軸心이 不一致한 船尾管 密封裝置에서 시일 링의 擧動과 應力解析에 關한 硏究

全孝重* · 王之錫* · 金永柱** · 南延吉***

A Study on the Behaviour and the Stress Analysis of Seal Rings in the Eccentric Stern Tube Sealing System

H.J. Jeon, J.S. Wang, Y.J. Kim, J.K. Nam

Abstract

To analize the behaviour of seal rings in the stern tube sealing system of which the propeller shaft is eccentric to the stern tube, stress analysis of axi-symetric body with non-symetric loading and non-symetric given displacements is investigated in this paper using the finite element method. As the non-symetric loads and non-symetric given displacements of axi-symetric body are generally periodic functions of angle θ, the nodal forces and nodal displacements can be expanded in cosine and sine series, that is, Fourier series. Furthermore, using Euler's formula, the cosine and sine series can be converted into exponential series and it is proved that the related calculus become more clear.

Substituting the nodal displacements expanded in Fourier series into the strain components of cylindrical coordinates system, the element strains are expressed in series form and by the principal of virtual work, the element stiffnes martix and element load vector are obtained for each order.

It is also shown that if the non-symetric loads are even or odd functions of angle θ, the stiffness matrix and load vector of the system are composed with only real numbers and relatively small capacity of computer memory is enough for caculation.

* 韓國海洋大學 船舶機械工學科
** 海事技術硏究所
*** 韓國海洋大學 大學院

Ⅰ. 序　　論

船尾管을 지나는 推進軸이 振動을 한다거나 推進軸과 船尾管의 製作時 加工上의 缺陷으로 因하여 眞圓들이 아닌 境遇 또는 이들의 組立時 施工上의 着吳로 推進軸의 軸心과 船尾管의 軸心이 完璧하게 一致하지 않은 境遇가 흔히 있다. 뿐만 아니라 推進軸과 船尾管의 製作時 加工上의 缺陷도 없고 組立時 施工上의 着吳가 전혀 없다손 치더라도 船舶이 老朽化 된다거나 貨物積載의 狀態에 따라서는 推進軸과 船尾管의 軸心이 不一致한 境遇가 자주 있다. 이러한 때에 시일 링의 擧動과 應力解析은 軸對稱 問題의 解析만으로는 안되고 非對稱 荷重과 非對稱 變位를 받는 軸對稱 物體의 解析을 하여야 한다.

軸對稱 物體가 軸對稱 荷重을 받거나 軸對稱으로 變位가 주어질 때는 有限要素法으로 解析하기 比較的 쉽다. 그러나 軸對稱 物體가 非對稱 荷重을 받거나 非對稱으로 變位가 주어질 때는 그 解析이 簡單하지가 않다. 물론 3次元 有限要素法에 의한 應力解析 프로그램을 利用하면 되는데 이 때에는 節點의 數가 엄청나게 많아지고 따라서 全自由度가 커지기 때문에 實用的인 解法이 될 수 없다. 그러므로 軸對稱 物體가 非對稱 荷重을 받거나 非對稱으로 變位가 주어지더라도, 有限要素法에 의한 보통의 軸對稱 問題 解析하는 境遇와 마찬가지로 軸心을 지나는 對稱斷面의 어느 한쪽만을 解析하여 應力과 變形率 分布나 變位의 分布를 비롯한 이 物體의 거동을 計算해 낼 수 있으면 대단히 實用的일 것이다.

本 硏究에서는 有限要素法에 의한 보통의 軸對稱 問題 解析하는 境遇와 마찬가지로 圓筒座標系 r-θ-z를 使用하면, 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重과 要素의 節點變位들이 全部 周期 2π를 가지는 θ의 周期函數들 이라는 데에 着眼하여 이들을 Fourier 級數로 展開함으로서 有限要素의 剛性매트릭스와 荷重벡터를 구하는 定式化 過程을 提示하였다. Cosine 級數와 Sine 級數로 表示되는 Fourier 級數를 Euler의 公式을 사용함으로서 exponential 級數로 바꿀 수 있고 따라서 微分과 積分이 簡單해지면서 要素의 剛性매트릭스도 쉽게 구하여 짐을 보였다. 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重이 θ의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많은데 이때에는 要素의 剛性매트릭스와 荷重벡터가 實數만으로 이루어지도록 할 수 있고 따라서 더 작은 컴퓨터 記憶容量으로도 計算 할 수 있음도 보였다. 또한 軸對稱 物體에 非對稱 荷重이 作用하는 하나의 例를 本 硏究에서 提示한 解析方法에 따라 計算하여 보았다.

本 硏究에서 提示한 解析方法을 軸心이 不一致한 船尾管 密封裝置의 시일 링에 適用하여 이의 擧動과 應力分布를 計算하여 보임으로써 船尾管 시일 링의 設計에 活用할 수 있도록 하였다.

2. 函數의 Fourier 級數 展開

어떤 函數 f가 2π의 周期를 가지는 θ의 周期函數라면 이 函數를 Fourier 級數로써 나타낼 수

있음은 잘 알려진 事實이다[2].

$$f(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m \cos m\theta+b_m \sin m\theta) \tag{1}$$

여기서 a_m, b_m은 Fourier 係數로서 다음과 같이 計算된다.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta,\quad a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos m\theta\,d\theta,\quad m\neq 0 \tag{2}$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin m\theta\,d\theta$$

式(1)은 다음과 같은 Euler의 公式을 써서 表示하면 더 簡潔하여 진다.

$$e^{im\theta}=\cos m\theta+i\sin m\theta,\quad e^{-im\theta}=\cos m\theta-i\sin m\theta \tag{3}$$

式 (3)으로부터 cos $m\theta$와 sin $m\theta$를 구하여 式 (1)에 代入하고 整理하면

$$f(\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_m e^{im\theta} \tag{4}$$

와 같게 된다. 여기서 α_m은 複素數로서

$$\alpha_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-im\theta}\,d\theta \tag{5}$$

와 같이 計算된다. 式 (5)로 表示된 係數가 複素 Fourier 係數로 實數部와 虛數部는 다음과 같다.

$$R_e(\alpha_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos m\theta\,d\theta,\quad I_m(\alpha_m)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin m\theta\,d\theta \tag{6}$$

參考로 式 (2)의 實數 Fourier 係數와의 關係는

$$\alpha_0=a_0,\quad \alpha_m=\frac{a_m}{2}-i\frac{b_m}{2},\quad m\neq 0 \tag{7}$$

과 같이 된다.

Fourier 級數를 式 (4)와 같이 表示하면 여러가지의 計算에 아주 便利하고 簡潔하여지는 利點이 있다.

