

推進器에 대한 揚力面 理論 展開에 있어서 Chebyshev 多項式의 適用에 관한 研究

A Study on the Application of Chebyshev Polynomials
to the Lifting Surface Theory for Marine Propellers



< 目 次 >

Abstract

Nomenclature

제1장 서 論

제2장 3차원 방정식의 유도

제3장 코르 방향의 모드

제4장 코란속도 장분

제5장 추진기 단면에 미치는 압력 분포, 유체력과 모멘트, 당개 압력 모멘트.

5.1 압력 분포

5.2 유체력과 모멘트

5.3 당개 압력 모멘트

제6장 수치 해석 결과

제7장 결 論

참고문헌

List of Tables (Table 1~Table 5)

List of Figures (Fig. 1~Fig. 24)

부록 1

부록 2

A Study on the Application of Chebyshev Polynomials to the Lifting Surface Theory for Marine Propellers

Abstract

It is well known that Birnbaum Chordwise modes have been used to represent the loading distribution on a propeller blade in the unsteady conditions.

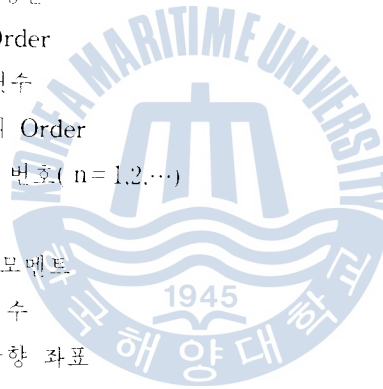
The calculations indicate that the spanwise loading distributions reach stable values with a few chordwise modes, but the chordwise loading distributions do not converge to its final form, particularly in the neighborhood of the leading and trailing edges with these few modes. However use of the Caesaro summability concept, a proper procedure for obtaining the limit of slowly convergent or even divergent series has served to establish the chordwise distribution.

This paper employs other type of chordwise modes, the normalized Chebyshev polynomials, which have been used by others to represent the loading distribution on a blade. The calculations have been performed for a set of 3-bladed propellers of different expanded area ratio operated in a screen-generated wake for comparison with experimental data.

The numerical results indicate that these new chordwise modes give satisfactory results for the prediction of thrust coefficient and torque coefficient. But they are unsatisfactory as far as the chordwise distribution of loading are concerned.

Nomenclature

F_x, F_y, F_z	: x, y, z 방향의 힘
$I_m(y)$: 제1종 m계 수정된 Bessel 함수
$I^{(\bar{m})}(y)$: 부록 1에 정의되어 있음.
$K_m(y)$: 제2종 m계 수정된 Bessel 함수
K	: Kernel 함수
\bar{K}	: 코드 방향으로 적분한 후의 Kernel 함수
L(r)	: 스캔 방향 부하 분포
$L^{(\bar{m})}(\rho)$: 스캔 방향 부하 성분
\bar{m}	: 양력 인산자의 Order
N	: 프로펠러 날개 갯수
\bar{n}	: 코드 방향 모드의 Order
n	: 날개마다 할당된 번호(n=1,2,...)
P	: 교란 압력
Q_x, Q_y, Q_z	: x,y,z 축에 관한 모멘트
q	: 속도장의 조화 계수
r	: 검사점의 반경 방향 좌표
r	: 검사점을 나타내는 점차
S	: 양력면
t	: 시간
U	: 균일 속도
$V_i(r)$: 날개에 수직한 속도의 Fourier 계수
$W(x,r,\phi ; t)$: 검사점에서 야기된 속도
x,r, ϕ	: 검사점의 원통 좌표계
x	: 검사점의 축 방향 좌표축
y	: 검사점의 수평 방향 좌표축
z	: 검사점의 수직 방향 좌표축
$H_{\bar{n}}(\theta_a)$: 코드 방향의 모드
θ	: 부하점의 각도를 나타내는 좌표축
θ_a	: 부하점의 코드 방향 각도
$\bar{\theta}_n$: $2\pi(n-1)/N, n=1,2,\dots,N$



$\theta_p(r)$: 기하학적 피치각
$\Lambda^{(n)}(x)$: 부록1에 정의 되어 있음.
ξ, ρ, θ	: 부하점의 원통 좌표계
ξ	: 부하점의 축 방향 좌표축
ρ	: 부하점의 반경 방향 위치
ρ	: 부하점을 나타내는 첨자
ρ_f	: 유체 밀도
σ	: 프로펠라의 Skewness양을 나타내는 첨자
$\Pi(\bar{m})$: 일반화된 양력 연산자
ϕ	: 검사점의 코드 방향의 각도를 나타내는 좌표축
ϕ_a	: 검사점의 코드 방향의 각도
Ω	: 프로펠러의 각속도
ψ	: 가속도 포텐셜 함수
Φ	: 교란속도 포텐셜
ω	: 각 회전수
$q = \frac{\omega}{\Omega}$	
$a = \frac{\Omega}{U}$	



제 1 장 서 론

물 속에서 작동하는 프로펠라를 해석하기 위하여 비정상 양력면 이론에 관해서 많은 연구가 행해져 왔다. 이 연구는 그 응용 분야가 대단히 넓다. 배의 진동분해, 수중 소음 발생 및 진파, 캐비테이션 그리고 수중에서 운용되는 물체들의 동적 안정성과 조종성 등이 그 응용 분야의 예가 될 것이다.

이 분야의 이론 및 실험은 세계적으로 많이 행하여져 왔다. 그 중에서도 이론적인 연구는 Sparenberg¹⁾, Hanaoka^{2,3)}, Brown⁴⁾ 등을 들 수 있겠다. Sparenberg는 정상류에서 스크류 프로펠라 해석을 위한 3차원 적분 방정식을 유도하였고, Hanaoka는 이를 비정상 흐름에 적용할 수 있도록 확장시켰다. 다른 연구들은 대부분 여러가지 가정 하에서 적분 방정식의 해법에 관한 것들이다. Brown은 Vortex 이론을 이용하여 양력면 이론을 발전 시켰다. 그는 Reissner의 높은 가로 - 세로비 양력면 이론을 이용하여 적분 방정식을 풀었다.

3차원 비정상 양력면 이론은 Davidson 연구소의 Tsakonias와 그의 동료 연구자들에 의해 본격적으로 개발되기 시작했다. 이들은 1968년⁵⁾ 부터 1973년⁶⁾ 사이에 많은 수정을 거듭하면서 기본적인 이론을 확립하였다. 한편 MIT에서는 3차원 비정상 프로펠라 양력면 이론의 수치적인 해법 개발에 많은 노력을 하였다. Kerwin, Frydenlund⁷⁾ 그리고 Kerwin, Lee⁸⁾의 논문이 그 좋은 예이다.

이 중에서 Davidson 연구소에서 연구된 이론들은 우선 수학적인 모델을 계속 발전시켜서 이를 편적분 형태로 나타내고 이 편적분을 푸는 수학적인 해법을 개발시켰다.^{5,6,9,10)} 이 이론은 우선 선형화된 비정상 양력면 이론에 근거하여 적분 방정식을 유도하여, 이 적분 방정식의 Kernel 함수를 “가속도 포텐셜 방법”에 의해 유도하고 소위 “일반화된 양력 연산자” 방법에 의해서 편적분을 선적분으로 바꾸어 놓는다. 그리고 나서 Collocation Method에 의해 선적분 방정식을 연립 방정식으로 바꾸어 풀었다.

이때 코드 방향의 부하 분포를 나타내는 모드는 비정상 흐름의 경우 모드의 갯수를 증가 시키도 코드 방향의 부하 분포가 잘 수렴되지 않는다.

즉, 스펀 방향의 부하는 몇 개의 모드만 취해도 곧 수렴이 되나 코드 방향의 부하는 모드의 갯수를 계속 증가 시키도 수렴이 되지 않는다. 이 문제를 해결하기 위해서 “Caesaro의 합 계

념”을 적용해서 코드 방향의 부하를 수렴시키는 방법을 제시한 논문이 참고 문헌에 인용되어 있다.^{6,9,10)}

이러한 문제를 해결하기 위해서 새로운 코드 방향의 모드 도입을 본 연구에서 시도하고자 한다. 이 새로운 코드 방향의 모드는 Chebyshev 다항식의 선형적인 항의 합을 이 다항식들의 직교 요소로서 정식화시킨 것으로 프로펠러 앞날에서는 특이가 되고 뒷날에서는 Kutta의 조건을 만족시킨다.^{12,13)}

이 새로운 코드 방향의 모드를 도입하여 3차원 비정상 양력면 이론을 전개하고 이의 수치 계산을 행하여 NSRDC의 실험 결과와 비교 검증하였다.



제 2 장 적분방정식의 유도

Fig. 1에서 나타낸 바와 같이 단일 흐름의 방향으로 프로펠라 축 방향을 양의 x축으로 하고 같은 수평면에서 수직인 축을 y의 양의 방향으로 잡는다. 우수 좌표계를 도입하여 x,y평면에 수직인 방향을 양의 z축으로 정의한다. 원통 좌표계를 도입하여 프로펠라 날개 위의 축 방향 위치를 ξ , 반경 방향 위치를 ρ , 그리고 부하점(Loadng Point)의 z축과 이루는 반시계 방향으로의 양의 각도를 θ 로 정의한다. 프로펠라 하브에서의 코드 중점과 프로펠라 축의 중점점을 연결한 프로펠라 기준선과 부하점과의 사이 각을 θ_0 로 하고 이들의 관계를 Fig.2에 도시하였다.

부하점의 $\xi, \rho, \theta, \theta_0$ 에 대응하는 검사점(Control Point)의 위치는 x, r, ϕ 및 ϕ_0 로 나타낸다.

복용출점을 부하점(ξ, ρ, θ)에 분포시켰을 때 임의의 시각 t 때에 검사점(x, r, ϕ)에 복용출점들이 주는 압력을 다음과 같다.

$$p(x, r, \phi; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \Delta P(\xi, \rho, \theta; t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R(x, r, \phi; \xi, \rho, \theta)} \right) dS \dots\dots\dots (2.1)$$

여기서

n 은 양의 축 방향 성분을 가지는 단위 수직 벡터이고 $\frac{\partial}{\partial n}$ 은 부하점 (ξ, ρ, θ)에서 평면 S에 수직한 미분을 나타낸다. 그리고 $R(x, r, \phi; \xi, \rho, \theta) = [(x - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi)]^{1/2}$ 은 부하점과 검사점간의 거리를 나타낸다.

$\Delta P(\xi, \rho, \theta; t)$ 는 양력면에 있어서 양면의 압력 차이를 나타내고, 식 (2.1)에서는 복용출점의 강도를 나타낸다.

가속도 포텐셜 방법(Acceleration Potential Method)을 쓰기 위해 다음과 같은 가정을 하고 정의를 내린다.

- 가정 1. 교란 속도의 크기는 작다.
- 2. 프로펠라의 날개는 얇다.
- 3. 프로펠라는 캐비테이션이나 흐름의 박리가 없이 작동되고 있다.

위의 가정 하에서는 수중 프로펠라의 비정상 양력면 이론은 선형화 되어 수직화 될 수 있고, 이에 따라 가속도 포텐셜 함수 ψ 를 정의하면

$$\psi = -\frac{P}{\rho_f} \dots\dots\dots (2.2)$$

여기서 ρ_f 는 유체의 밀도이다.

복용출점의 강도를 $\Delta P(\xi, \rho, \theta : t) = \Delta P(\xi, \rho, \theta) e^{i\omega t}$ 로 변수 분리 시키면

$$\psi(x, r, \phi_0 ; t) = \frac{1}{4\pi\rho_f} \iint_s \Delta\rho(\xi, \rho, \theta) \sigma^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R(x, r, \phi_0 - \Omega t ; \xi, \rho, \theta_0 - \Omega t)} \right) dS \dots\dots\dots (2.3)$$

여기서 ω 는 각 회전수이고, θ_0, ϕ_0 는 이동 좌표계에 있어서 프로펠러 날개의 기준선에 대한 부하점과 검사점의 각도를 나타낸다. Ω 는 포르펠라의 각 속도 이다.

교란 속도 포텐셜(The Perturbation Velocity Potential) $\Phi(x, y, z ; t)$ 를 도입하고 Φ 와 $P(x, r, \phi_0 ; t)$ 의 축 방향의 균일류 U 에 있어서의 선형화된 관계를 유도해보자.

$u = U + u'$ 으로 놓고 u' 은 교란 속도를 나타낸다. 오일러의 운동 방정식으로 부터 x 방향 성분만을 생각하면

$$\frac{\partial(U+u')}{\partial t} + (U+u')\frac{\partial(U+u')}{\partial x} + v\frac{\partial(U+u')}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + f_x \dots\dots\dots (2.4)$$

중력장만을 생각하면 $f_x = 0$ 이다.

여기서

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x} \ll U \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u'}{\partial x} \ll U \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ 인 관계를 고려하면 (2.4)식은}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} \dots\dots\dots (2.5)$$

으로 된다.

$$u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{를 도입하면 (2.5)식은}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_f} P \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{P}{\rho_f} \dots\dots\dots (2.6)$$

로 주어진다.

이것은

$$\int d\Phi = -\frac{1}{\rho_f U} \int P dx \text{ 로 되고}$$

∞ 에서 x 까지 적분을 취하면서 $x = -\infty$ 에서의 $\Phi = 0$ 을 고려하면

$$\Phi = \frac{1}{\rho_j U} \int_{-\infty}^x P d\lambda \dots\dots\dots (2.7)$$

변수 변환을 행하면

$$\tau = X - Uj, \quad t = \frac{x - \tau}{U}$$

$$\Phi(x, j, \phi_0; t) = \frac{1}{\rho_j U} \int_{-\infty}^x P(\tau, j, \phi_0; t - \frac{x - \tau}{U}) d\tau \dots\dots\dots (2.8)$$

(2.2)식의 관계로 부터

$$\Phi(x, j, \phi_0; t) = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^x \Psi(\tau, j, \phi_0; t - \frac{x - \tau}{U}) d\tau \dots\dots\dots (2.9)$$

(2.3) 식을 (2.9)식에 대입하면

$$\Phi(x, j, \phi_0; t) = \frac{1}{4\pi\rho_j U} \iiint_S \Delta P(\xi, \rho, \theta_0) e^{i(\omega t - x\xi + \tau\bar{\theta}_n)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS d\tau \dots\dots\dots (2.10)$$

여기서

$$e^{i(\omega t - x\xi + \tau\bar{\theta}_n)} = e^{i(\omega n t - x\xi + \tau\bar{\theta}_n)}$$

여기서 $\frac{\omega}{\Omega} = q, \quad \frac{\Omega}{U} = a$ 로 두면

$$e^{i(\omega n t - x\xi + \tau\bar{\theta}_n)} = e^{i(q a n t - x\xi + \tau\bar{\theta}_n)}$$

모든 프로펠라 날개의 영향을 다 중첩시키면 (2.10)식은

$$\Phi(x, j, \phi_0; t) = \frac{1}{4\pi\rho_j U} \sum_{n=1}^N e^{i q a n t} \iiint_S \Delta P(\xi, \rho, \theta_0) \int_{-\infty}^x e^{i q a n \tau - \tau \bar{\theta}_n} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\tau dS \dots\dots\dots (2.11)$$

여기서 $\bar{\theta}_n = 2\pi(n-1)/N$

n 은 프로펠라 날개의 번호이고 N 은 프로펠라 날개 개수의 총합이다.

$q = \omega / \Omega$: order of blade harmonic

$a = \Omega / U$

$R = \sqrt{(\tau - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2\gamma\rho \cos(\theta_0 - \phi_0 + \bar{\theta}_n - a(\tau - x))}^{-1/2}$ 이다.

따라서 속도 포텐셜이 주어졌으므로 동점에서의 유도된 속도는 다음과 같이 결정된다.

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi(x, j, \phi_0; t)$$

W 를 어떤 프로펠라 날개에 수직인 이미 알고 있는 고랑 속도라 하면 (2.11) 식은

$$W = -\frac{\partial}{\partial n'} \Phi(x, r, \phi_0; t) \text{로 된다.} \dots\dots\dots (2.12)$$

(2.11)과 (2.12)로 부터

$$W = -\frac{e^{iq_0 t}}{4\pi\rho_j U} \sum_{i=1}^N \iint_S \Delta P^{(q)}(\xi, \rho, \theta_0) \frac{\partial}{\partial n'} \int_{-\infty}^x e^{iq(a(\tau-x) - \delta n)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R}\right) d\tau dS \dots\dots\dots (2.13)$$

이 식은 ΔP 를 미지수로 하는 적분 방정식이다.

