置線에 包含되는 어떤 種類의 誤差보다도 클 수 있다는 것이 確認되었다. 從來 이 誤差는 微小하여 無視할 수 있는 것으로 看做되어 왔으나 船位의 精度改善을 爲해서는 이에 對해서도 항상 檢討하여야 한다고 생각된다.

以上에서 提示한 本 研究의 結果가 實際로 航海에 有効適切하게 活用되려면 컴퓨터가 必須인데 칼만 필터에 依한 船位推定 알고리즘과 天體座標, 高度差 및 方位 等の 計算을 電算處理하려면 PROM 20KB, RAM 10KB 程度의 마이크로 컴퓨터만 있으면 充分할 것으로 생각된다. 最近의 超合理化船에서는 各 시스템마다 單獨의 마이크로 컴퓨터가 採用되고 있으며 特히 미니 컴퓨터를 利用하여 衝突豫防裝置, NNSS,  $\Omega$ , Loran, Decca에 依한 船位測定裝置 및 自動操舵裝置 等を 結合制御하는 總合航海方式(total navigation system)이 開發되고 있다. 그러므로 이러한 船舶에 있어서는 컴퓨터의 利用이 전혀 問題되지 않을 것이며 船位決定을 위한 計算過程을 電算處理하면 各種計算表를 利用하는 데에서 導入되는 誤差와 位置線 記入上의 誤差를 除去할 수 있을 뿐 아니라 短時間에 簡便하게 船位를 決定할 수 있는 利點도 있다.

따라서 本 研究의 結果는 앞으로 船舶의 位置決定에 매우 效果的으로 活用되어 船位의 精度改善과 船舶의 安全에 크게 貢獻할 것이라 믿으며 그와 아울러 航程의 短縮에 依한 船舶의 經濟的運航에 寄與하리라 期待된다.

將次에는 天體를 觀測하거나 物標의 方位를 測定하거나 測定值를 入力데이터로 넣어 주기만 하면 바로 推定船位의 座標와 速力 및 系統誤差의 推定值를 出力으로 내 줄 수 있는 綜合的인 프로그램의 開發이 要望되며 이는 앞으로 行하여야 할 課題라고 생각된다.

參 考 文 獻

- 1) 大泉桂三：總合航法裝置トランソラインMK-Ⅱ，航海 第70號，pp.13-18, 1981.
- 2) 關根兆五外2名：トータルナビゲーションシステム航海 第70號，pp. 19-31, 1981.
- 3) Alton B Moody : Celestial Fix—Internal or External?, Navigation, Vol. 19 No. 4, pp.338-343, Winter 1972-1973.
- 4) 綿森繁樹：天文航法システム—そのⅠ，航海 第71號，pp. 23-30, 1982.
- 5) S. Koularic : K-12 Method by Calculator. A Single program for All Celestial Fixes, Directly or By Position Lines, Navigation, Vol. 28 No. 1, pp.44-51, Spring 1981.
- 6) Terben Kjer : Unambiguous Two Body Fix Methods Derived from Crystallographic Principles, Navigation, Vol. 28 No. 1, pp.52-54, Spring 1981.
- 7) Basil d' Oliveira : Calculators for Marine Navigation, The Royal Institute of Navigation, Vol. 34 No. 3, pp.452-461, 1981.
- 8) A. Bralove : Hand Held Calculators—An Evaluation of Their Use for Celestial Navigation, Navigation Vol. 25 No. 4, pp.434-446, Winter 1978-1979.
- 9) R.E. Kalman and R.S. Bucy : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Journal of Basic Engineering, pp.95-108, March 1961.
- 10) 有本卓：カルマン・フィルタ，産業圖書，東京，pp.53-88, 1979.
- 11) Stephen G. Wilson : Nonlinear Filter Evaluation for Estimating Vehicle Position and Velocity Using Satellites, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-9, pp.65-75, Jan. 1973.
- 12) J.C. Bobik : Updating Inertial Navigation Systems with VOR/DME Information, AI-AA Journal, Vol. 11 No. 10, pp.1377-1384, Oct. 1973.
- 13) 山田忠之外3名：カルマンフィルタを使用したロランC  $\rho$ - $\rho$ 航法，日本無線技法，No. 17, pp. 3-10, 1981.
- 14) R.G. Brown : Integrated Navigation Systems and Kalman Filtering, A Perspective, Navigation Vol. 19 No. 4, pp.355-362, Winter 1972-1973.
- 15) T. Koyama : An Application of Kalman Filter to the Discrete Time Route Tracking of Ships, 4th Ship Control Systems Symposium, The Hague, 1975.
- 16) 西岡次：カルマンフィルタの航法への應用—Ⅰ，航海 第52號，pp.31-39, 1977.
- 17) 西岡次：カルマンフィルタの航法への應用—Ⅱ，航海 第54號，pp.37-44, 1977.
- 18) 井調健二：天測計算へのカルマンフィルタの應用，航海 第60號，pp.49-56, 1979.
- 19) C. Dewit : Optimal Estimation of a Multi-Star Fix, Navigation, Vol. 21 No. 4, pp. 320-325, Winter 1974-1975.
- 20) G. D Morrison : Most Probable Fix Position Reduction, Navigation, Vol. 28 No. 1, pp. 1-8, Spring 1981.
- 21) 尹汝政・河津植：實測船位의 精度改善에 關한 研究(Ⅱ)，韓國航海學會誌 第6卷 第2號，pp.1-12, 1982.
- 22) 尹汝政：天文航海學，並成出版社，pp.299-315, 1976.
- 23) G.J. Lawson : The Statistical Solution to the Problem of Combining Imperfect Navigational Data, Royal Aircraft Establishment TR 65202, Sept. 1965.

- 24) 尹汝政·河注植：實測船位の 精度改善에 관한 研究(I), 韓國航海學會誌, 第6卷 第1號, pp. 61-72, 1982.
- 25) 並川能正：船位誤差論, 海文堂, p. 55, 1959.
- 26) P. B. Liebelt : An Introduction to Optimal Estimation, Addison-Wesley, pp. 27-30, 1967.
- 27) R. C. K. Lee : Optimal Estimation, Identification, and Control, The M. I. T. Press, pp. 64-65, 1964.
- 28) 平岩節：船位論, 成山堂, pp. 155-159, 1971.