만약 周期函數 $f(\theta)$가 θ의 偶函數이거나 奇函數이면 Fourier 係數를 구할 때 積分區間을 半周期만 잡으면 되고 Fourier Cosine 級數나 Fourier Sine 級數로만 나타낼 수 있음도 잘 알려진 事實이다. 즉 $f(\theta)$가 偶函數이면

$$f(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\theta$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_o^{\pi} f(\theta)\ d\theta,\ a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos m\theta\ d\theta,\ m\neq 0 \tag{8}$$

과 같이 되고 $f(\theta)$가 奇函數이면 다음과 같이 된다.

$$f(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin m\theta$$

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin m\theta\ d\theta \tag{9}$$

3. 非對稱 荷重과 變位를 받는 軸對稱 物體의 有限要素 定式化

本節에서는 解析對象 物體가 軸對稱 形象을 하고 있으나 이 物體에 作用하는 荷重이 軸對稱이 아니고 境界條件으로 주어진 變位도 軸對稱이 아닌 境遇에 有限要素法으로 應力解析하는 定式化 過程을 誘導해 내고자 한다.

軸對稱 物體이므로 圓筒座標系 r,θ,z를 利用하여 變形率과 應力을 나타내고자 한다. r方向, θ方向, z方向의 變位를 各各 u,v,w라 하면 垂直變形率 ε, 剪斷變形率 γ는 各各 다음과 같다[3].

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r},\ \gamma_{\theta z}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta},\ \gamma_{zr}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r} \tag{10}$$

만약 軸對稱 荷重이 作用하고 境界條件도 軸對稱으로 주어진다면 θ方向의 變位는 一定하고 따라서 式 (10)에서 θ로 偏微分한 項들은 모두 零이 되고 이 問題는 軸對稱 問題가 된다.

한편 應力과 變形率 사이의 關係는

$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\} \tag{11}$$

여기서 $\{\sigma\}=[\sigma_r\ \sigma_\theta\ \sigma_z\ \tau_{r\theta}\ \tau_{\theta z}\ \tau_{zr}]^T$, $\{\varepsilon\}=[\varepsilon_r\ \varepsilon_\theta\ \varepsilon_z\ \gamma_{r\theta}\ \gamma_{\theta z}\ \gamma_{zr}]^T$
이며 $[C]$는 材料의 剛性매트릭스이다.

軸對稱 問題의 境遇와 마찬가지로 Fig. 1에 보이는 바와 같이 r-z 平面上의 三角形 斷面을 가진 要素에서 節點 1, 2, 3의 r,z 座標를 各各 $r_1, z_1, r_2, z_2, r_3, z_3$라 하면, 要素內 任意點 (r,z)의 變位 u,v,w를 線形形象函數 N_j를 써서 節點變位로 나타낼 수 있다.

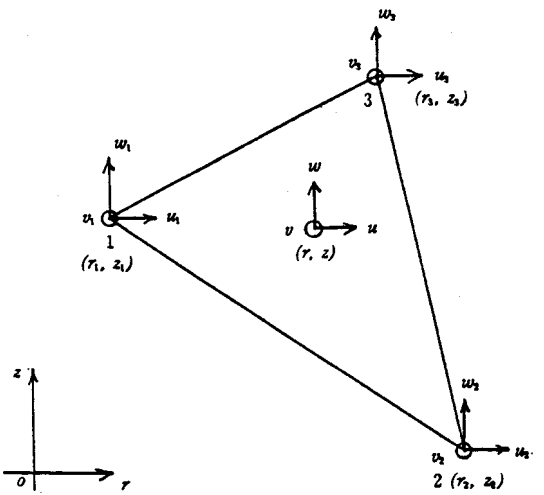


Fig 1. Nodal displacements of an element

$$u=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3,\quad v=N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3,\quad w=N_1w_1+N_2w_2+N_3w_3 \tag{12}$$

여기서 u_j, v_j, w_j는 各各 節點 j의 r, θ, z方向의 變位를 나타내고($j=1, 2, 3,$)

$$N_j=\frac{1}{2\Delta}(a_j+b_jr+c_jz),\quad j=1,2,3$$

$$a_1=r_2z_3-r_3z_2,\quad a_2=r_3z_1-r_1z_3,\quad a_3=r_1z_2-r_2z_1,\quad b_1=z_2-z_3,\quad b_2=z_3-z_1,\quad b_3=z_1-z_2,$$

$$c_1=r_3-r_2,\quad c_2=r_1-r_3,\quad c_3=r_2-r_1,\quad 2\Delta=r_2z_3+r_1z_2+r_3z_1-r_2z_1-r_3z_2-r_1z_3$$

이다.

節點變位 $u_j, v_j, w_j(j=1, 2, 3)$는 軸對稱 問題일 境遇에는 一定하지만 여기서는 2π의 周期를 가지는 θ의 周期 函數가 된다. 따라서 이들을 各各 式 (4)와 같이 Fourier 級數로 展開할 수 있다.

$$u_j=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_{jm}e^{im\theta},\quad v_j=\sum_{m=-\infty}^{\infty}v_{jm}e^{im\theta},\quad w_j=\sum_{m=-\infty}^{\infty}w_{jm}e^{im\theta},\quad j=1,2,3 \tag{13}$$

이 式을 다시 쓰면

$$\{q\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{q_m\}e^{im\theta} \tag{14}$$

여기서 $\{q\}=[u_1\ v_1\ w_1\ u_2\ v_2\ w_2\ u_3\ v_3\ w_3]^T$,

$\{q_m\}=[u_{1m}\ v_{1m}\ w_{1m}\ u_{2m}\ v_{2m}\ w_{2m}\ u_{3m}\ v_{3m}\ w_{3m}]^T$

이다.

式 (13)을 式 (12)에 代入하여 整理하면

$$u=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(N_1u_{1m}+N_2u_{2m}+N_3u_{3m})e^{im\theta},\quad v=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(N_1v_{1m}+N_2v_{2m}+N_3v_{3m})e^{im\theta},$$

$$w=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(N_1w_{1m}+N_2w_{2m}+N_3w_{3m})e^{im\theta} \tag{15}$$

式 (15)를 매트릭스形式으로 表示하면

$$\{u\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[N]\{q_m\}e^{im\theta}=[N]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{q_m\}e^{im\theta} \tag{16}$$

여기서 $\{u\}=[u\ v\ w]^T$,

$$[N]=\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

이다.

式 (15)로 表示된 變位成分들을 式 (10)에 代入하고 $\frac{\partial N_j}{\partial r}=\frac{b_j}{2\Delta}$, $\frac{\partial N_j}{\partial z}=\frac{c_j}{2\Delta}$, $j=1,2,3$임을 注目하여 變形率 成分들을 구하고 이들을 매트릭스 形式으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\{\varepsilon\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[B_m]\{q_m\}e^{im\theta} \tag{17}$$

여기서 $[B_m]=[\mathbf{B}_{1m}\ \mathbf{B}_{2m}\ \mathbf{B}_{3m}]$,

$$\mathbf{B}_{jm}=\begin{pmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & im\frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ im\frac{N_j}{r} & \frac{b_j}{2\Delta}-\frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & im\frac{N_j}{r} \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{pmatrix},\quad j=1,2,3$$

이다.