여기에서

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\rho}{1+a^2\rho^2} \left(a \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \right) \dots\dots\dots (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{r}{1+a^2r^2} \left(a \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right)$$

(2.13)식의 좌변은 다음 식으로 나타낼 수가 있다.

$$W = V^{(q)}(r, \phi_0) e^{-iq\mathbb{H}} \dots\dots\dots (2.15)$$

여기서 \mathbb{H} 는 이동 좌표계로 나타내면 $\mathbb{H} = -\Omega t$ 로 되고 V 는 복소수 형태이다.

위의 결과를 써서 적분 방정식 (2.13)을 다시 나타내 보면

$$V^{(q)}(r) e^{-iq\mathbb{H}} = \iint_S \Delta P^{(q)}(\xi, \rho, \theta_0) K(r, \phi_0; \rho, \theta_0; q) dS \dots\dots\dots (2.16)$$

여기서 K 는 Kernel 함수를 나타내는데 다음과 같다.

$$K(r, \phi_0; \rho, \theta_0; q) = -\frac{1}{4\pi\rho_j U} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N e^{-iq\delta n} \frac{\partial}{\partial n'} \int_{-\infty}^x e^{iqa(\tau-x)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R}\right) d\tau \dots\dots\dots (2.17)$$

그리고 $\delta = \frac{\phi_0 - \theta_0}{a} - (x - \xi)$ 이다.

여기서 $\delta \rightarrow 0$ 은 $x \rightarrow \frac{\phi_0}{a}$ 이고, $\xi \rightarrow \frac{\theta_0}{a}$ 를 의미한다.

이 $\delta \rightarrow 0$ 은 특이성 때문에 생기는 수학적인 어려움 때문에 도입했다. (2.16)식에서 알 수 있는 바와 같이 (2.17)식으로 나타내어지는 Kernel 함수의 값이 계산 되어져야만 (2.16)식의 적분 방정식은 미지수 ΔP 에 관해서 풀리게 된다.

(2.16)식은 일반화된 양력 연산자 방법에 의해 풀수가 있는데, 이 방법은 프로펠러가 반경을 따라서 면적분을 선적분으로 바꿔주는 역할을 한다. 일단 선적분으로 변환된 적분 방정식은 Collocation Method에 의해서 스펠 방향의 부하 분포를 미지수로 하는 연립방정식으로 변환이 가능하다.

(2.16)식은 다음과 같은 표현을 써서 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 L^{(n)}(\rho, \theta_\alpha) &= \Delta P^{(n)}(\xi, \rho, \theta_\alpha) / \rho \theta_\alpha^n (lb/ft) \\
 \theta_\alpha &= \sigma^p + \theta_b^n \cos \theta_\alpha, \quad 0 \leq \theta_\alpha \leq \pi \quad \dots \dots \dots (2.18) \\
 \phi_\alpha &= \sigma^r + \theta_b^r \cos \phi_\alpha, \quad 0 \leq \phi_\alpha \leq \pi
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^{(m)} \theta_\alpha \phi_\alpha \dots \dots \dots \int_{-\infty}^{\infty} I_m(\epsilon |k| \rho) K_m(\epsilon |k| r) e^{i\tau - \epsilon |k| dk} \dots \dots (2.19)$$

$\rho < r$ 인 경우 (만일 $\rho > r$ 이면 I_m 과 K_m 의 ρ 와 r 이 서로 바뀌어져야 한다.

여기서 σ 는 투영된 프로펠러 면에서 하브를 지나는 기준선에서 부터 중간 코드선의 각을 나타내고 θ_b 는 투영된 프로펠러 날개의 반코드의 Subtended Angle이다.

θ_α 는 부하점의 코드 방향의 각도이고,

ϕ_α 는 짐사점의 코드 방향의 각도를 나타낸다.

$$L^{(n)}(\rho, \theta_\alpha) = \sum_{m=0}^{n/2} L^{(n,m)}(\rho, H_m, \theta_\alpha) \dots \dots \dots (2.20)$$

여기서 $L^{(n,m)}(\rho)$ 는 적분 방정식의 해로써 결정 되어져야 할 스펀 방향의 부하 성분이고, $H_m(\theta_\alpha)$ 는 코드 방향의 코드이다.

적분 방정식(2.16)식의 양변에 일반화된 양력 연산자를 적용하면

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Pi(\bar{m}) \text{Eq. (2.16)} d\phi_\alpha, \quad \bar{m}=0, 1, 2, \dots \dots \dots (2.21)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \Pi(1) &= 1 - \cos \phi_\alpha \quad \text{The Glauret lift operator} \\
 \Pi(2) &= 1 + 2 \cos \phi_\alpha \quad \dots \dots \dots (2.22) \\
 \Pi(\bar{m}) &= \cos(\bar{m} - 1) \phi_\alpha \quad \text{for } \bar{m} > 2
 \end{aligned}$$

이렇게 해서 적분 방정식들이 (2.23)식과 같이 얻어진다. 이때 코드 방향 모드의 최대수인 \bar{n} 은 \bar{m} 과 같다.

$$\frac{\bar{W}^{(n, \bar{m})}(r)}{l^{\bar{m}}} = \sum_{m=0}^{n/2} \int_0^\pi L^{(n,m)}(\rho) \bar{K}^{(m, \bar{m})}(r, \rho) q d\rho \quad \dots \dots \dots (2.23)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \bar{W}^{(n, \bar{m})}(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Pi(\bar{m}) \frac{V^{(n)}(r)}{l^{\bar{m}}} e^{i\bar{m}\phi} d\phi_\alpha \\
 &= \frac{V^{(n)}(r)}{l^{\bar{m}}} e^{i\bar{m}\sigma} I_{\bar{m}}(q\theta_b^r) \quad \dots \dots \dots (2.24)
 \end{aligned}$$

$$I_{\bar{m}}(q\theta_b^r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Pi(\bar{m}) e^{i\bar{m}\sigma \cos \phi_\alpha} d\phi_\alpha$$

여러가지 \bar{m} 값에 대한 $I_{\bar{m}}(y)$ 의 값은 부록 1에 나타내었다.

코드 방향의 적분을 행한 후 Kernel 함수는 최종적으로 다음과 같은 모양이 된다.

$$\begin{aligned}
\bar{K}^{(m,n)} = & \left\{ -\frac{N}{4\pi\rho_j U^2 r_0} \right\} \frac{r}{a\sqrt{1+a^2 r^2}} \sum_{m=q+iN}^{\infty} e^{-im\Delta\sigma} \\
& \cdot \left\{ e^{i(m-q)\Delta\sigma} \left[a^2(m-q) + \frac{m}{r^2} \right] \left[a^2(m-q) + \frac{m}{\rho^2} \right] I^{(m)}(q\theta_b^r) \Lambda^{(m)}(q\theta_b^r) \right. \\
& \cdot I_m(a|m-q|\rho) K_m(a|m-q|r) \\
& - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ak + \frac{m}{r^2}) (ak + \frac{m}{\rho^2}) e^{ikia\Delta\sigma} I^{(m)}((m-\frac{k}{a})\theta_b^r) \wedge^{(n)}((m-\frac{k}{a})\theta_b^r) J \\
& \left. \cdot I_m(|k|\rho) K_m(|k|r) dk \right\} \dots\dots\dots (2.25)
\end{aligned}$$

여기서

$$\Lambda^{(n)}(z) = \int_0^\pi H_n(\theta_\alpha) e^{-iz\cos\theta_\alpha} \sin\theta_\alpha d\theta_\alpha \quad \text{이고}$$

그리고 $\Delta\sigma = \sigma^r - \sigma^\rho$ 이다.

(2.25)식에서 대괄호의 바깥에 있는 것은 프로펠러 반경 r_0 에 관해서 무차원화 시켰다. $\Lambda^{(n)}(z)$ 는 부록 1에 주어져 있다.

(2.23)식으로 주어진 적분 방정식은 Collocation Method를 써서 수치 계산으로 $L^{(q,n)}(\rho)$ 에 관해서 풀어진다.

제 3 장 코드 방향의 모드

종래의 대부분의 이론에서 코드 방향의 모드는 앞날에서 특이성을 가지고 뒷날에서 Kutta 조건을 만족 시키는 다음과 같은 모드를 써왔다.

$$L^{(n)}(\rho, \theta_\alpha) = \left. \frac{1}{\pi} \left\{ L^{(1)}(\rho) \cot \frac{\theta_\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} L_n(\rho) \frac{\sin^{n-1} \theta_\alpha}{n-1} \right\} \right\} \dots \dots \dots (3.1)$$

여기서 $L^n(\rho)$ 는 스펀 방향의 부하 성분이다.

이것은 Birnbaum 코드 방향 모드로 불리며 Cotangent 모드와 Sine 모드들의 합으로 되어 있다. 이 모드를 썼을 경우 코드 방향의 모드를 몇 개만 취해도 스펀 방향의 부하는 안정된 값들에 이르게 되나, 코드 방향의 부하 분포는 코드 방향의 모드들을 증가 시키고 수렴된 값을 주지 않아서 통상 Caesaro 합 개념을 적용 함으로써 수렴된 값을 얻을 수 있는 단점이 있다.

본 연구에서는 이 문제를 극복하는 한 방법으로서 새로운 코드 방향의 모드를 도입해서 문제를 풀어 보고자 한다.

새로 도입된 코드 방향의 모드 $H_n(\theta_\alpha)$ 는 아래와 같다.¹³⁾

$$H_n(\theta_\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n-1)\theta_\alpha + \cos n\theta_\alpha}{\sin \theta_\alpha}, \quad n=1, 2, 3, \dots \dots \dots (3.2)$$

이들은 Chebyshev 다항식의 선형적인 항의 합을 Chebyshev 다항식의 적교요소로 나누어 얻은 형이다.

각각의 모드를 나타내어 보면

$$\begin{aligned} H_1(\theta_\alpha) &= \frac{1}{\pi} \cot \frac{\theta_\alpha}{2} \\ H_2(\theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \left(\cot \frac{\theta_\alpha}{2} - 2 \sin \theta_\alpha \right) \dots \dots \dots (3.3) \\ H_3(\theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \left(\cot \frac{\theta_\alpha}{2} - 2 \sin \theta_\alpha - 2 \sin 2\theta_\alpha \right) \end{aligned}$$

등으로 나타낼 수 있다.

각각의 모드는 앞날($\theta_\alpha=0$)에서 특이성을 나타내는 $\cot \frac{\theta_\alpha}{2}$ 를 가지고 있고 또 이것은 뒷날에

제 3 장 코드 방향의 모드

종래의 대부분의 이론에서 코드 방향의 모드는 앞날에서 특이성을 가지고 뒷날에서 Kutta 조건을 만족 시키는 다음과 같은 모드를 써왔다.

$$L^{(n)}(\rho, \theta_\alpha) = \frac{1}{\pi} \left\{ L^{(1)}(\rho) \cot \frac{\theta_\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} L_n(\rho) \frac{\sin(n-1)\theta_\alpha}{n-1} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

여기서 $L^n(\rho)$ 는 스펀 방향의 부하 성분이다.

이것은 Birnbaum 코드 방향 모드로 불리며 Cotangent 모드와 Sine 모드들의 합으로 되어 있다. 이 모드를 썼을 경우 코드 방향의 모드를 몇 개만 취해도 스펀 방향의 부하는 안정된 값들에 이르게 되나, 코드 방향의 부하 분포는 코드 방향의 모드들을 증가 시켜도 수렴된 값을 주지 않아서 통상 Caesaro 합 개념을 적용 함으로써 수렴된 값을 얻을 수 있는 단점이 있다.

본 연구에서는 이 문제를 극복하는 한 방법으로서 새로운 코드 방향의 모드를 도입해서 문제를 풀어 보고자 한다.

새로 도입된 코드 방향의 모드 $H_n(\theta_\alpha)$ 는 아래와 같다.¹³⁾



$$H_n(\theta_\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n-1)\theta_\alpha + \cos n\theta_\alpha}{\sin \theta_\alpha}, \quad n=1, 2, 3, \dots \dots\dots (3.2)$$

이들은 Chebyshev 다항식의 선형적인 항의 합을 Chebyshev 다항식의 최고요소로 나누어 얻은 형이다.

각각의 모드를 나타내어 보면

$$\begin{aligned} H_1(\theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \cot \frac{\theta_\alpha}{2} \\ H_2(\theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \left(\cot \frac{\theta_\alpha}{2} - 2 \sin \theta_\alpha \right) \dots\dots\dots (3.3) \\ H_3(\theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \left(\cot \frac{\theta_\alpha}{2} - 2 \sin \theta_\alpha - 2 \sin 2\theta_\alpha \right) \end{aligned}$$

등으로 나타낼 수 있다.

각각의 모드는 앞날($\theta_\alpha = 0$)에서 특이성을 나타내는 $\cot \frac{\theta_\alpha}{2}$ 를 가지고 있고 또 이것은 뒷날에서 Kutta 조건을 만족 시키며 0으로 된다.

제 4 장 교란 속도 분포

비정상 흐름의 경우 날개 반경을 따라서 여러개의 스트립들로 나누어 이 스트립마다 코드 중심에 작용하는 반류의 양의 수직 방향 속도 성분을 생각해 보면

$$\frac{V_N(r)}{U} = \frac{V_L(r)}{U} \cos \theta_p(r) - \frac{V_T(r)}{U} \sin \theta_p(r) \dots\dots\dots (4.1)$$

여기서

$$\frac{V_L(r)}{U} = -1 + \frac{V_x(r)}{U} \quad : \text{교란 속도}$$

$$\frac{V_x(r)}{U} \quad : \text{측정된 축 방향 속도}$$

$$\frac{V_T(r)}{U} \quad : \text{측정된 접선 속도}$$

$$\theta_p(r) \quad : \tan^{-1} \frac{p(r)}{2\pi r r_o}$$

$$p(r) \quad : \text{프로펠라 피치 [단위 : 피트]}$$

$$r_o \quad : \text{프로펠라 반경 [단위 : 피트]}$$

$$r \quad : r_o \text{로 나타낸 반경거리}$$

따라서

$$\frac{V_N(r)}{U} = \left[\frac{V_x(r)}{U} - 1 \right] \cos \theta_p(r) - \frac{V_T(r)}{U} \sin \theta_p(r) \dots\dots\dots (4.2)$$

여기서 프로펠라 날개의 위쪽을 $\theta = 0$ 으로 해서 반시계 방향을 양(+)으로 취했고, 반류의 축 방향 성분 V_x 는 양의 x축 방향을 양으로 하였다. 그리고 접선 방향 성분 V_T 는 반시계 방향에서 양으로 하였다. 측정된 반류의 조화 해석은

$$\frac{V_x(r)}{U} = a_0(r) + \sum_{q=1}^{\infty} [a_q(r) \cos q\theta + b_q(r) \sin q\theta] \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\frac{V_T(r)}{U} = A_0(r) + \sum_{q=1}^{\infty} [A_q(r) \cos q\theta + B_q(r) \sin q\theta]$$

수직 속도의 $q=0$ 인 경우

$$\frac{V_N^{(0)}(r)}{U} = (a_0(r) - 1) \cos \theta_p(r) - A_0(r) \sin \theta_p(r) \dots\dots\dots (4.4)$$

그리고 다른 요소들은

$$\begin{aligned} \frac{V_N^{(q)}(r)}{U} = & [a_q(r)\cos\theta_p(r) - A_q(r)\sin\theta_p(r)]\cos q\theta \\ & + [b_q(r)\cos\theta_p(r) - B_q(r)\sin\theta_p(r)]\sin q\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

적분 방정식 (2.23) 식의 좌변은 복소수 형태이다.

$$\frac{W^{(q)}}{U} = i\left(\frac{V_N^{(q)}}{U}\right)_R + i\left(\frac{V_N^{(q)}}{U}\right)_I e^{-iq\theta} \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

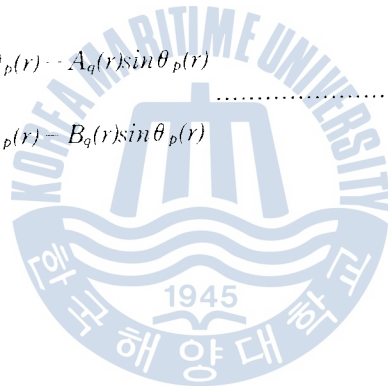
물론 이때 실수 부분만을 취해야 한다.