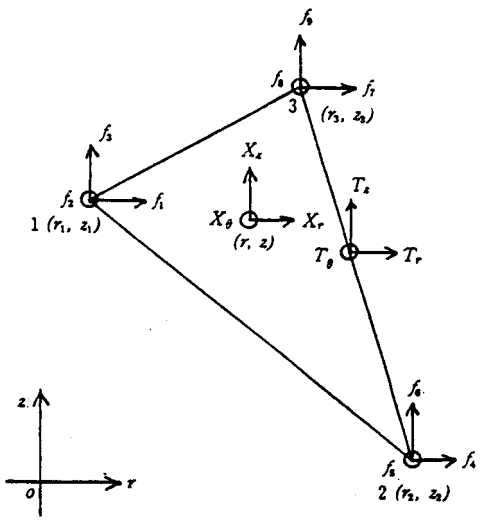


Fig 2. Nodal forces, surface forces and body forces of an element

지금 Fig. 2에서 表示된 바와 같이 各 節點에서 r, θ, z 方向으로 作用하는 單位길이 당의 節點力을 各各 f_1, f_2, f_3, $f_4 \cdots f_9$라고 하면, 假想 일의 原理에 의하면 다음 式이 成立한다.

$$\int_0^{2\pi}\{\delta q\}^T\{fr\}d\theta+\int_S\{\delta u\}^T\{T\}dS+\int_V\{\delta u\}^T\{X\}dV-\int_V\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV=0 \tag{18}$$

여기서 $\{\delta q\}^T$는 假想 節點 變位로서 $\{\delta q\}^T=[\delta u_1\ \delta v_1\ \delta w_1\ \delta u_2\ \delta v_2\ \delta w_2\ \delta u_3\ \delta v_3\ \delta w_3]$ 이고

$\{fr\}=\lfloor f_1r_1\ f_2r_1\ f_3r_1\ f_4r_2\ f_5r_2\ f_6r_2\ f_7r_3\ f_8r_3\ f_9r_3]^T$ 이다. 또한

$\{\delta u\}^T=[\delta u\ \delta v\ \delta w]$, $\{\delta\varepsilon\}^T=[\delta\varepsilon_r\ \delta\varepsilon_\theta\ \delta\varepsilon_z\ \delta\gamma_{r\theta}\ \delta\gamma_{\theta z}\ \delta\gamma_{zr}]$, $\{T\}=[T_r\ T_\theta\ T_z]^T$,

$\{X\}=[X_r\ X_\theta\ X_z]^T$ 이며 T_r, T_θ, T_z는 各各 r, θ, z 方向의 表面力, X_r, X_θ, X_z는 각각 r, θ, z 方向의 物體力이다.

$\int_S dS$는 要素의 表面에 대한 面積分이고 $\int_V dV$는 要素의 體積積分을 나타낸다.

式 (14), (16), (17)로 부터 $\{\delta q\}^T$, $\{\delta u\}^T$, $\{\delta\varepsilon\}^T$를 구하면

$$\{\delta q\}^T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta q_m\}^Te^{im\theta},\ \{\delta u\}^T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta q_m\}^Te^{im\theta}[N]^T,\ \{\delta\varepsilon\}^T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta q_m\}^Te^{im\theta}[B_m]^T \tag{19}$$

이들을 式 (18)에 代入하면 $\{\delta q_m\}^T$는 常數이므로 積分記號 밖으로 나올 수 있고 따라서

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta q_m\}^T\Big(\int_0^{2\pi}e^{im\theta}\{fr\}d\theta+\int_S e^{im\theta}[N]^T\{T\}dS+\int_V e^{im\theta}[N]^T[X]dV$$

$$-\int_V e^{im\theta}[B_m]^T\{\sigma\}dV\Big)=0 \tag{20}$$

$\{\delta q_m\}^T$은 任意(Arbitrary)이므로 結局 式 (20)이 恒常 成立하기 위해서는

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\{fr\}d\theta + \int_S e^{im\theta}[N]^T\{T\}dS + \int_V e^{im\theta}[N]^T\{X\}dV = \int_V e^{im\theta}[B_m]^T\{\sigma\}dV \quad (21)$$
$$m = -\infty \sim \infty$$

이 되어야 한다.

節點力 $\{fr\}$, 表面力 $\{T\}$, 物體力 $\{X\}$로 表示되는 非對稱 荷重들은 周期 2π를 가지는 θ의 周期函數이다. 이들도 節點變位와 마찬가지로 Fourier 級數로 展開할 수 있다. 例를 들면

$$f_1 r_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{1k} e^{ik\theta},\ T_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{rk} e^{ik\theta},\ X_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{rk} e^{ik\theta} \quad (22)$$

와 같다. 여기서 複素 Fourier 係數 h_{1k}, T_{rk}, X_{rk}는 式 (5)의 境遇와 마찬가지로

$$h_{1k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1 r_1 e^{-ik\theta}\ d\theta,\ T_{rk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_r e^{-ik\theta} d\theta,\ X_{rk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_r e^{-ik\theta}\ d\theta \quad (23)$$

와 같이 구하면 된다.

節點力, 表面力, 物體力의 다른 成分들도 같은 方法으로 Fourier 級數로 展開하고 複素 Fourier 係數를 구하면 된다. 그리하여 結局 節點力 $\{fr\}$, 表面力 $\{T\}$, 物體力 $\{X\}$를 다음과 같이 Fourier 級數로써 展開한다.

$$\{fr\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_k\} e^{ik\theta},\ \{T\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{T_k\} e^{ik\theta},\ \{X\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_k\} e^{ik\theta} \quad (24)$$

여기서 $\{h_k\} = [h_{1k}\ h_{2k}\ h_{3k}\ h_{4k}\ h_{5k}\ h_{6k}\ h_{7k}\ h_{8k}\ h_{9k}]^T$, $\{T_k\} = [T_{rk}\ T_{\theta k}\ T_{zk}]^T$, $\{X_k\} = [X_{rk}\ X_{\theta k}\ X_{zk}]^T$ 이다. 또한 三角形 斷面을 가진 要素의 微小表面積 dS와 微小體積 dV는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$dS = rd\theta\ dl,\quad dV = rd\theta\ dA \quad (25)$$

여기서 dl는 三角形 邊의 微小길이 이고 dA은 三角形 要素의 微小面積이다.

式 (24)와 式 (25)를 式 (21)에 代入하면

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{h_k\} e^{i(m+k)\theta} d\theta + \int_l \int_0^{2\pi} [N]^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{T_k\} e^{i(m+k)\theta}\ d\theta\ rdl$$

$$+ \int_A \int_0^{2\pi} [N]^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_k\} e^{i(m+k)\theta}\ d\theta\ rdA = \int_V e^{im\theta}[B_m]^T\{\sigma\}dV,\ m = -\infty \sim \infty \quad (26)$$

이 된다. 그런데

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+k)\theta} d\theta \begin{cases} =0 & (k \neq -m) \\ =2\pi & (k=-m) \end{cases} \tag{27}$$

이므로 式 (26)은 다음과 같이 된다.

$$2\pi\{h_{-m}\} + \int_l [N]^T\{T_{-m}\}2\pi r dl + \int_A [N]^T\{X_{-m}\}2\pi r dA = \int_V e^{im\theta}[B_m]^T\{\sigma\} dV \tag{28}$$

여기서 $\int_l dl$은 三角形 要素邊에 대한 線積分이고 $\int_A dA$는 三角形 要素에 대한 面積分이다.
한편 式 (17)을 式 (11)에 代入하여 $\{\sigma\}$을 구하면

$$\{\sigma\} = [C] \sum_{k=-\infty}^{\infty} [B_k]\{q_k\} e^{ik\theta} \tag{29}$$

가 되고 이것을 式 (28)에 代入하고 整理하면

$$[K_m]\{q_m\} = \{L_m\},\ m = -\infty \sim \infty \tag{30}$$

여기서 $[K_m] = \int_A [B_{-m}]^T[C][B_m] r dA$, $\{L_m\} = \{h_m\} + \int_l [N]^T\{T_m\} r dl + \int_A [N]^T\{X_m\} r dA$

式 (30)은 하나의 要素에 대하여 成立하는 式으로 여러 要素들에 대한 式들을 組立(Assembling)하고 境界 條件에 따라 修正하여 聯立方程式을 푸는 要領은 보통의 有限 要素法 問題 푸는 것과 同一하다. 다만 이때 注意하여야 할 것은 보통의 有限 要素法 問題는 한번만 풀면 되는데 反하여 여기서는 여러번 ($m = -\infty \sim \infty$) 풀어야 하고, $[K_m]$, $\{q_m\}$, $\{L_m\}$이 全部 複素數로 이루어졌다는 점, 그리고 要素의 剛性매트릭스 $[K_m]$이 對稱매트릭스가 아니라는 점 등이다.

要素의 剛性매트릭스 $[K_m]$이 어떠한 매트릭스인가 보기 위하여 $[B_m]$을 다음과 같이 實數部와 虛數部로 表示하여 보자.

$$\begin{aligned} [B_m] &= [B] + im[B^*] \\ [B_{-m}] &= [B] - im[B^*] \end{aligned} \tag{31}$$

여기서 $[B] = [\mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2\ \mathbf{B}_3]$

$[B^*] = [\mathbf{B}_1^*\ \mathbf{B}_2^*\ \mathbf{B}_3^*]$

$$\mathbf{B}_j=\begin{pmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ 0 & \frac{b_j}{2\Delta}-\frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & 0 \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_j}{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$j=1, 2, 3$

式 (31)을 式 (30)의 $[K_m]$에 代入하면

$$[K_m]=[K'_m]+im[K''] \tag{32}$$

가 된다. 여기서

$$[K'_m]=\int_A([B]^T[C][B]+m^2[B^*]^T[C][B^*])\ rdA$$

$$[K'']=\int_A([B]^T[C][B^*]-[B^*]^T[C][B])\ rdA$$

이다. 위에서 보는 바와 같이 $[K'_m]$와 $[K'']$는 實數로만 이루어진 매트릭스이다. 또한 $[K'_m]$는 對稱매트릭스이고 $[K'']$는 歪對稱(Skewsymetric) 매트릭스이다.

4. 偶函數이거나 奇函數인 境遇

前節에서 求한 要素의 剛性매트릭스 $[K_m]$과 荷重벡터 $\{L_m\}$이 複素數이기 때문에 컴퓨터 프로그래밍에 있어서 큰 記憶容量을 必要로 한다. 그러나 軸對稱 物體에 作用하는 非對稱 荷重이 θ의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많고 또한 境界條件으로 주어진 變位가 θ의 偶函數이거나 奇函數인 境遇가 많은데, 이럴 때에는 要素의 剛性매트릭스와 荷重벡터가 實數로만 이루어지므로 더 작은 컴퓨터 記憶容量으로도 計算이 可能하다.

더우기 모든 函數는 다음 式에 보이는 바와 같이 偶函數와 奇函數의 合으로 表示할 수 있음을 注目할 必要가 있다. $f(\theta)$는 偶函數도 奇函數도 아닌 一般的인 函數라 하자. 그러면

$$f(\theta)=\frac{f(\theta)+f(-\theta)}{2}+\frac{f(\theta)-f(-\theta)}{2} \tag{33}$$

과 같이 表示할 수가 있고 이 式에서 右邊의 제1항은 偶函數이고 제2항은 奇函數이다.

지금 非對稱 荷重을 받고 非對稱 變位가 주어진 軸對稱 物體에 있어서 荷重과 變位가 r方向과 z方向 成分은 θ의 偶函數이고 θ方向成分은 θ의 奇函數라고 하자. 이런 境遇는 實際로 종종 接하게 되는 問題인데 餘他의 境遇도 같은 方法으로 定式化 할 수 있다. Fig. 1에서와 같이 r-z 平面에서 三角形 斷面을 가진 要素에서 節點 j의 r方向, θ方向, z方向變位 u_j, v_j, w_j는 式 (8)과 (9)을 參照하여

$$u_j=\sum_{m=0}^{\infty} u_{jm}\cos m\theta,\quad v_j=\sum_{m=0}^{\infty} v_{jm}\sin m\theta,\quad w_j=\sum_{m=0}^{\infty} w_{jm}\cos m\theta,\quad j=1,2,3 \tag{34}$$

와 같이 된다. 이들을 式 (12)에 代入하면 要素內 任意點(r,z)에서의 變位 u,v,w를 구한다.

$$\begin{aligned} u&=\sum_{m=0}^{\infty}(N_1u_{1m}+N_2u_{2m}+N_3u_{3m})\cos m\theta\\ v&=\sum_{m=0}^{\infty}(N_1v_{1m}+N_2v_{2m}+N_3v_{3m})\sin m\theta\\ w&=\sum_{m=0}^{\infty}(N_1w_{1m}+N_2w_{2m}+N_3w_{3m})\cos m\theta \end{aligned} \tag{35}$$

이 式을 매트릭스形式으로 表示하면

$$\{u\}=\sum_{m=0}^{\infty}[N_m]\{q_m\} \tag{36}$$

여기서 $[N_m]=[\mathbf{N}_{1m}\ \mathbf{N}_{2m}\ \mathbf{N}_{3m}]$ 이고

$$\mathbf{N}_{jm}=\begin{pmatrix} N_j\cos m\theta & 0 & 0\\ 0 & N_j\sin m\theta & 0\\ 0 & 0 & N_j\cos m\theta \end{pmatrix},\quad j=1,2,3$$

$\{q_m\}=[u_{1m}\ v_{1m}\ w_{1m}\ u_{2m}\ v_{2m}\ w_{2m}\ u_{3m}\ v_{3m}\ w_{3m}]^{\mathrm{T}}$ 이다.

여기서 注意하여야 할 점은 前節에서와는 달리 $\{q_m\}$의 成分들이 全部 實數들 이라는 것이다.