실수부분은

$$\left(\frac{V_N^{(q)}}{U}\right)_R \cos q\theta + \left(\frac{V_N^{(q)}}{U}\right)_I \sin q\theta \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

여기서

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_N^{(q)}(r)}{U}\right)_R = & a_q(r)\cos\theta_p(r) - A_q(r)\sin\theta_p(r) \\ \left(\frac{V_N^{(q)}(r)}{U}\right)_I = & b_q(r)\cos\theta_p(r) - B_q(r)\sin\theta_p(r) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.8)$$



제 5 장 프로펠러 날개에 미치는 압력분포, 유체력과 모멘트, 날개 굽힘 모멘트

5.1 압력분포

스팬 방향의 부하 성분들이 구해지면 이제 스펀 방향 부하 분포는 다음과 같이 구할수가 있다.

$$\begin{aligned}
 L^{(q)}(r) &= \int_0^\pi L^{(n)}(r) H_n(\theta_\alpha) \sin \theta_\alpha d\theta_\alpha \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{ L^{(1)}(r)(1 + \cos \theta_\alpha) + \sum_{n=2}^q L^{(n)}(r) [\cos(n-1)\theta + \cos n\theta] \} d\theta \\
 &= 2L^{(1)}(r) \text{ (각각의 } q \text{에 대해서)} \dots\dots\dots (5.1)
 \end{aligned}$$

날개 앞날의 특이성이 존재할 때마다 이를 물리적으로 존재 가능한 유한한 값으로 만들기 위해서 코드 방향의 압력 분포에 Van Dyke 혹은 Lighthill 수정을 적용시킨다. 이것은 간단히 적용할 수가 있는데

$$\bar{C}_{p1} = \frac{S}{S + \frac{\rho_o}{2}} C_{p1} \dots\dots\dots (5.2)$$

여기서 C_{p1} 은 선형 이론에 의한 얇은 익 이론으로 부터 구한 압력 계수이고 S 는 $(1 - \cos \theta_\alpha) / 2$ 라는 수식으로 표현되고 코드 길이에 대한 앞날의 코드 방향의 위치를 나타낸다. ρ_o 은 코드 길이에 대한 앞날 반경을 나타낸다.

이상 언급한 것들을 적용 시키면 부하 분포는 다음과 같이 변화된다.

$$\begin{aligned}
 L^{(q)}(r, \theta_\alpha) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos \theta_\alpha}{1 + \rho_o \cos \theta_\alpha} \right) \{ [L^{(q,1)}(r) + L^{(q,2)}(r) + \dots + L^{(q,n)}(r)] \cot \frac{\theta_\alpha}{2} \\
 &\quad - 2[L^{(q,2)}(r) + L^{(q,3)}(r) + \dots + L^{(q,n)}(r)] \sin \theta_\alpha \\
 &\quad - 2[L^{(q,3)}(r) + L^{(q,4)}(r) + \dots + L^{(q,n)}(r)] \sin 2\theta_\alpha \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad - 2L^{(q,n)}(r) \sin(n-1)\theta_\alpha \} \dots\dots\dots (5.3)
 \end{aligned}$$

날개 앞날의 부근에서 압력 분포는 Cotangent가 지배적이므로

$$\frac{1 - \cos \theta_\alpha}{1 + \rho_o \cos \theta_\alpha} \cot \frac{\theta_\alpha}{2} = \frac{\sin \theta_\alpha}{1 + \rho_o \cos \theta_\alpha} \dots\dots\dots (5.4)$$

날개 앞날의 부근에서 최대 압력이 되는 곳의 위치는 다음 식으로 결정할 수가 있다.

$$\frac{d}{d\theta_\alpha} \frac{\sin \theta_\alpha}{1 + \rho_o \cos \theta_\alpha} = 0 \dots\dots\dots (5.5)$$

따라서

$\cos \theta_a = \frac{1}{1+\rho_0}$ 이다. 이것은 Van Dyke-Lighthill 수정을 가하더라도 날개 앞날 부분에서

최대 압력이 나타나는 점의 코드 방향의 위치를 나타낸다.

모든 코드 방향 모드($\bar{n}=1$ 부터 \bar{n}_{max} 까지)는 $\text{Cot} \frac{\theta_a}{2}$ 항을 가지고 있기 때문에 Van Dyke Lighthill 수정을 가하더라도 날개 앞날 부분에서 코드 방향 부하는 큰 값이 된다.

5.2 유체력과 모멘트¹⁾

프로펠라 날개에 미치는 유체력과 모멘트의 주요 성분들은 다음과 같이 분류될 수가 있고 이를 Fig. 1에 나타내었다.

힘... F_x : 추력 (x축 방향)

F_y, F_z : 수평과 수직 방향의 분력들을 각각 나타낸다.

모멘트... Q_x : x축에 관한 모멘트

Q_y, Q_z : y축과 z축에 관한 굽힘 모멘트를 각각 나타낸다.

N개의 날개를 가진 프로펠라에 의해 생긴 lN ($l=0, 1, 2, \dots$) 주파수에서의 총 힘들은 다음 식으로 표현되고 그 유도 과정은 부록 2에 유도하였다.

$$\begin{aligned}
 F_x &= Re\{Nr_0 e^{iN\Omega t} \int_0^1 L^{(lN)}(r) \cos \theta_p(r) dr\} \\
 F_y &= Re\left\{ \frac{Nr_0}{2} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \sum_{n=1}^{lN} [L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(-\theta_b) + L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(\theta_b)] \sin \theta_p(r) dr \right. \\
 F_z &= Re\left\{ \frac{Nr_0}{2i} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \sum_{n=1}^{lN} [L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(-\theta_b) - L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(\theta_b)] \sin \theta_p(r) dr \right. \\
 &\dots\dots\dots (5.6)
 \end{aligned}$$

모멘트 성분들은 (5.7)식과 같이 결정될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -Re\{Nr_0^2 e^{iN\Omega t} \int_0^1 L^{(lN)}(r) \sin \theta_p(r) r dr\} \\
 Q_y &= Re\left\{ \frac{Nr_0^2}{2} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{lN} [L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(-\theta_b) + L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(\theta_b)] \cos \theta_p(r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{lN} [L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(-\theta_b) - L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(\theta_b)] (i \theta_b) \sin \theta_p(r) \tan \theta_p(r) \right] \right. \\
 &\quad \left. \cdot r dr \right\} \\
 Q_z &= Re\left\{ \frac{Nr_0^2}{2} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{lN} [L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(-\theta_b) - L^{(lN-1, n)}(r) \Lambda^{-n}(\theta_b)] \cos \theta_p(r) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1} [L^{(2N-1, n)}(r)\Lambda_1^{(n)}(-\theta_\delta) + L^{(2N+1, n)}(r)\Lambda_1^{(n)}(\theta_\delta)] (i\theta_\delta) \sin \theta_p(r) \tan \theta_p(r) \cdot r dr \} \dots\dots\dots (5.7)$$

여기서 $\Lambda^{(n)}(z)$ 와 $\Lambda_1^{(n)}(z)$ 는 부록 1에서 정의하였고 그 값들은 Bessel 함수로 나타내었다. 모든 힘과 모멘트들은 다음과 같은 형식으로 쓸 수 있다.

$$Re[C^{(q)}e^{i\phi}e^{iq\Theta}] = C^{(q)}\cos(-q\Theta + \phi) = C^{(q)}\cos(q\Theta - \phi_q) \dots\dots\dots (5.8)$$

여기서 Θ 는 날개 각도를 나타내는데 반시계 방향이 양이고 q 는 축 회전수의 Order를 나타내고 $C^{(q)}$ 는 힘과 모멘트의 크기를, 그리고 ϕ_q 는 위상각을 나타낸다.

5.3 날개 굽힘 모멘트¹⁾

프로펠라 날개의 임의의 반경 r_j 에서 피치 앞면에 대한 날개 굽힘 모멘트는 어떤 축 회전수 q 에서 날개 스패ن 방향의 부하를 거리로 곱해서 코드 방향으로 적분해서 계산 할 수가 있다.

$$M_b^{(q)}e^{iq\Theta} = r_o^2 e^{iq\Theta} \int_{r_j}^r L^{(q)}(r)\cos(\theta_p(r) - \theta_p(r_j))(r - r_j)dr \dots\dots\dots (5.9)$$

피치 앞면에 대한 날개 굽힘 모멘트는 날개의 면을 압축하는 경우를 양으로 잡는다. 프로펠라가 시계 방향으로 축을 중심으로 회전할 때 순간 날개 굽힘 모멘트는

$$M_b = Re \sum_q M_b^{(q)}e^{-iq\theta} = \sum |M_b^{(q)}| \cos(q\Theta - \phi_q) \dots\dots\dots (5.10)$$

여기서 ϕ_q 는 위상으로 $\phi_q = \tan^{-1} \frac{(M_b^{(q)})_{Im}}{(M_b^{(q)})_{Re}}$ 로 나타내어지고 $(M_b^{(q)})_{Re}$ 과 $(M_b^{(q)})_{Im}$ 는 날개 굽힘 모멘트의 실수 부분과 허수 부분을 나타낸다.

프로그램에서는 프로펠라 스패ن 방향의 중앙 스트립에서만 계산되었고 나머지 부분에 대한 모멘트는 내삽법이나 외삽법으로 구해야만 한다. 이렇게 제한된 계산을 한 이유는 중앙 스트립에 대해서는 피치각 뿐만이 아니라 다른 기하학적인 형상들이 주어져 있기 때문이다.

제 6 장 수치 해석 결과

확장 면적비(EAR)가 다른 3개의 프로펠라에 대해서 계산을 해 보았다. 이들에 대해서는 “미 해군성(NSRDC)”에서 실험한 결과¹⁹⁾가 있어서 비교가 용이하다. $a = 0.8$ 인 평균선을 가진 NACA-66 단면을 변형해서 만든 이 프로펠라들은 직경 1피트 이고, 하브 직경은 0.2피트 이고, 피치비는 반경 0.7되는 곳에서 1.08이고, 3개의 날개를 가지고 있다. 관계되는 기하학적인 특징 들은 Table 1 부터 Table 3 사이에 나타내었다.

Table 1에서는 코드 길이에 대한 최대 캠버의 비를 나타내었고, Table 2에서는 코드 길이에 대한 최대 두께의 비를 도표화해서 보여주며, Table 3은 코드 길이에 대한 앞날의 반경의 비 를 나타내었다.

NSRDC 실험은 24인치 터널에서 (밀폐된) 제트 시험 구간을 이용하여 실시되었고, 이때 프 로펠라의 초당 회전수는 15(rps)의 일정 회전수로 작동되었으며 균일 정상류의 속도는 12.5ft/sec이었다.

3회전 스코린 반류의 경우에 대한 반류 정보는 Table 4에 나타내었다.

$$\text{길이 방향의 속도} : \frac{V_x}{U} = C_q \sin(q\Omega t + \phi_q) = C_q \sin(-qR + \phi_q) \text{ 이고,}$$

$$\text{접선방향의 속도} : \frac{V_\theta}{U} = 0 \text{ 이다.}$$

Table 4에 주어진 반류의 경우에는

$$\text{실수부분} : Re = C_q \sin \phi_q \cos \theta_p(r) \text{ 이고,}$$

$$\text{허수부분} : Im = -C_q \cos \phi_q \cos \theta_p(r) \text{ 이다.}$$

비정상 상태의 경우에 대한 실계 전진비 J 에 대해서 계산을 행하였는데 확장 면적비가 0.3, 0.6 그리고 1.2에 대해서 각각의 실계 전진비가 0.841, 0.831 그리고 0.844였다.

Table 5는 정상 상태의 경우에 확장 면적비가 0.6인 프로펠라의 계산을 Chebyshev모드를 4, 5, 6으로 취하면서 그 결과들을 실험치와 참고 문헌[9]에 발표된 Roof-Top 모드의 계산 결과 와 비교하였다. 여러가지 Chebyshev 모드 갯수에 대한 비정상 추력과 토크 계수를 Fig. 4로부터 Fig. 11까지에 나타내었고, 각각에 해당되는 위상각도 나타내어서 실험치와 비교하였다.

계산 결과와 실험치는 추력과 토크의 경우 만족스럽고, 특히 확장 면적비가 0.6인 경우는 계산 결과와 실험치가 잘 일치한다.

그러나 Fig. 12에서 Fig. 24까지에는 무차원 반경이 0.65인 곳에서의 코드 방향의 비정상 상태

에 대한 부하 분포를 보여주고 있는데 Chebyshev 모드를 증가 시켜도 수렴되는 경향을 보여주지 못하고 있다. Fig. 24는 무차원 반경이 0.65인 곳에서 확장 면적비가 0.6인 프로펠라에 대한 정상 상태의 코드 방향 프로펠라 압력 분포를 여러가지 Chebyshev 모드와 참고문헌[9]에 제시된 Roof-Top 모드의 경우와 비교하였다.



제 7 장 결 론

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

특히 Davidson의 연구에 대한 연구 방법의 적용을 적용한 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다. 특히 Davidson의 연구에 대한 연구 방법의 적용을 적용한 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

특히 Davidson의 연구에 대한 Binbaum의 연구 방법의 적용을 적용한 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.

본문 범위 : 매우 높은 수준 프로그램의 3차원 비정산 형태면 이론에 관한 많은 연구 논문들(이 분야)은 고전적 문제점을 3차원 적분 방정식의 해법에 대한 수학적인 다양성과 수치해석의 한계에 있다던 하였다.



참고문헌

1. Sparenberg, J.A., Application of Lifting-Surface Theory to Ship Screws, Konical. Ned. Aked. Wetenschap. Proc., Amsterdam, Vol 62, Series B, pp 286, 1959.
2. Hanaoka, T., Introduction to the Nonuniform Hydrodynamics Concerning a Screw Propeller, Journal of The Society of Naval Architectects of Japan, No. 109, pp 1.
3. Hanaoka, T., On The Integral Equation Concerning an Oscillating Screw Propeller by Lifting-Line Theory, Ibid., No. 110, PP 185.
4. Brown, N.A., Periodic Propeller forces in Nonuniform Flow, Report 64-7, MIT, Mass., 1964.
5. Tsakonas, S., Jacobs, W.R., and Rank, P.H., Jr., Unsteady Propeller Lifting-Surface Theory with Finite Number of Chordwise Modes, Journal of Ship Research, Vol. 12, No.1, 1968.
6. Tsakonas, S., Jacobs, W.R., and Ali, M.R., An Exact Linear Lifting-Surface Theory for a Marine Propeller in a Nonuniform Flow Field, Journal of Ship Research, Vol.17, No.4, 1973.
7. Frydenlund, O., and Kerwin, J.E., The Development of Numerical Methods for the Computation of Unsteady Propeller Forces, Symposium on Hydrodynamics of Ship and Offshore Propulsion System, Oslo, Norway, 1977.
8. Kerwin, J.E., and Lee, C.S., Prediction of Steady and Unsteady Marine Propeller Performance by Numerical Lifting Surface Theory, SNAME, Transactions, vol. 86, pp. 218-253, 1978.
9. Tsakonas, S. and Jacobs, W.R., Propeller Loading Distributions, Journal of Ship Research, vol. 13, No.4, pp. 237-258, 1969.
10. Jacobs, W.R., and Tsakonas, S., A New Procedure for the Solution of Lifting Surface Problem, Journal of Hydronautics, vol.3, No.1, pp. 20-28, 1969.
11. Tsakonas, S. and Ali, M.R., Propeller Blade Pressure Distrbution due to Loading and Thickness Effects, DL Report-1869, SIT.
12. Snyder. M.A., Chebyshev Method in Numerical Approximation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
13. Van Gent, W., Unsteady Lifting Surface Theory for Ship Screws, Derivation and Numerical Treatment of Integral Equation, Journal of Ship Research, vol. 19, No.4, 1975.
14. Tsakonas, S., Chen,C.Y., and Jacobs, W.R., Exact Treatment of the Helicoidal Wake in the Propeller Lifting Surface Theory, DL Report-1117, SIT, 1966.
15. Denny, S.B., Cavitation and Open Water Performance Tests of Theoretically Predicted Pressure in the Vicinity of a Marine Propeller, NSRDC Report 2349, Naval Ship Research and Development Center, May 1967.