式 (35)로 表示된 變位成分들을 式 (10)에 代入하여 變形率 成分들을 구하고 이들을 매트릭스形式으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\{\varepsilon\}=\sum_{m=0}^{\infty}[B_m]\{q_m\} \tag{37}$$

여기서 $[B_m]=[\mathbf{B}_{1m}\ \mathbf{B}_{2m}\ \mathbf{B}_{3m}]$이고

$$\mathbf{B}_{jm}=\begin{pmatrix} \frac{b_j}{2\Delta}\cos\ m\theta & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r}\cos\ m\theta & m\frac{N_j}{r}\cos\ m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta}\cos\ m\theta \\ -m\frac{N_j}{r}\sin\ m\theta & (\frac{b_j}{2\Delta}-\frac{N_j}{r})\sin\ m\theta & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta}\sin\ m\theta & -m\frac{N_j}{r}\sin\ m\theta \\ \frac{c_j}{2\Delta}\cos\ m\theta & 0 & \frac{b_j}{2\Delta}\cos\ m\theta \end{pmatrix},\quad j=1,2,3$$

前節에서와 마찬가지로 式 (18)로 表示되는 假想일의 原理를 적용하면 다음 式이 成立함을 알 수 있다.

$$\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\cos\ m\theta \\ \sin\ m\theta\end{matrix}\{fr\}d\theta+\int_S[N_m]^T\{T\}dS+\int_V[N_m]^T\{X\}dV=\int_V[B_m]^T\{\sigma\}dV \qquad (38)$$

$m=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots\infty$

이 式의 左邊 제1항은 節點力 $\{fr\}$의 r方向과 z方向 成分에는 cos $m\theta$를 곱하고 θ方向 成分에는 sin $m\theta$를 곱하여 1周期間을 積分하라는 뜻이다.

節點力 $\{fr\}$, 表面力 $\{T\}$, 物體力 $\{X\}$는 r方向과 z방향 성분은 式 (8)의 cosine 級數로, θ方向 成分은 式 (9)의 sine 級數로 展開한다. 例를 들면

$$f_1r_1=\sum_{k=0}^{\infty}h_{1k}\cos\ k\theta,\ f_2r_1=\sum_{k=0}^{\infty}h_{2k}\sin\ k\theta,\ h_{10}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_1r_1d\theta,\ h_{1k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1r_1\cos\ k\theta d\theta,$$

$$h_{20}=0,\ h_{2k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_2r_1\sin\ k\theta d\theta,\ T_r=\sum_{k=0}^{\infty}T_{rk}\cos\ k\theta,\ T_\theta=\sum_{k=0}^{\infty}T_{\theta k}\sin\ k\theta,$$

$$T_{r0}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}T_rd\theta,\ T_{rk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}T_r\cos\ k\theta\ d\theta,\ T_{\theta 0}=0,\ T_{\theta k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}T_\theta\sin\ k\theta\ d\theta \qquad (39)$$

등이다. 또한 應力 $\{\sigma\}$는 式 (37)과 式 (11)로 부터

$$\{\sigma\}=[C]\sum_{k=0}^{\infty}[B_k]\{q_k\} \qquad (40)$$

이므로 이들을 式 (38)에 代入하여 整理하면 다음 式을 얻을 수 있다.

$$[K_m]\{q_m\}=\{L_m\},\quad m=0,1,2,\cdots\cdots\infty \qquad (41)$$

여기서 $[K_m]=\int_A[B_m^*]^T[C][B_m^*]rdA$, $[B_m^*]=[\mathbf{B}_{1m}^*\ \mathbf{B}_{2m}^*\ \mathbf{B}_{3m}^*]$

$$\mathbf{B}_{jm}^{*}=\begin{pmatrix} \frac{b_j}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{N_j}{r} & m\frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_j}{2\Delta} \\ -m\frac{N_j}{r} & \frac{b_j}{2\Delta}-\frac{N_j}{r} & 0 \\ 0 & \frac{c_j}{2\Delta} & -m\frac{N_j}{r} \\ \frac{c_j}{2\Delta} & 0 & \frac{b_j}{2\Delta} \end{pmatrix}, \quad j=1,\ 2,\ 3$$

$$\{L_m\}=\{h_m\}+\int_l[N]^T\{T_m\}rdl+\int_A[N]^T\{X_m\}rdA$$

여기서 注意하여야 할 것은 $\{h_m\}$, $\{T_m\}$, $\{X_m\}$의 成分들이 前節에서와는 달리 複素數가 아니고 式 (39)에서 구하여진 바와 같이 實數들이라는 點이다. 따라서 式 (41)은 全部 實數들로만 이루어져 있으므로 컴퓨터의 記憶容量이 前節에서 보다 더 작아도 된다.

5. 計算例

前節에서 誘導하여 定式化한 解析方法을 利用하여 우선 非對稱荷重을 받는 軸對稱物體의 一例를 解析하였다. Fig. 3(a)와 같이 剛體로 이루어진 정반위에 外經 120mm, 內徑 60mm, 높이 40 mm의 두꺼운 벽을 가진 中空의 圓筒을 올려 놓고 右側의 반쪽에만 가장자리에 軸方向(z方向)으로 單位길이(1mm)당 10kg의 分布荷重이 作用하는 境遇를 計算하여 그 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 材料는 軟鋼으로 彈性係數는 $E=21,000\text{kg/mm}^2$이고 Poisson比는 $\nu=0.3$이다. 圓筒座標系를 Fig. 3(b)와 같이 定하고 $\theta=0°$, $\theta=90°$, $\theta=180°$인 斷面의 要素分割과 變形模樣을 各各 Fig. 4(a), (b), (c)에 나타내었다. 그림에서 點線은 荷重이 作用하기 前 元來의 模樣을 나타내고 實線은 荷重이 작용할 때의 斷面模樣을 나타내는데 變位를 3000倍 擴大하여 그린 그림이다. 荷重이 作用하지 않은 $\theta=180°$인 斷面에서 變形이 가장 작음을 알 수 있다.