List of Tables

Table 1 Ratio of Maximum Camber to Chord (m/c)

Table 2 Ratio of Maximum thickness to Chord (t/c)

Table 3 Ratio of Leading Edge Radius to Chord (ρ_0/c)

Table 4 Wake Information from Harmonic Analysis 3-Cycle Screen Wake.

Table 5 Steady State Thrust Coefficient K_T and Torque Coefficient K_Q for Propeller 4118 by Various Method.



Table 1 Ratio of Maximum Camber to Chord(m/c)

Radius	EAR=0.3	EAR=0.6	EAR=1.2
.25	.0370	.0228	.0196
.35	.0388	.0231	.0202
.45	.0372	.0224	.0196
.55	.0340	.0212	.0185
.65	.0312	.0203	.0177
.75	.0290	.0198	.0170
.85	.0270	.0189	.0160
.95	.0247	.0174	.0147

Table 2 Ratio of Maximum Thickness to Chord(t/c)

Radius	EAR=0.3	EAR=0.6	EAR=1.2
.25	.253	.090	.032
.35	.192	.068	.024
.45	.146	.052	.018
.55	.113	.040	.014
.65	.087	.031	.011
.75	.068	.024	.0086
.85	.052	.018	.0066
.95	.045	.016	.0057

Table 3 Ratio of Leading Edge Radius to Chord(ρ_0/c)

Radius	EAR=0.3	EAR=0.6	EAR=1.2
.25	.0410	.00525	.00066
.35	.0236	.00290	.00039
.45	.0136	.00170	.00021
.55	.00817	.00100	.00013
.65	.00484	.00060	.00008
.75	.00296	.00035	.00005
.85	.00173	.00025	.00003
.95	.00133	.00020	.00002

Table 4 Wake Information from Harmonic Analysis 3-cycle Screen Wake.

Radius	3-Cycle Wake	
	C_3	ϕ_3
r_0		
.2	.089	18°
.3	.186	10°
.4	.220	6°
.5	.218	2°
.6	.203	0°
.7	.212	0°
.8	.230	0°
.9	.252	0°
.95	.251	0°

Table 5 Steady-State Thrust Coefficient K_T and Torque Coefficients K_Q for Propeller-4118 by Various Methods.

	K_T	K_Q
Experimental	.154	.0290
Calculated "Roof-Top" Mode	.166	.0323
Chebyshev		
4Modes	.168	.0288
5Modes	.163	.0279
6Modes	.166	.0284

List of Figures

- Fig. 1** Resolution of Forces and Moments
- Fig. 2** Definition of Angular Measurements
- Fig. 3** Resolution of Forces
- Fig. 4** Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 3-Chebyshev Modes
- Fig. 5** Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 4-Chebyshev Modes.
- Fig. 6** Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 5-Chebyshev Modes.
- Fig. 7** Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 6-Chebyshev Modes.
- Fig. 8** Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 3-Chebyshev Modes.
- Fig. 9** Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 4-Chebyshev Modes.
- Fig. 10** Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 5-Chebyshev Modes.
- Fig. 11** Blade Frequency Thorque Coefficients and Phase with 6-Chebyshev Modes.
- Fig. 12** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 3-Chebyshev Modes.
- Fig. 13** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 4-Chebyshev Modes.
- Fig. 14** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 5-Chebyshev Modes.
- Fig. 15** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 6-Chebyshev Modes.
- Fig. 16** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 3-Chebyshev Modes.
- Fig. 17** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 4-Chebyshev Modes.
- Fig. 18** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 5-Chebyshev Modes.
- Fig. 19** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 6-Chebyshev Modes.
- Fig. 20** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 3-Chebyshev Modes.
- Fig. 21** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 4-Chebyshev Modes.
- Fig. 22** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 5-Chebyshev Modes.
- Fig. 23** Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 6-Chebyshev Modes.
- Fig. 24** Comparision of Steady-State Chordwise Pressure Distribution at 0.65 Radius for 3-Blade Propeller-EAR=0.6 with that Roof - Top Approach.

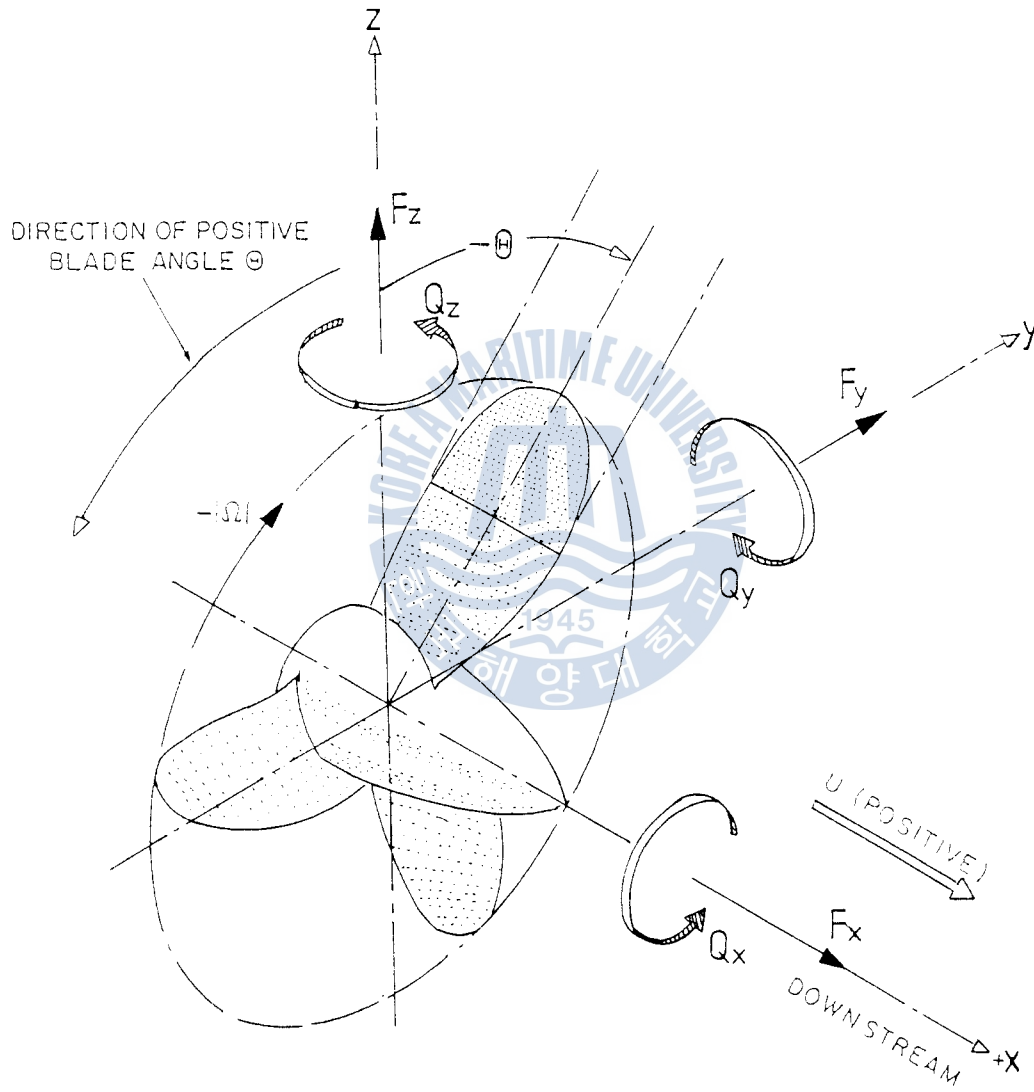


Fig. 1 Resolution of Forces and Moments

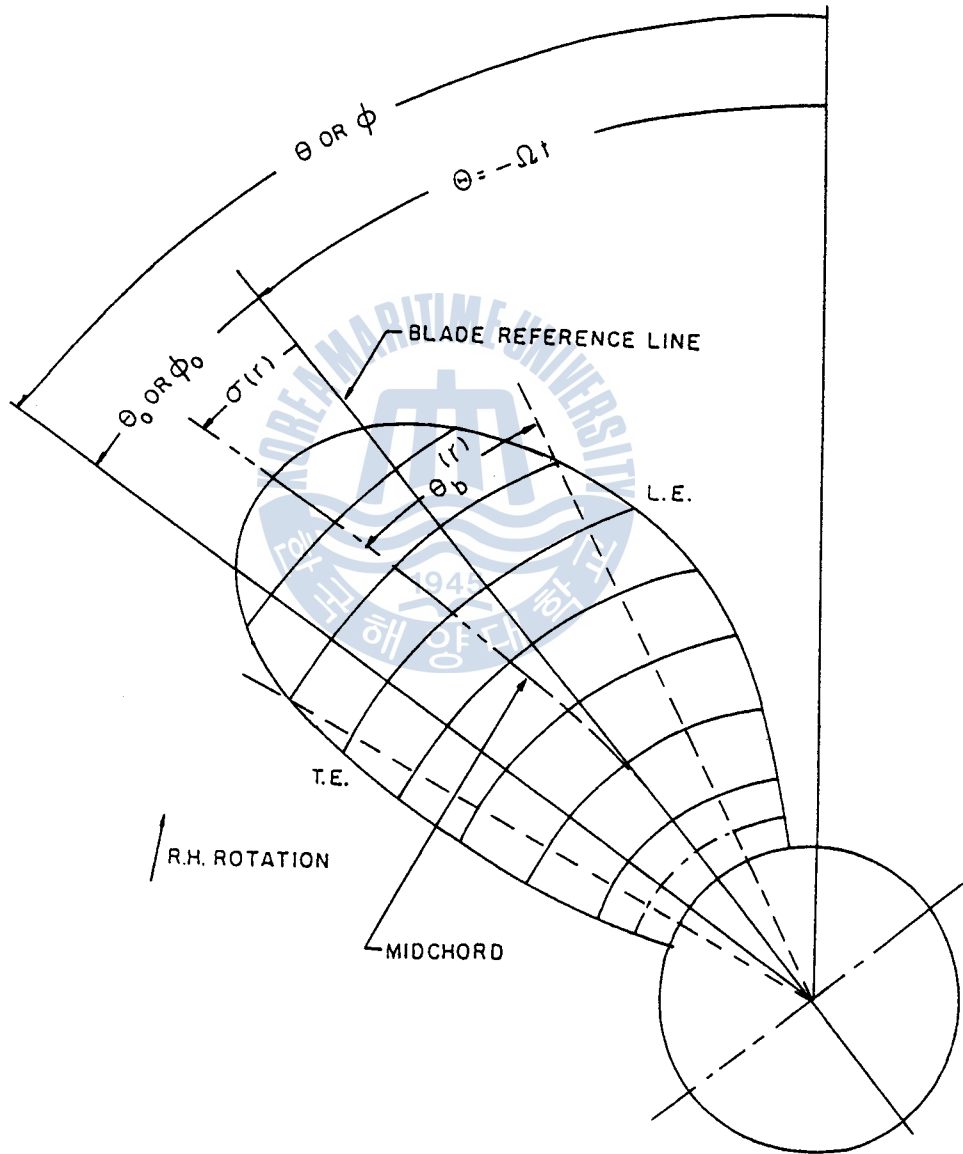


Fig. 2 Definition of Angular Measurements

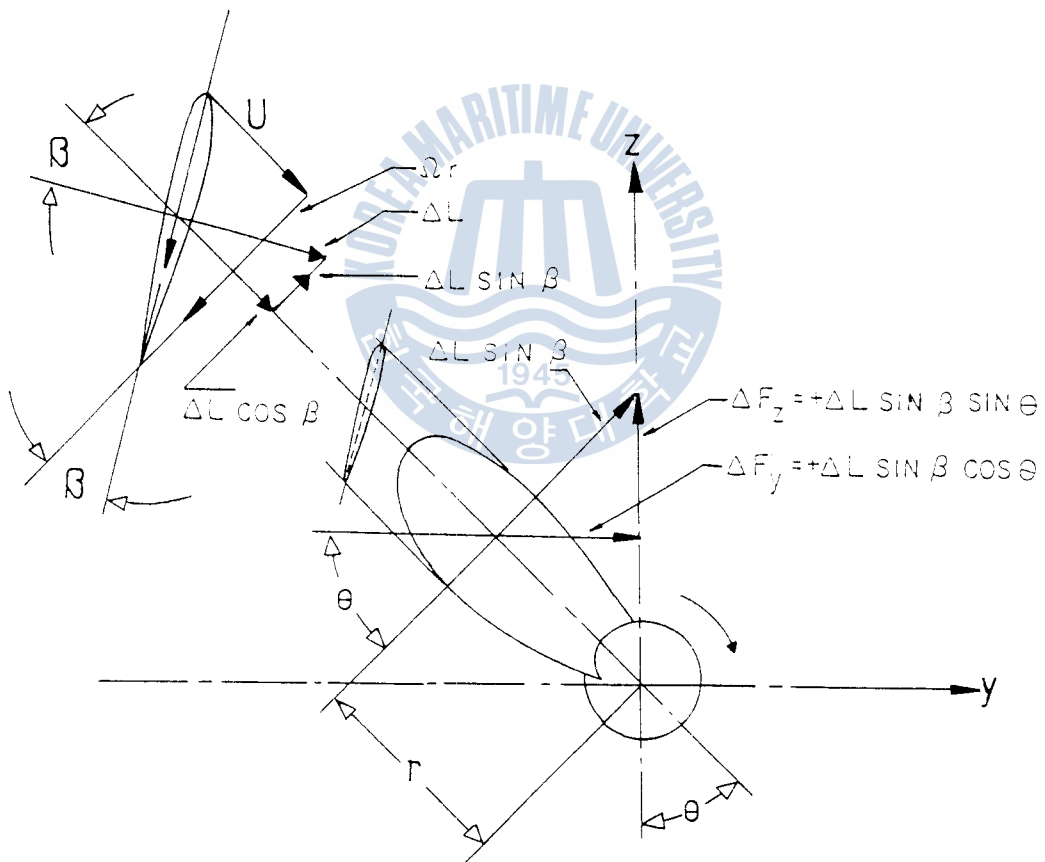


Fig. 3 Resolution of Forces

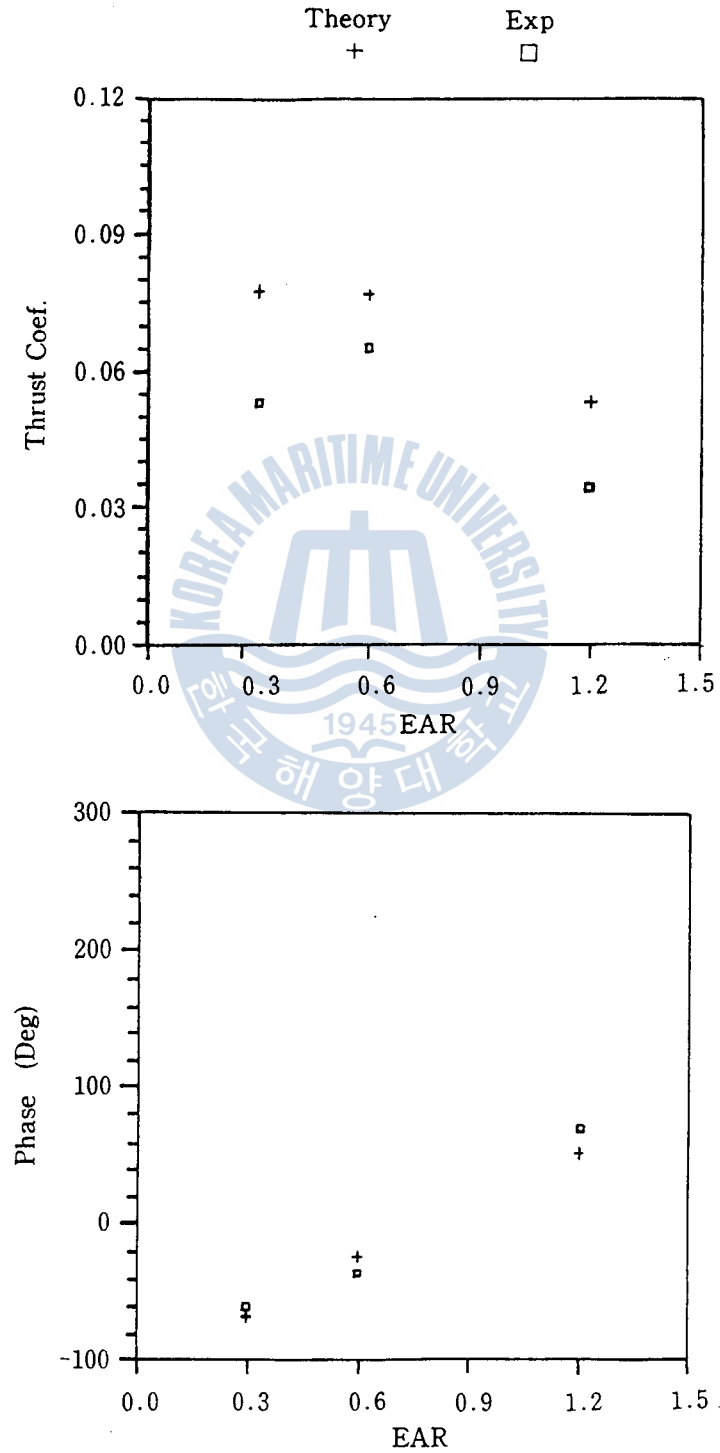


Fig. 4 Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 3-Chebyshev Modes

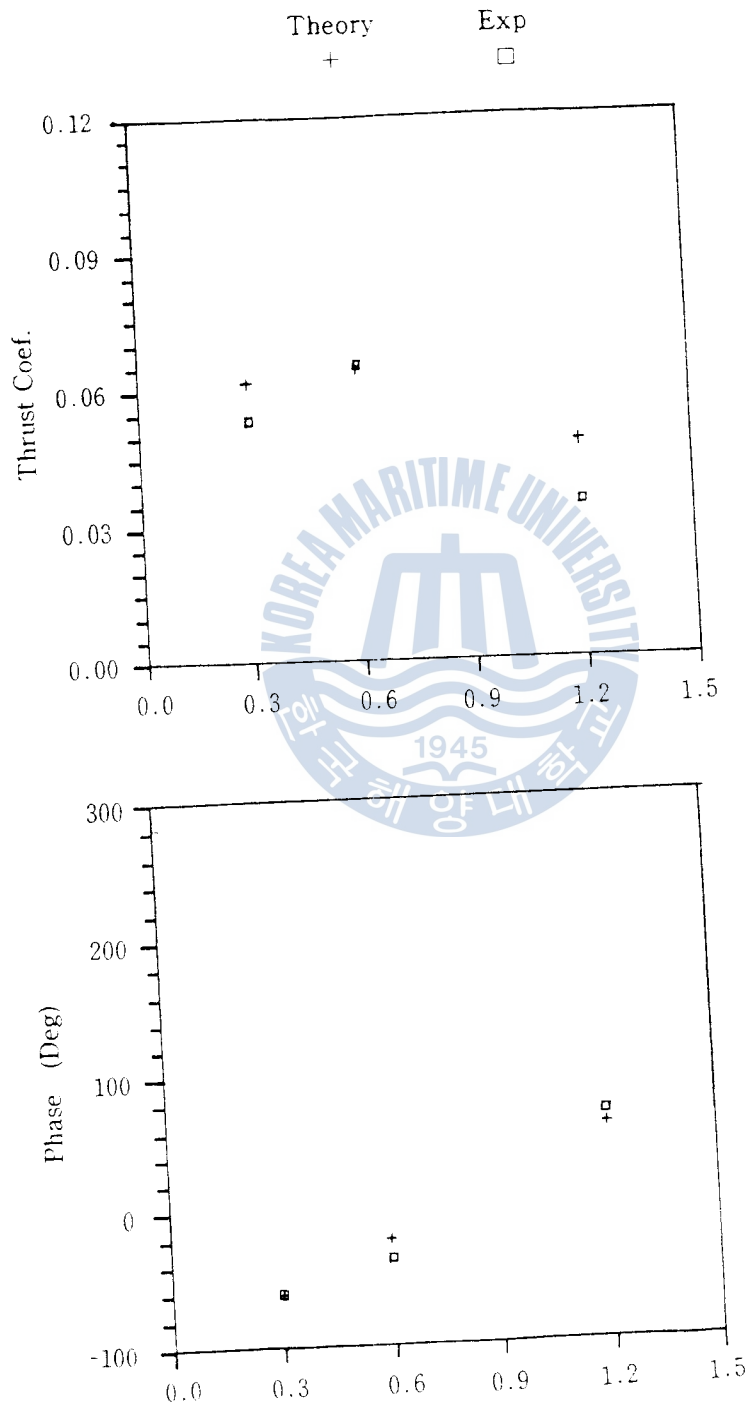


Fig. 5 Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 4-Chebyshev Modes.

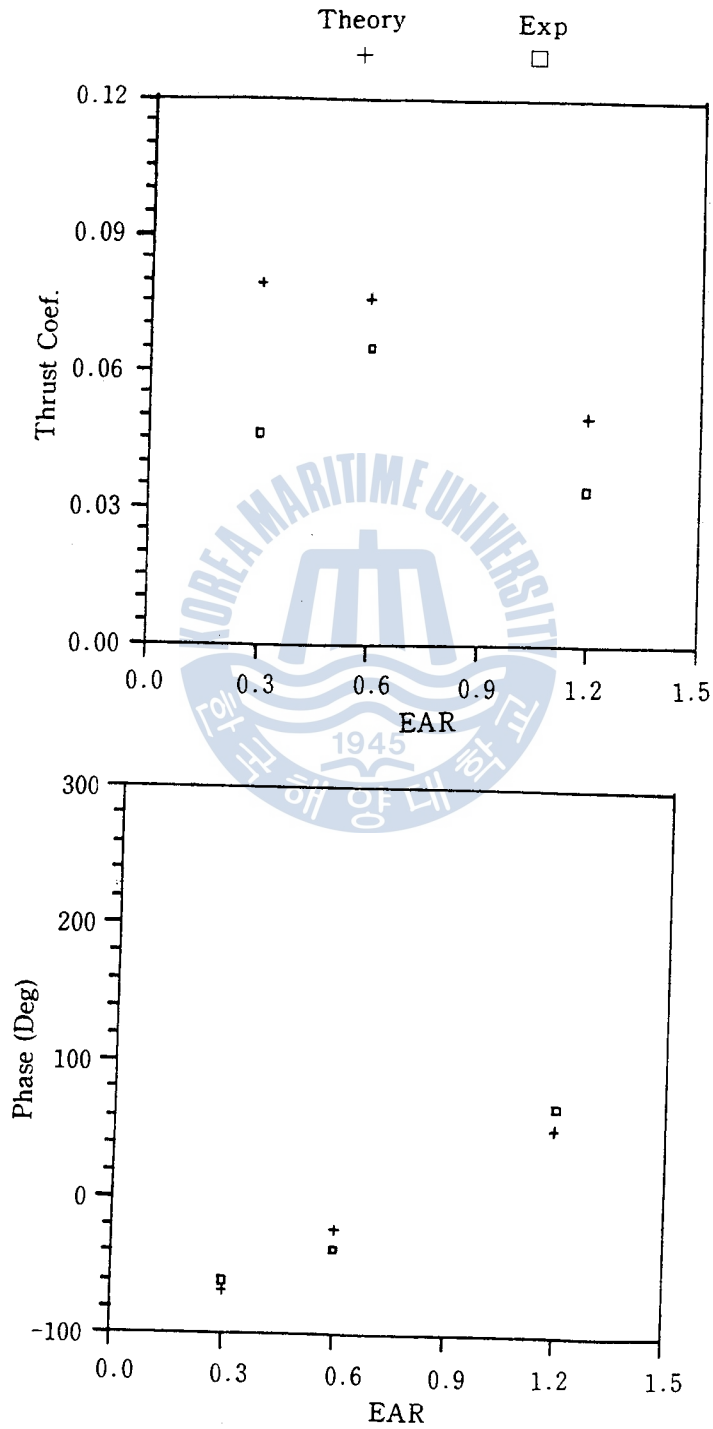


Fig. 6 Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 5-Chebyshev Modes.

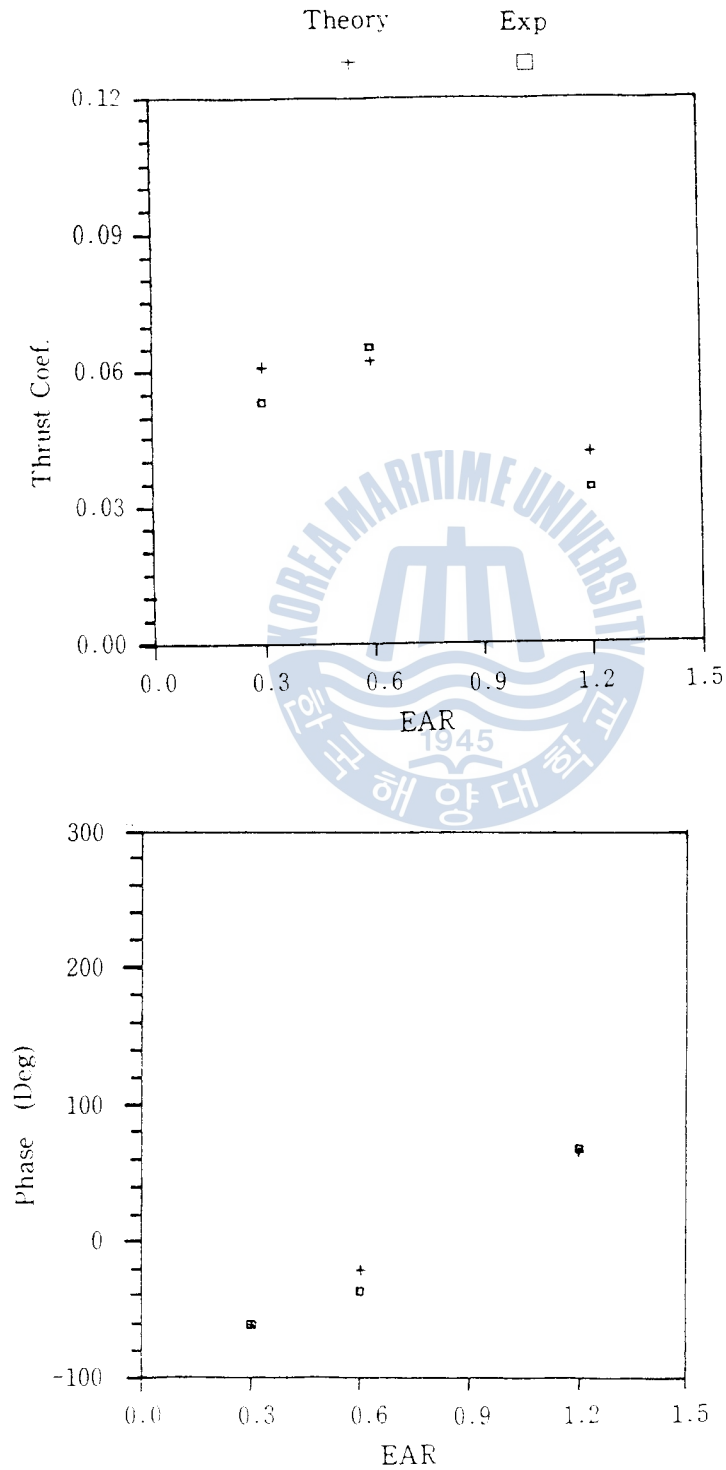
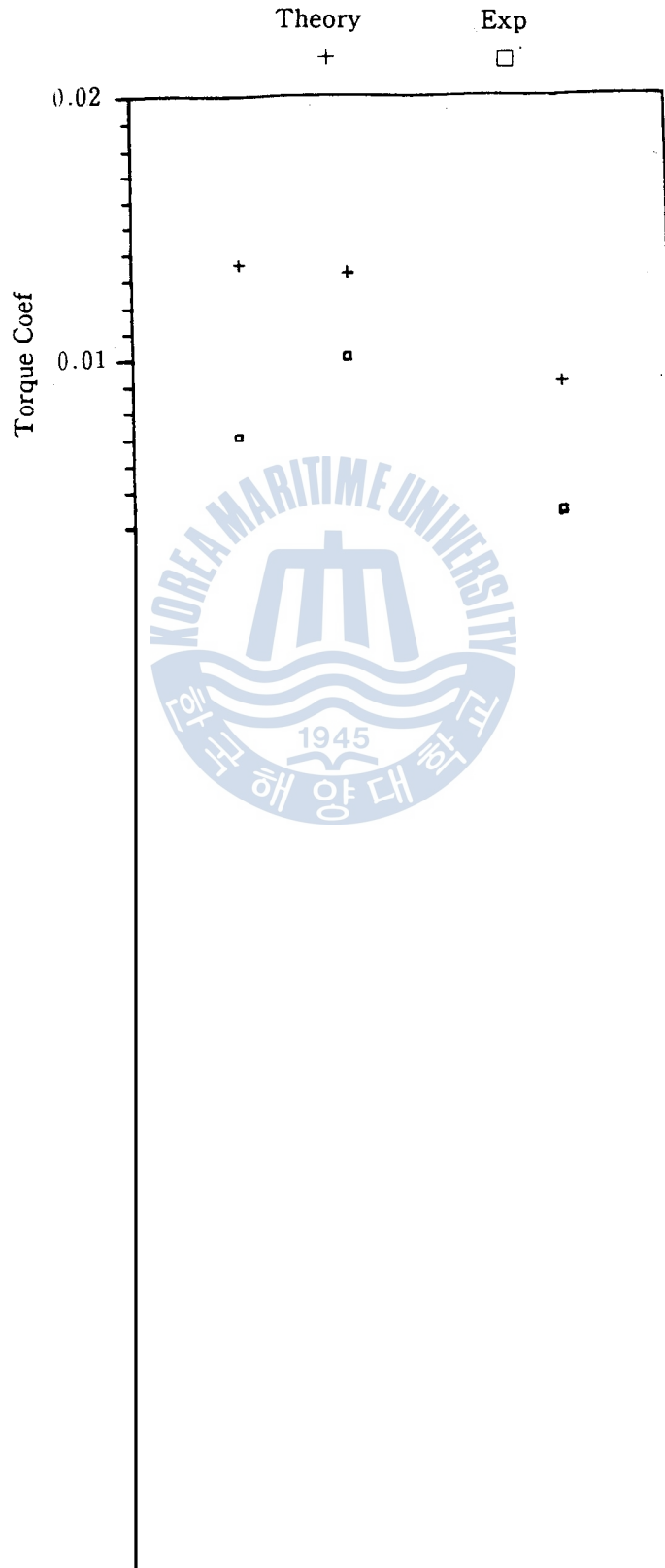


Fig. 7 Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 6-Chebyshev Modes.