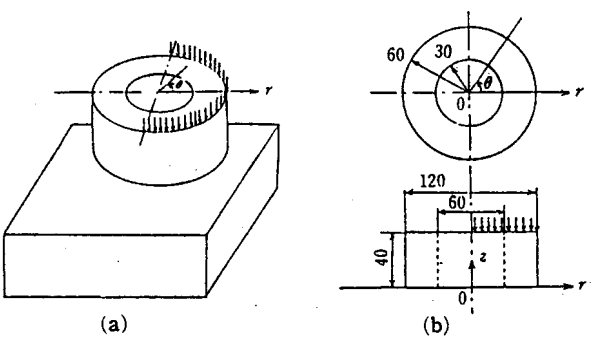
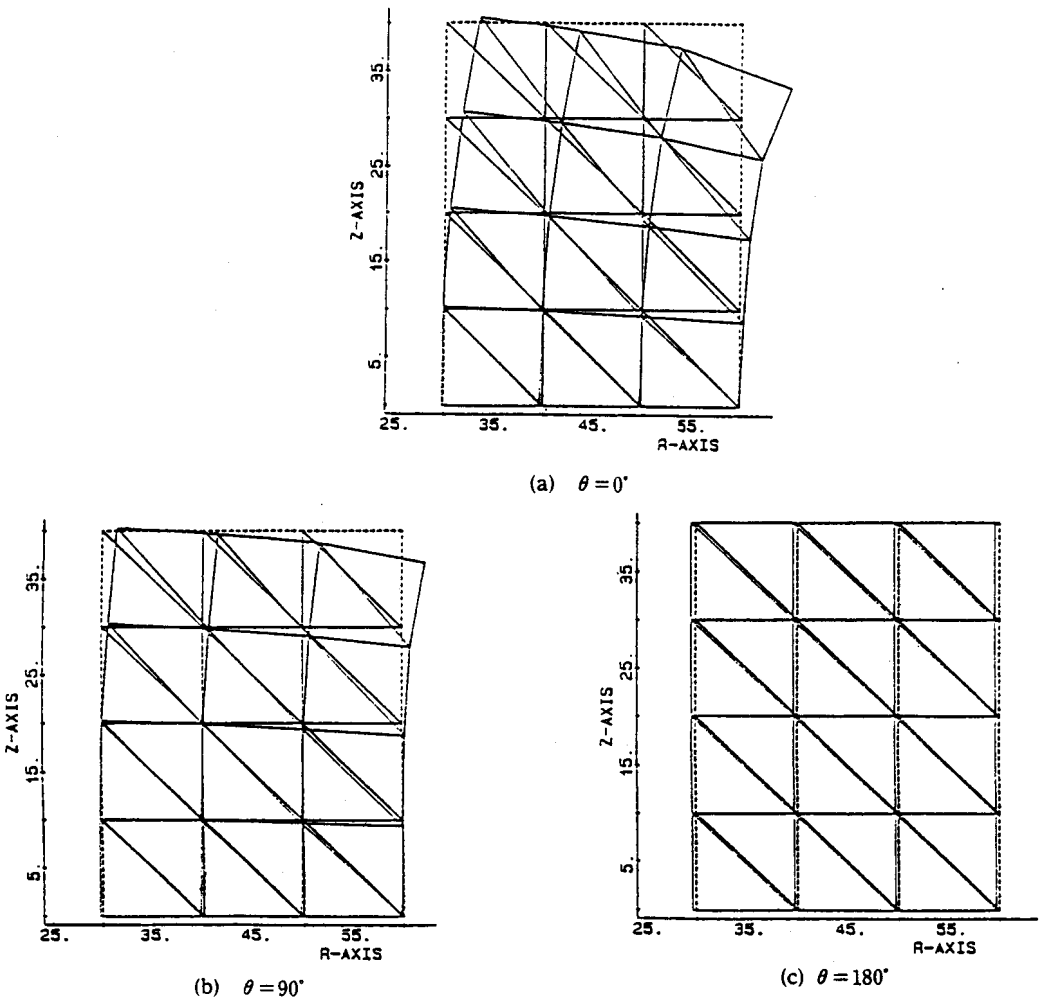


Fig 3. An example of axi-symetric body subjected to non-symetric load



(a) $\theta = 0^{\circ}$

(b) $\theta = 90^{\circ}$

(c) $\theta = 180^{\circ}$

Fig 4. Deformation of each cross section

6. 軸心이 不一致한 船尾管 密封裝置

非對稱 變位가 주어진 軸對稱 物體의 一例가 Fig. 5에 보이는 바와 같이 船尾管 密封裝置에 있는 시일 링(Seal ring)이다.

推進軸이 同心上에서만 回轉하면 이는 軸對稱 問題의 解法만으로 解析이 可能하다. 그러나 推進軸의 橫進動이 發生한다든지 加工上의 誤差로 推進軸이 偏心되어 있거나 眞圓이 아닌 境遇에는 시일 링은 非對稱 變位를 받게된다.

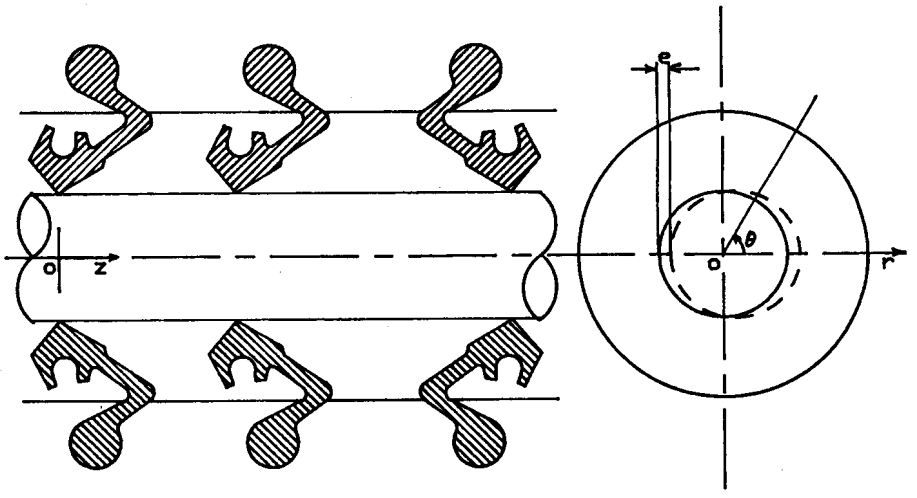


Fig 5. Seal rings of stern tube sealing system

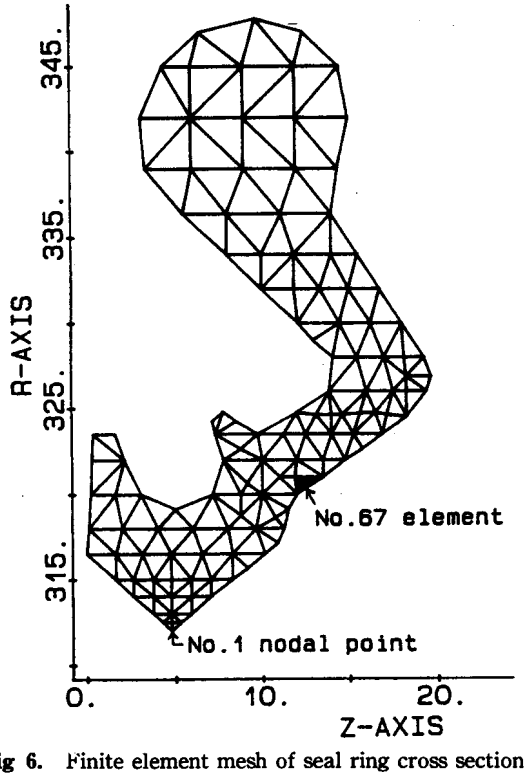


Fig 6. Finite element mesh of seal ring cross section

지금 圓筒座標系를 Fig.5와 같이 定하고 시일 링의 斷面을 Fig.6과 같이 分割하여 解析하려고 한다. 推進軸이 e만큼 偏心되었을 때 e가 軸徑에 比하여 작다면 립 先端의 半徑方向(r方向) 變位 u와 圓周方向(θ方向) 變位 v는 다음과 같이 주어진다.