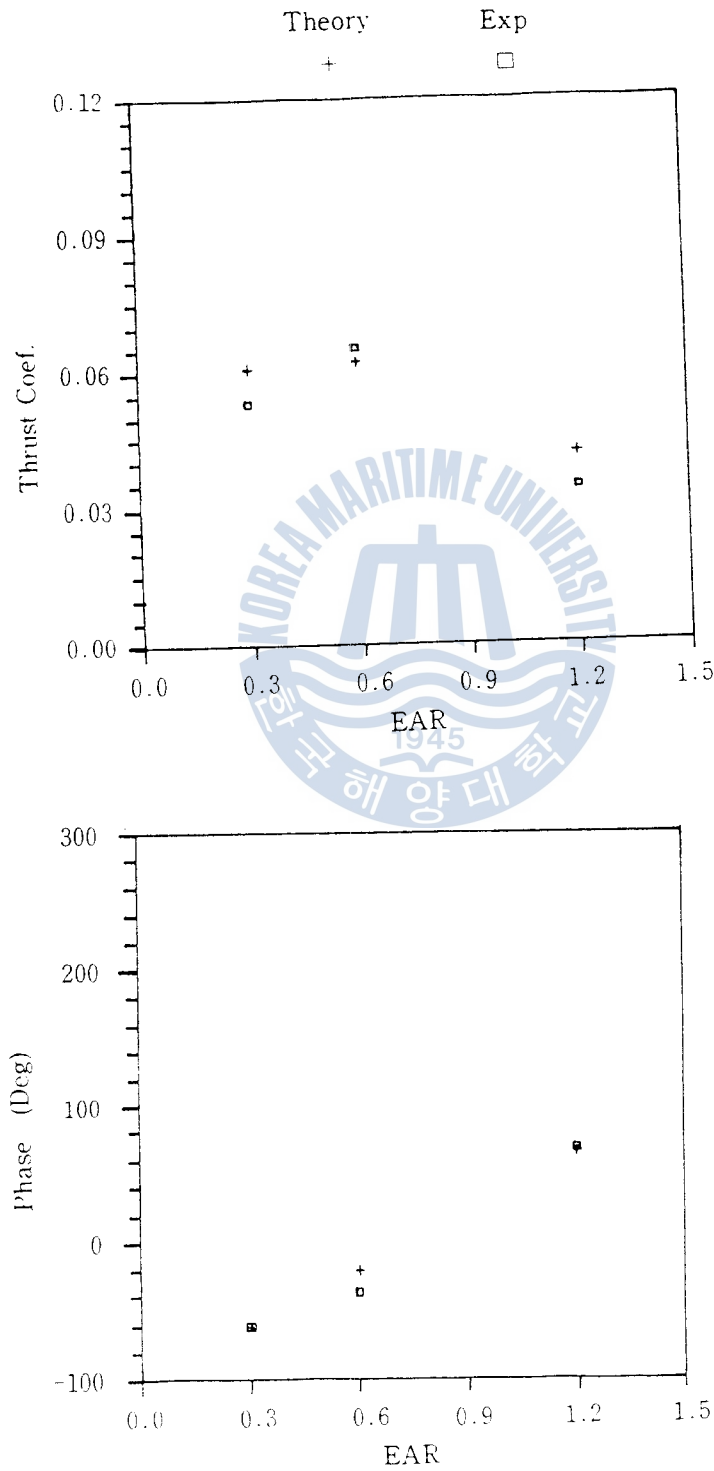


Fig. 7 Blade Frequency Thrust Coefficients and Phase with 6-Chebyshev Modes.

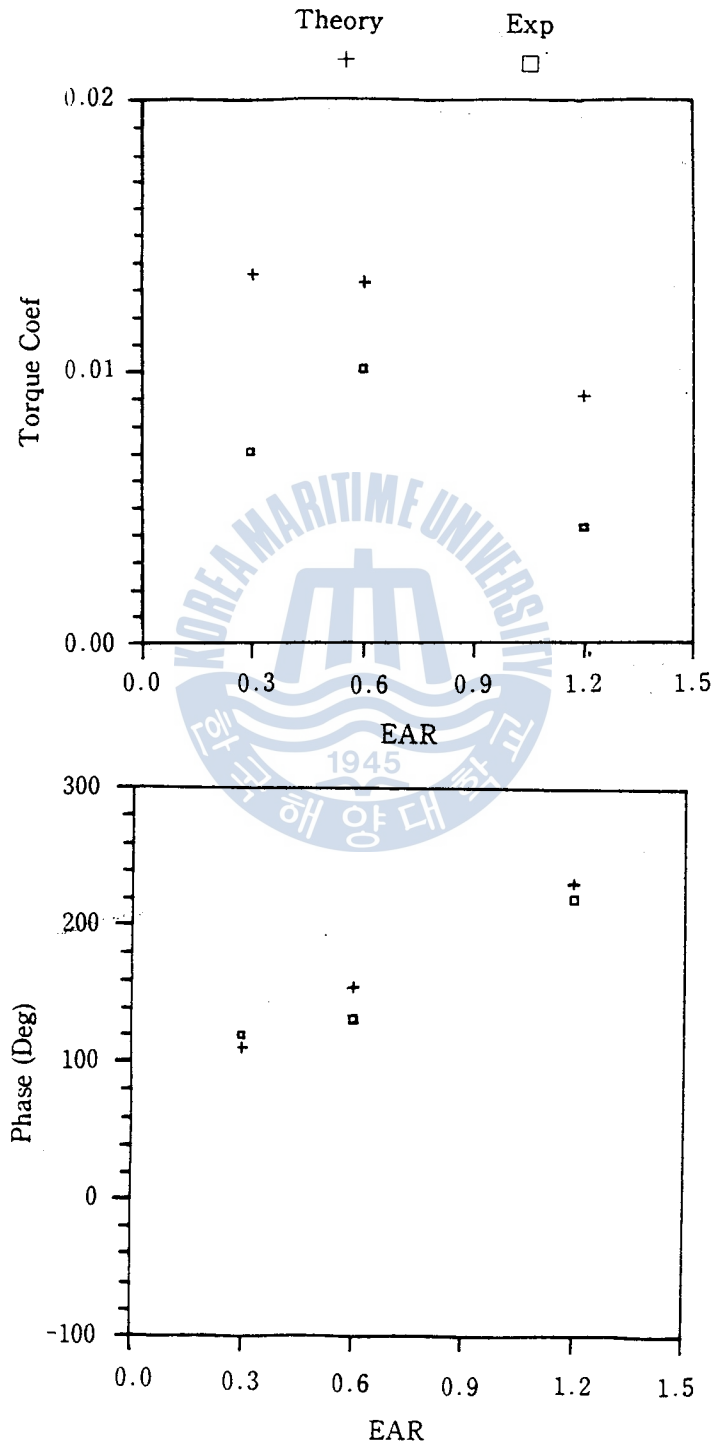


Fig. 8 Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 3-Chebyshev Modes.

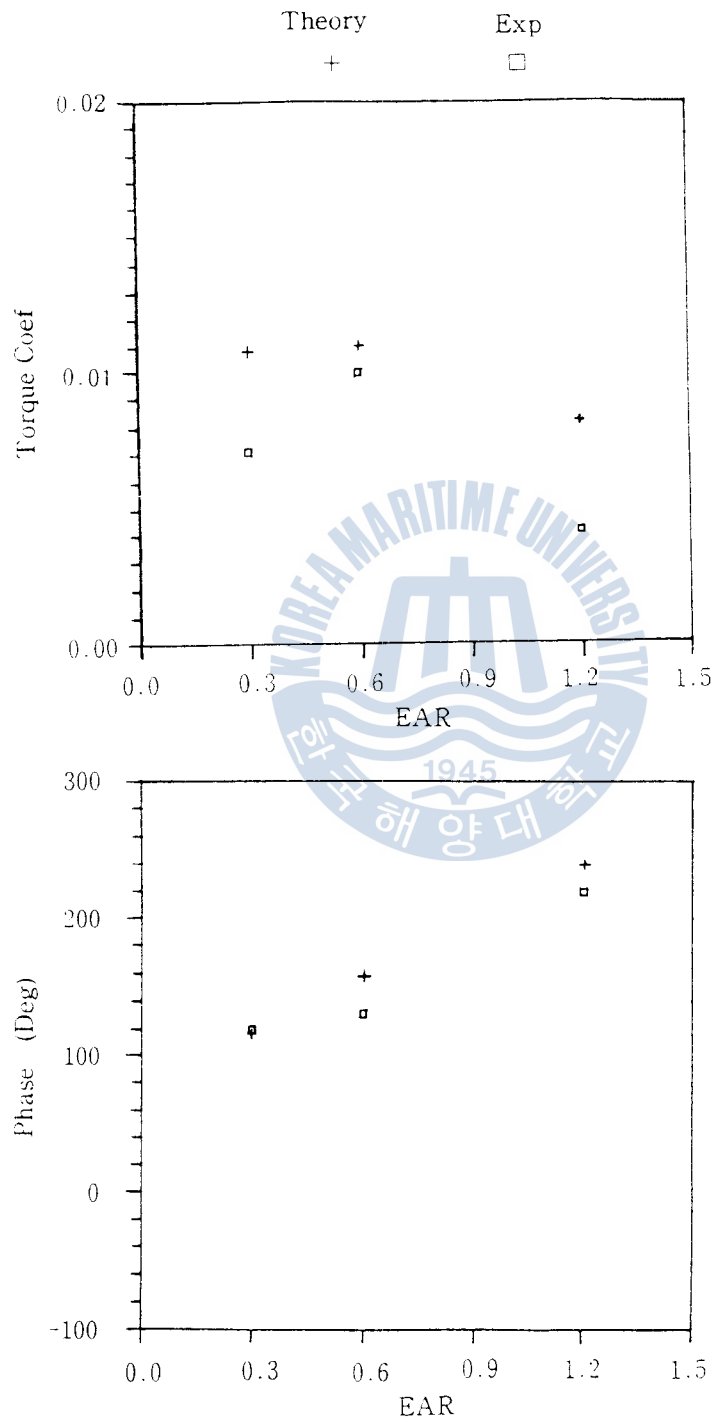


Fig. 9 Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 4-Chebyshev Modes.

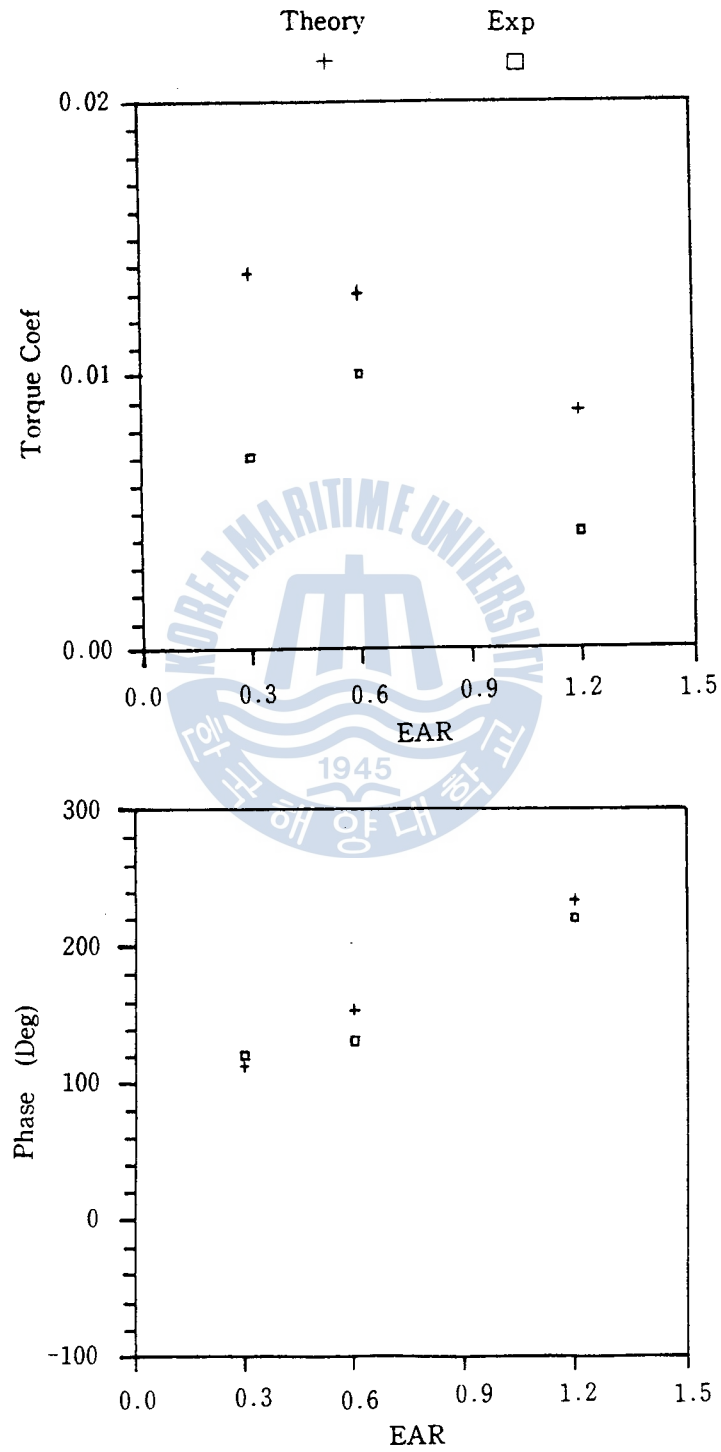


Fig. 10 Blade Frequency Torque Coefficients and Phase with 5-Chebyshev Modes.

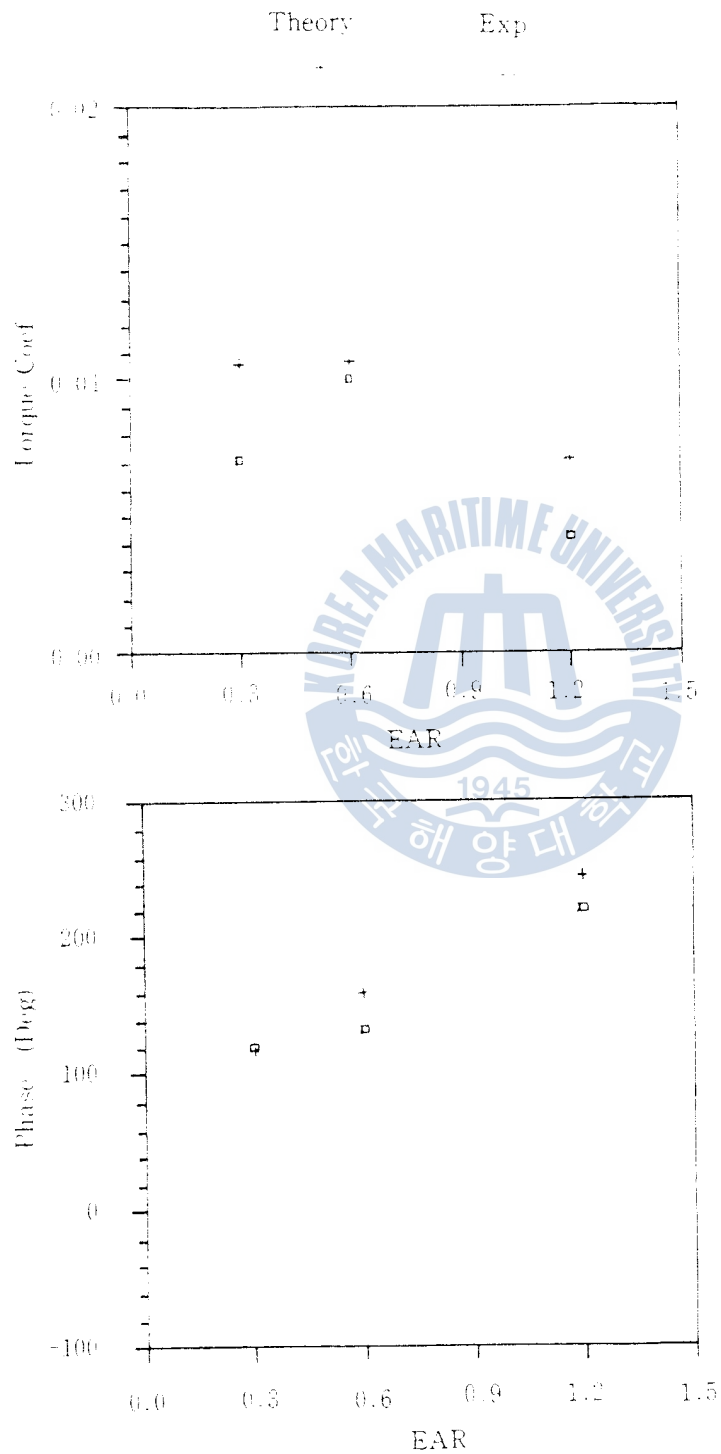


Fig. 11 Blade Frequency, Torque Coefficients and Phase with 6-Chebyshev Modes.