$$u=e\cos\theta,\quad v=e\sin\theta \tag{42}$$

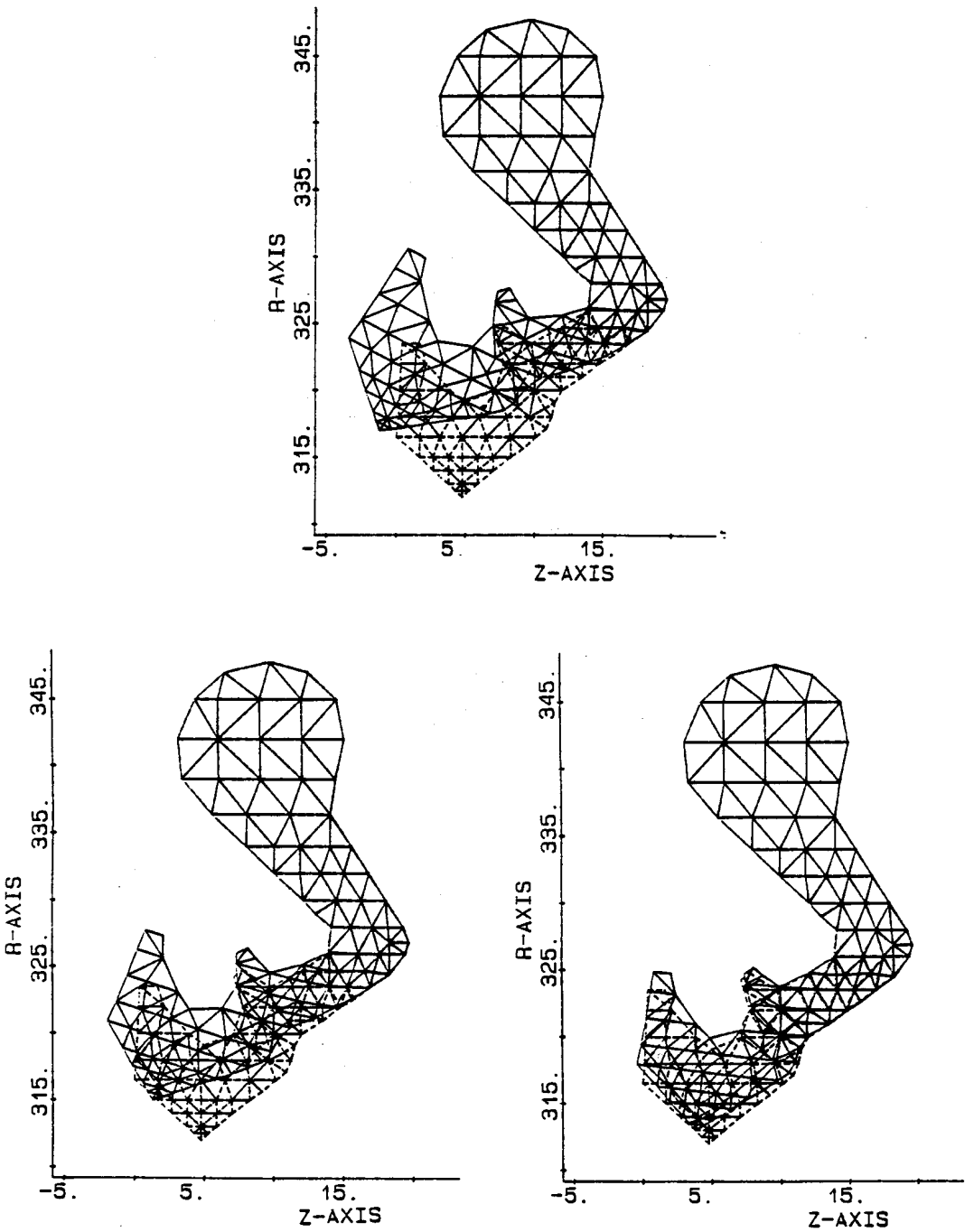


Fig 7. Deformation of each cross section

이것을 境界條件으로 주어서 解析한 結果를 Fig. 7에 나타내었다. 이 그림은 內徑 624mm의 시일 링을 軸徑 630mm의 推進軸에 裝着하고서 高壓(H.P.)側에 1.0kg/cm², 低壓(L.P.)側에 0.5kg/cm²의 壓力이 作用하고 2mm의 偏心이 있을때 各斷面의 變形模樣을 나타낸 것이다. 材料는 Viton 系 고무로 彈性係數는 $E=1.12$kg/mm², Poisson 比는 $\nu=0.44$이다. 點線으로 表示된 部分은 裝着하기 前 原來의 斷面模樣을 나타내고 実線은 裝着하고서 2mm의 偏心이 있는 斷面模樣을 나타낸다. $\theta=0°$인 斷面에서 가장 큰 r方向 變位가 발생하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 8은 시일 링의 립 선단인 1番 節點의 r方向, θ方向 및 z方向 變位 u_1과 v_1, w_1을 圓周方向(θ方向)에 따라 變化하는 모양을 나타낸 것이다. u_1, v_1은 境界條件으로 주어진 式 (42)와 같이 各各 Cosine 函數와 Sine 函數로 됨을 알 수 있고, 여기서 注目하여야 할 점은 립 선단의 軸方向(z方向) 變位 w_1이 0°에서 -6mm, 180°에서 -1mm로 軸이 回轉함에 따라 약 5mm의 Stroke로 립 선단이 往復運動을 한다는 것이다. 이는 립 선단의 윤할과 냉각의 面에서 긍정적으로 받아들여질 수 있는 점이 될 수 도 있겠고 누설의 면에서는 부정적인 擧動이 될 수도 있을 것이다. 립 선단의 軸方向 往復運動이 시일 링의 性能에 미치는 影響에 대하여는 더 硏究해야 할 것이다.

Fig. 9는 가장 큰 應力을 받고 있는 67번 要素의 各 應力 成分 σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, τ_{zr}가 圓周方向에 따라 變化하는 모양을 圖示한 것이다. 一般的으로 $\theta=0°$에서 가장 큰 應力이 發生하고 $\theta=180°$에서 가장 작은 應力이 發生하고 있음을 볼 수 있으며, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$는 거의 무시할 만 하다는 것을 알 수 있다. 實際問題에 있어서 各 應力成分의 값은 別 意味가 없고 主應力의 값이 重要하다.

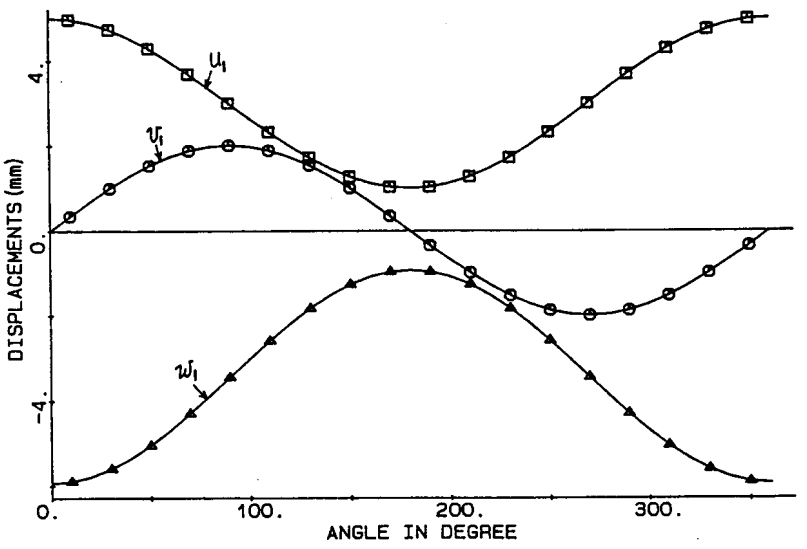


Fig 8. Displacements of seal ring lip

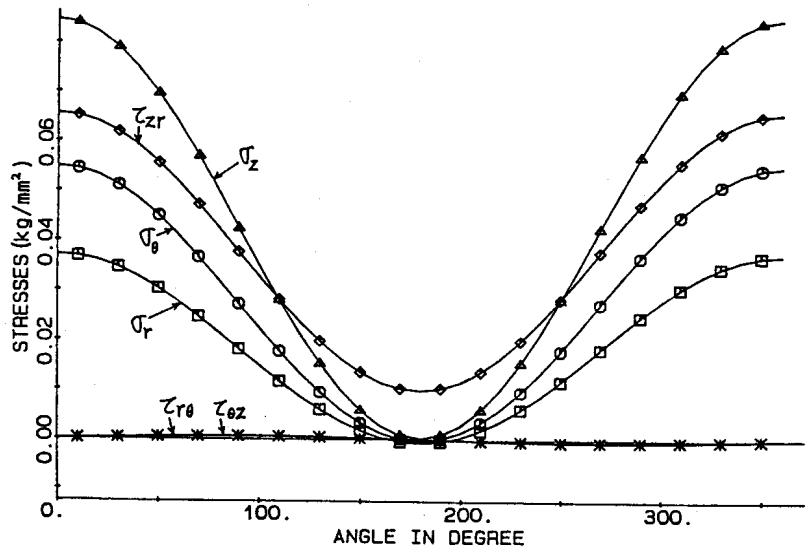


Fig 9. Variations of stress components

Fig. 10은 3個의 主應力 σ_1, σ_2, σ_3가 圓周方向에 따라서 變化하는 모양을 나타낸 것이다. 最大主應力이 $\theta=0°$에서 나타나고 그 값은 13kg/cm²나 됨을 볼 수 있으며 이는 軸이 回轉함에 따라 反復應力이 되고 시일 材料를 피로 시키게 된다.

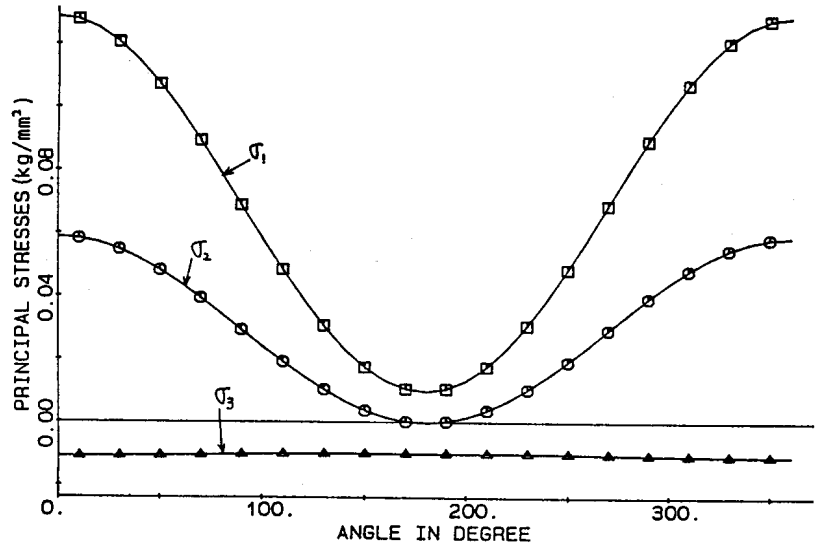


Fig 10. Variations of principal stresses

7. 結　　論

船尾管 密封裝置에서 推進軸의 軸心과 船尾管의 軸心이 一致하지 않은 境遇의 시일 링의 擧動과 應力解析을 위하여, 非對稱 荷重을 받고 非對稱으로 變位가 주어진 軸對稱 物體의 應力과 變形率 및 變位를 有限要素法으로 解析하는 定式化 過程을 誘導한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 軸對稱 物體의 非對稱 荷重과 非對稱 變位가 2π의 周期를 가지는 角度 θ의 周期函數이므로 이들을 Fourier級數로 展開함으로서 軸心을 지나는 對稱斷面의 어느 한쪽만을 가지고 有限要素解析이 可能하였다.

(2) Euler의 公式을 利用하여 cosine 級數와 sine 級數로 表示된 Fourier 級數를 復素數를 活用하는 Exponential 級數로 展開하면 微分과 積分이 簡單하여져서 要素의 剛性매트릭스가 쉽게 구하여 진다.

(3) 非對稱 荷重과 非對稱 變位의 成分들이 角度 θ의 偶函數이거나 奇函數이면 要素의 剛性매트릭스가 実數로만 이루어지게 할 수 있고 따라서 더 작은 컴퓨터 記憶 容量으로 計算이 可能하여진다.

(4) 推進軸이 船尾管內에서 偏心되어 있을 때 軸이 回轉함에 따라 시일 링은 큰 引張應力을 反復하여 받고 립 先端은 軸方向으로 往復運動을 한다.

參考文獻

1) Thimoshenko, Goodier, Theory of Elasticity, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1970.
2) Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 5th Edition, John Wiley & Sons, 1985.
3) Kenneth H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, Jhon Wiley & Sons, 1975.
4) O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.
5) Yukiyoshi Miyashita, et al., Study on Stern Tube Sealing System-Part I: Deformation Behavior in Static Condition of Sealing Rings, Journal of the M.E.S.J., Vol. 11, No. 3, 1976.
6) Ruel V. Churchill, James Ward Brown, Fourier Series and Boundary Value Problemes, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1978.
7) 王之錫, 金基俊, 李英浩, Fourier 級數를 應用한 二階 線形 常微分 方程式의 解法에 關한 硏究, 韓國舶用機關學會誌 第8卷 第1號, 1984. 4.