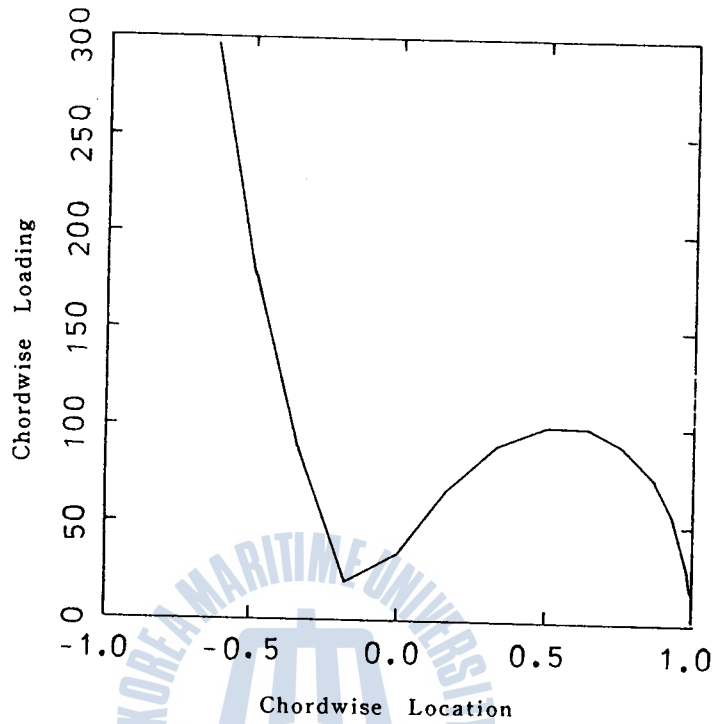


Fig. 12 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 3-Chebyshev Modes.

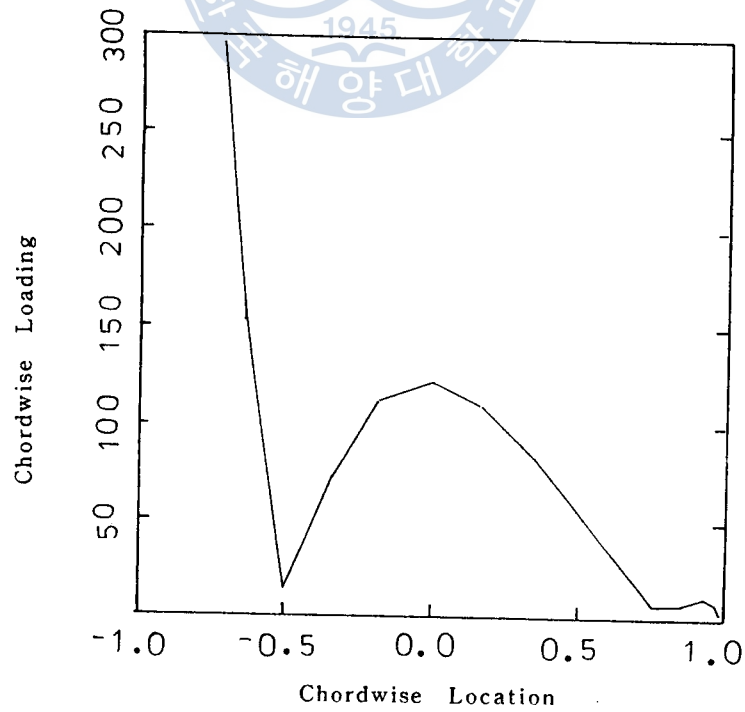


Fig. 13 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 4-Chebyshev Modes.

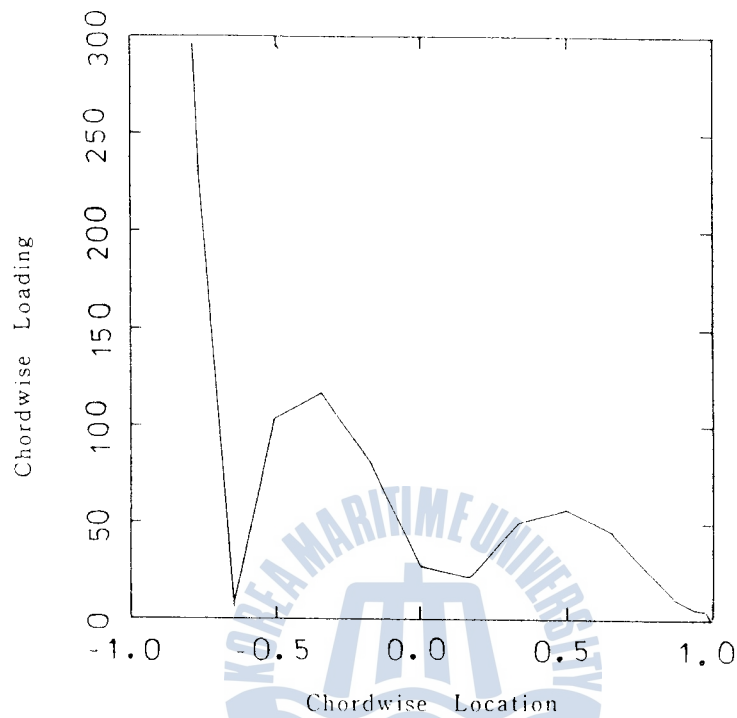


Fig. 14 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 5-Chebyshev Modes.

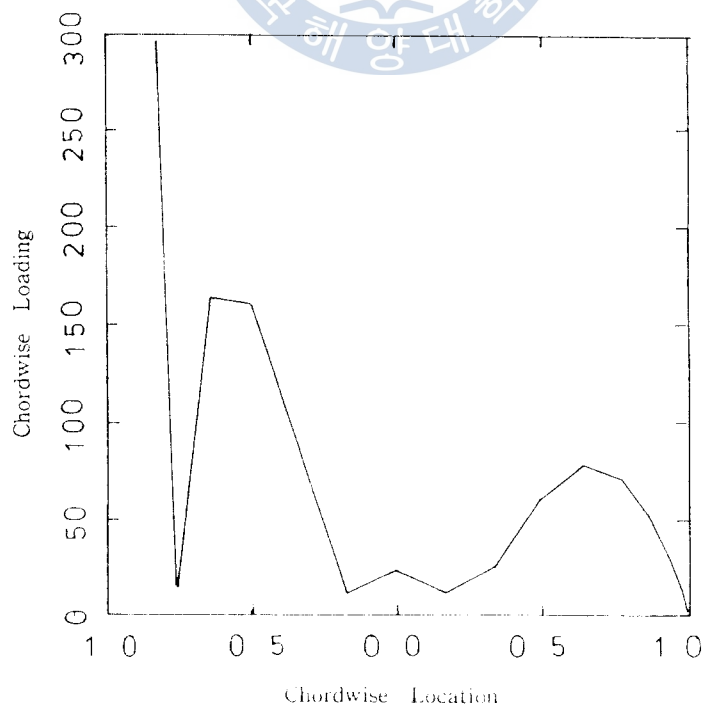


Fig. 15 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.3 with 6-Chebyshev Modes.

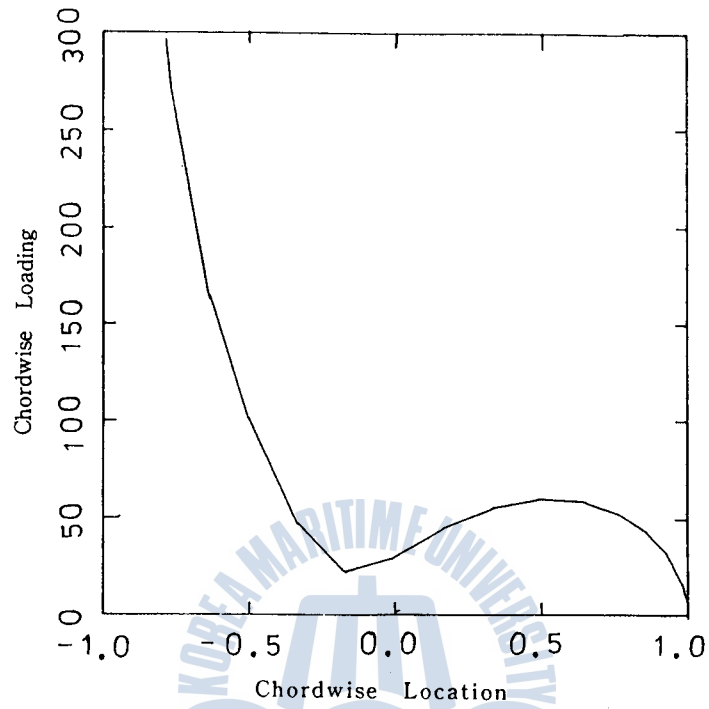


Fig. 16 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 3-Chebyshev Modes.

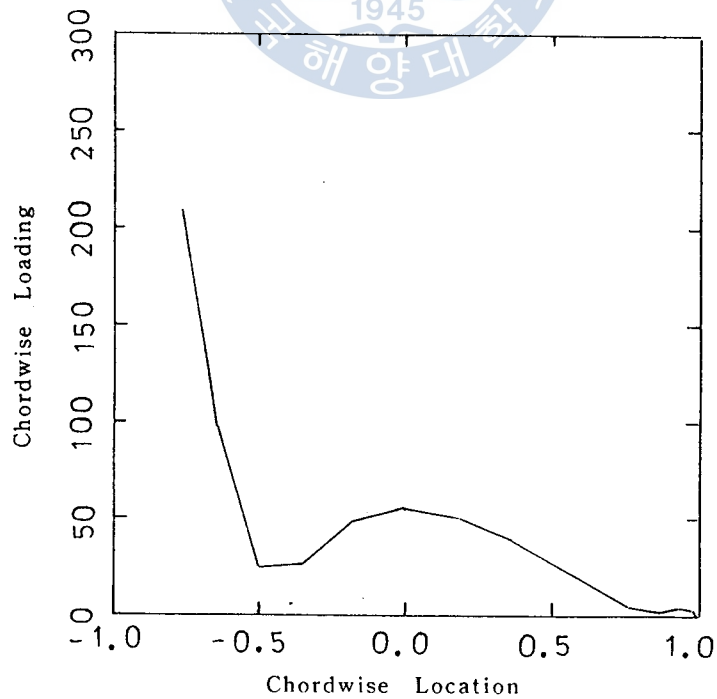


Fig. 17 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 4-Chebyshev Modes.

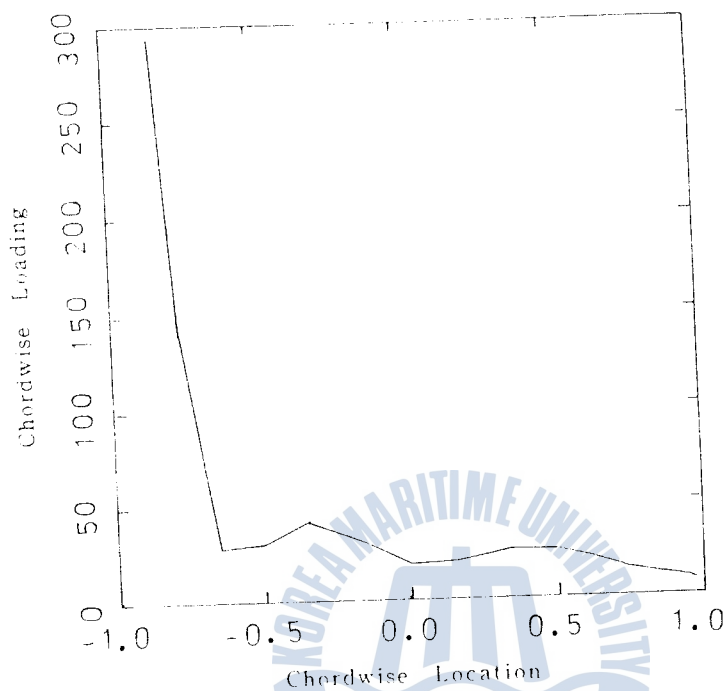


Fig. 18 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 5-Chebyshev Modes.

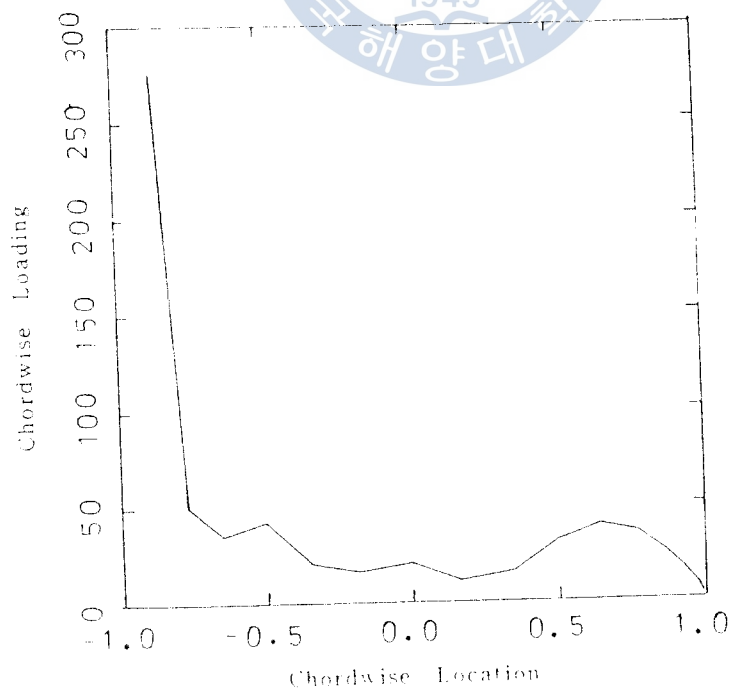


Fig. 19 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=0.6 with 6-Chebyshev Modes

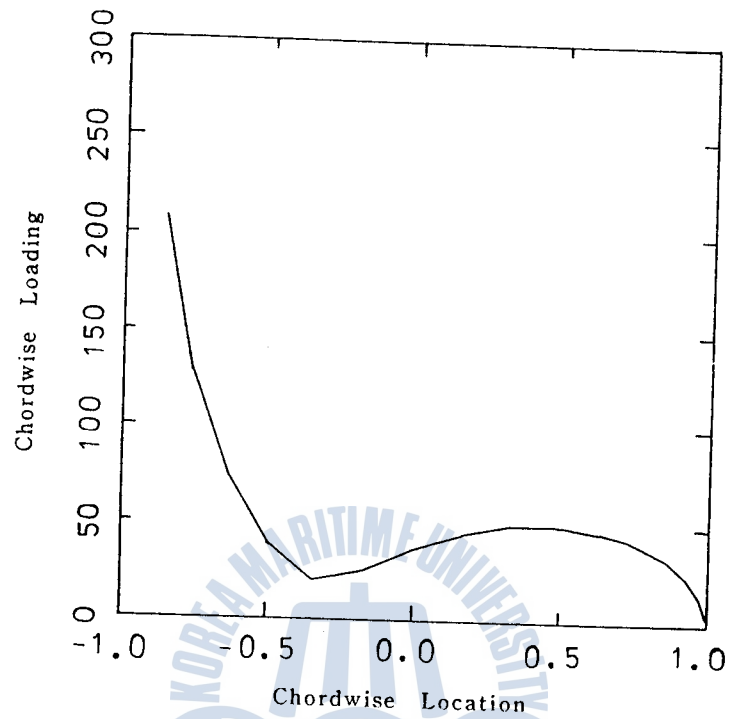


Fig. 20 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 3-Chebyshev Modes.

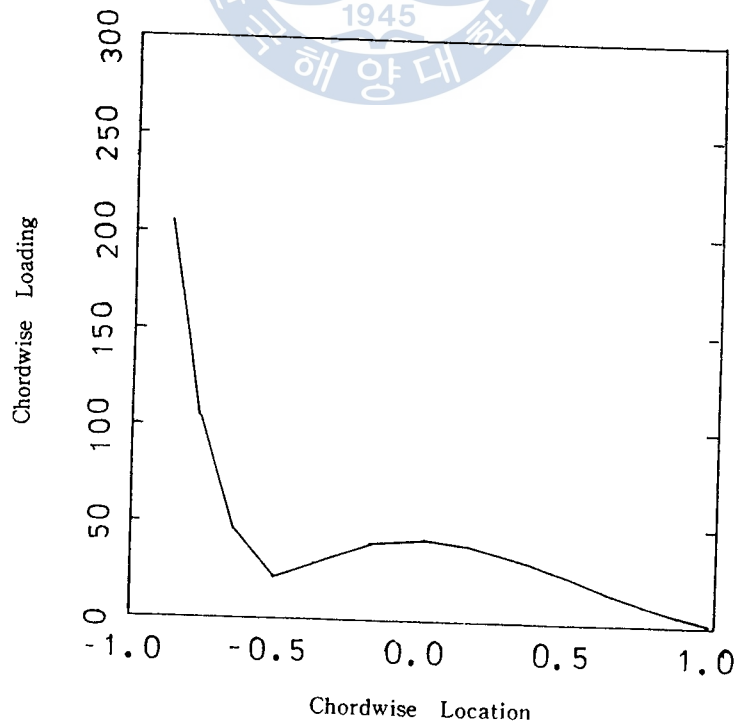


Fig. 21 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 4-Chebyshev Modes.

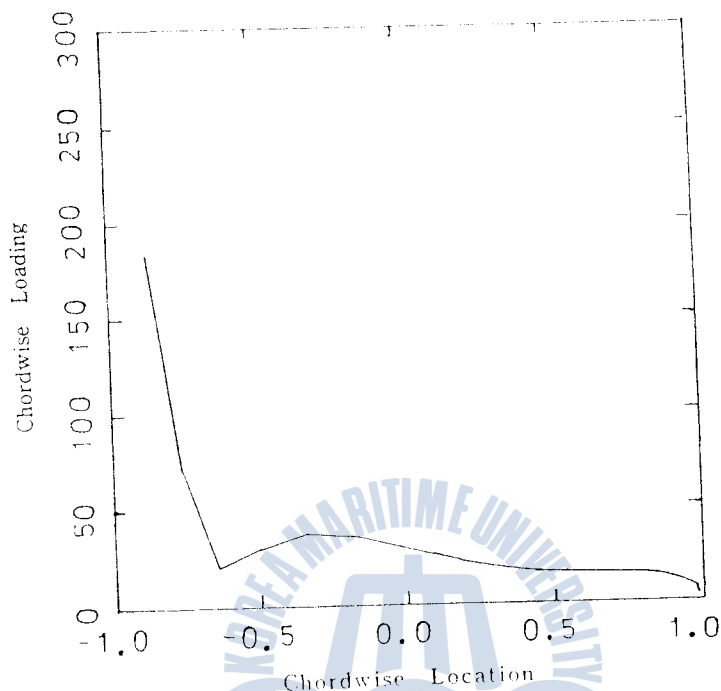


Fig. 22 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 5-Chebyshev Modes.

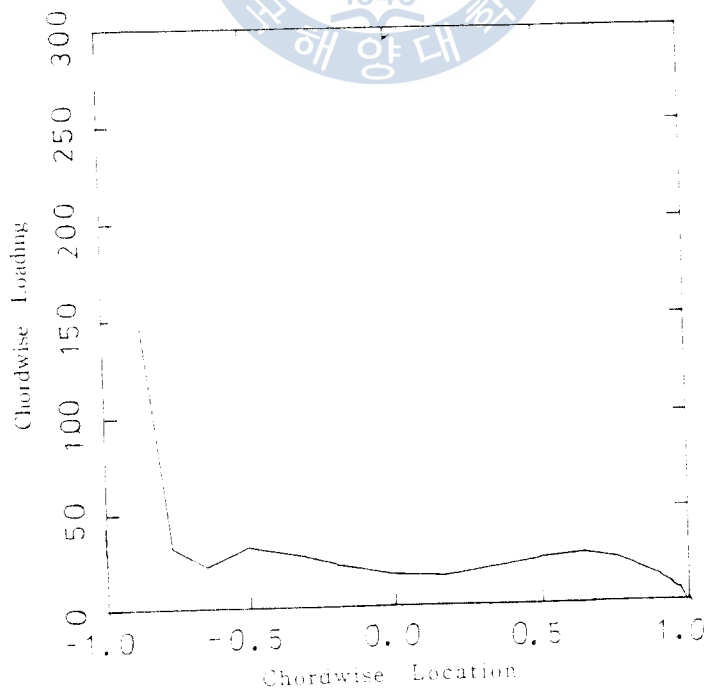


Fig. 23 Chordwise Loading at $R=0.65$ Propeller-EAR=1.2 with 6-Chebyshev Modes.

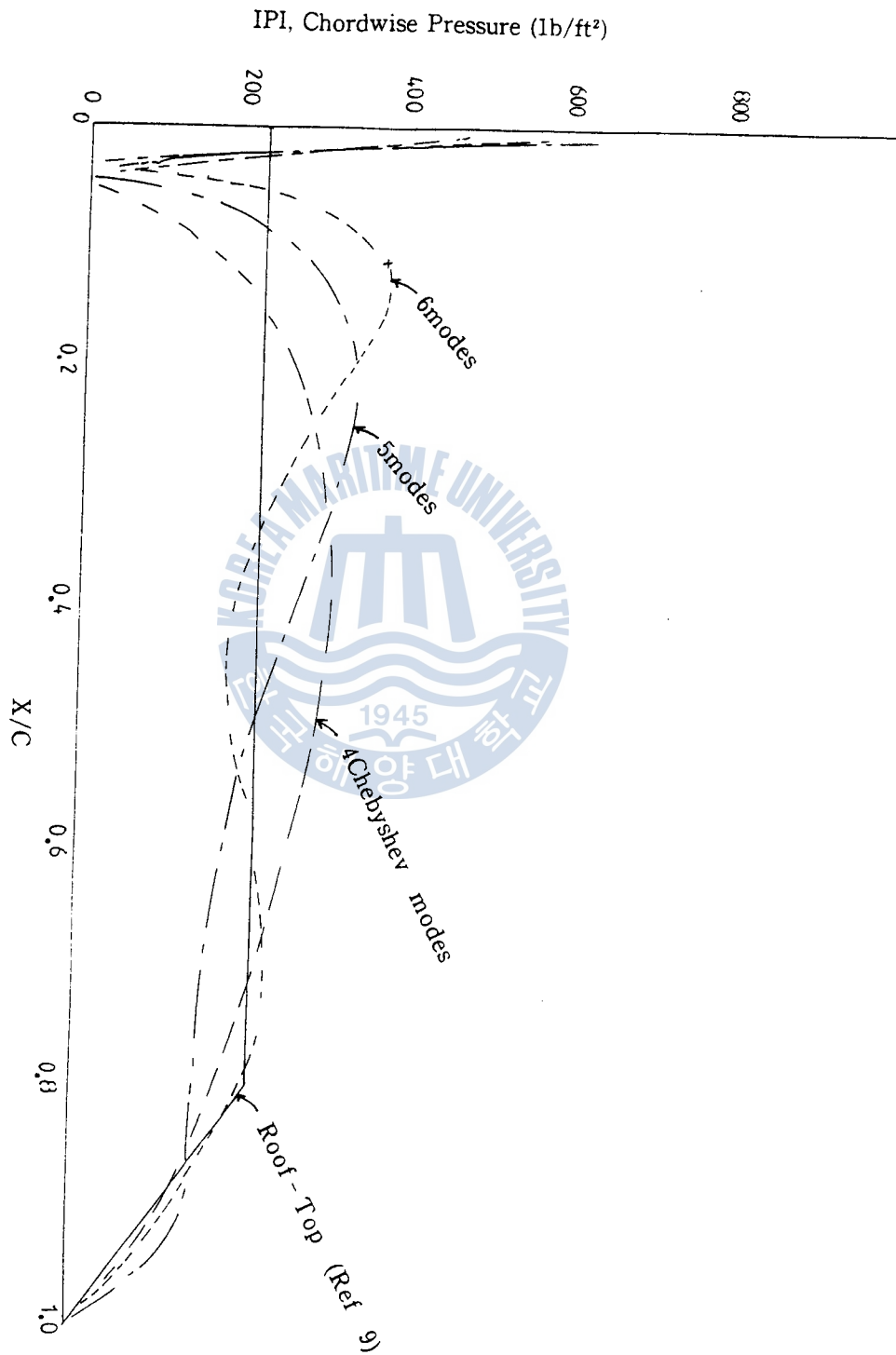


Fig. 24 Comparison of Steady-State Chordwise Pressure Distribution at 0.65 Radius for 3-Blade Propeller-EAR = 0.6 with that Roof-Top Approach.

부록 1

1. 적분 방정식 (2.22) 식의 ϕ_a 와 θ_a 에 관한 적분결과

$$1) I^{(m)}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\bar{m}) e^{iy \cos \phi} d\phi$$

$$I^{(1)}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos \phi) e^{iy \cos \phi} d\phi = J_0(y) - iJ_1(y)$$

$$I^{(2)}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 + 2\cos \phi) e^{iy \cos \phi} d\phi = J_0(y) + i2J_1(y)$$

$$I^{(m>2)}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\bar{m}-1)\phi e^{iy \cos \phi} d\phi = i^{\bar{m}} J_{\bar{m}-1}(y)$$

여기서 $J_n(y)$ 는 제 1종 n계 Bessel 함수이다

$$2) \Lambda^{-(n-1)}(z) = \int_0^\pi H_n(\theta) e^{-iz \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$= 2(-i)^{n-1} [J_n(z) - iJ_{n-1}(z)]$$

2. 특이점에서 Kernel 함수의 피적분 함수를 계산하기 위해 필요한 함수

$$1) I^{(m)}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Pi(\bar{m}) e^{iy \cos \phi} \cos \phi d\phi$$

$$I_1^{(1)}(y) = -\frac{1}{2} [J_0(y) - J_2(y)] + iJ_1(y)$$

$$I_1^{(2)}(y) = [J_0(y) - J_2(y)] + iJ_1(y)$$

$$I_1^{(m>2)}(y) = -\frac{i^{\bar{m}-2}}{2} [-J_{\bar{m}}(y) + J_{\bar{m}-2}(y)]$$

$$2) \Lambda_1^{-(n-1)}(z) = \int_0^\pi H_n(\theta) \sin \theta \cdot \cos \theta e^{-iz \cos \theta} d\theta$$

$$= (-i)^n [J_n(z) - J_{n-2}(z) - iJ_{n-1}(z) + iJ_{n-1}(z)]$$

부록 2

힘과 모멘트의 분할

가속도가 $-\Omega$ 이고 N개의 날개를 가진 프로펠러를 나선 표면으로 생각하면

$$F(x, y, z) = x + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{y}{z} = 0$$

원통 좌표로 나타내면

$$x = \phi_0 / a$$

$$y = -r \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\theta = \phi_0 - \Omega t + \bar{\theta}_n$$

이 표면에 대한 단위 수직 벡터의 성분들은

$$\bar{n} = \frac{F_x, F_y, F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \frac{1, z/ar^2, -y/ar^2}{\sqrt{1 + a^2 r^2 / ar}}$$

$$n_x = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 r^2}} = \cos \beta$$

$$n_y = \frac{z/r}{\sqrt{1 + a^2 r^2}} = \sin \beta \cos \theta$$

$$n_z = \frac{-y/r}{\sqrt{1 + a^2 r^2}} = \sin \beta \sin \theta$$

여기서 $\beta = \tan^{-1} \frac{1}{ar}$ 로서 피치각을 나타낸다.

미소 힘들은 그림 3에서 보인 바와 같으므로

$$\Delta F_x = \Delta P \cos \beta \Delta s$$

$$\Delta F_y = \Delta P \sin \beta \cos(\Omega t - \phi_0 - \bar{\theta}_n) \Delta S$$

$$\Delta F_z = -\Delta P \sin \beta \sin(\Omega t - \phi_0 - \bar{\theta}_n) \Delta S$$

미소 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{\Delta Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} (\Delta P) (\Delta S)$$

따라서

$$\Delta Q_x = \Delta P (y n_z - z n_y) \Delta S = -\Delta P r \sin \beta \Delta S$$

$$\begin{aligned} \Delta Q_y &= -\Delta P(xn_z - zn_x) \Delta S \\ &= \Delta P \cdot r(\phi_o \tan \beta \sin \beta \sin(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) + \cos \beta \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n)) \Delta S \\ \Delta Q_z &= \Delta P(xn_y - yn_x) \Delta S \\ &= \Delta P \cdot r(\phi_o \tan \beta \sin \beta \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) - \cos \beta \sin(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n)) \Delta S \end{aligned}$$

x 방향의 힘의 총합(추력)은

$$F_x = Re \sum_{n=1}^N e^{i(q\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_{S_1} \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) \cos \beta(r) dS$$

왜냐하면 $dS = r dr d\phi = r \theta' \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr$, $0 \leq \phi_\alpha \leq \pi$

$$L^{(q)}(r, \phi_\alpha) = \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) r \theta'$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^N e^{\pm i q \bar{\theta}_n} = \begin{cases} N, & q = lN \text{ 인 경우 } , l=0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{다른 경우에는} \end{cases}$$

$$F_x = Re \{ N e^{i l N \Omega t} \int_0^\pi \int_r L^{(lN)}(r, \phi_\alpha) \cos \beta(r) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \}$$

$$\text{그러나 } \int_0^\pi L^{(lN)}(r, \phi_\alpha) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha = L^{(lN)}(r) \text{ (스핀 방향의 부하)}$$

그러므로

$$F_x = Re \{ N \gamma_o e^{i l N \Omega t} \int_0^1 L^{(lN)}(r) \cos \beta(r) dr \}$$

y 방향의 힘의 합은

$$F_y = Re \sum_{n=1}^N e^{i(q\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_{S_1} \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) \sin \beta(r) \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) dS$$

$$= Re \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_r L^{(q)}(r, \phi_o) \sin \beta(r) \{ e^{i(q-1)\Omega t - \bar{\theta}_n} e^{i\theta' \cos \phi_\alpha}$$

$$+ e^{i(q+1)\Omega t - \bar{\theta}_n} e^{i\theta' \cos \phi_\alpha} \} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr$$

왜냐하면

$$\sum_{n=1}^N e^{\pm i(q \pm 1) \bar{\theta}_n} = \begin{cases} N, & q \pm 1 = lN \\ 0, & \text{다른 경우에는} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_y &= Re \{ \frac{N}{2} e^{i l N \Omega t} \int_0^\pi \int_r [L^{(lN-1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\theta' \cos \phi_\alpha} + L^{(lN+1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\theta' \cos \phi_\alpha} \\ &\quad \cdot \sin \beta(r) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \} \end{aligned}$$

ϕ_α 적분은

$$\int_0^\pi L^{(lN \pm 1)}(r, \phi_\alpha) e^{\pm i\theta' \cos \phi_\alpha} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha$$

$$= \int_0^\pi \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(IN\mp 1, \bar{n})}(r) \Theta(\bar{n}) e^{\pm i\bar{\theta}_s \cos \phi_\alpha} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha$$

$$= \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(IN\mp, n)}(r) \Lambda^{(n)}(\mp \theta_s^r)$$

여기서 $\Lambda^{(n)}(\theta_s^r)$ 은 부록 1에 주어져 있다.

그러므로

$$F_y = \text{Re} \left\{ \frac{Nr_0}{2} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \sum_{\bar{n}=1}^N [L^{(IN-1, n)}(r) \Lambda^{(n)}(-\theta_s^r) + L^{(IN+1, n)}(r) \Lambda^{(n)}(\theta_s^r)] \cdot \sin \beta \right.$$

$$\left. (r) dr \right\}$$

수직방향의 힘은

$$F_z = \text{Re} \left\{ \sum_{\bar{n}=1}^N e^{iq(\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_a^1 \Delta p^{(q)}(r, \phi_0) \sin \beta(r) \sin(\Omega t - \phi_0 - \bar{\theta}_n) dS \right\}$$

F 를 구할 때 취했던 관계들과 같은 방법으로 계산해 보면는 다음과 같이 나타낼



$$\begin{aligned} \Delta Q_y &= -\Delta P(xn_z - zn_x) \Delta S \\ &= \Delta P \cdot r[\phi_o \tan \beta \sin \beta \sin(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) + \cos \beta \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n)] \Delta S \\ \Delta Q_z &= \Delta P(xn_y - yn_x) \Delta S \\ &= \Delta P \cdot r[\phi_o \tan \beta \sin \beta \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) - \cos \beta \sin(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n)] \Delta S \end{aligned}$$

x 방향의 힘의 총합(추력)은

$$F_x = Re \sum_{n=1}^N e^{iq \cdot \Omega t + \theta_n} \int_{S_1} \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) \cos \beta(r) dS$$

왜냐하면 $dS = r dr d\phi = r \theta_o^2 \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr$, $0 \leq \phi_\alpha \leq \pi$

$$L^{(q)}(r, \phi_\alpha) = \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) r \theta_o^2$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^N e^{\pm iq \cdot \bar{\theta}_n} = \begin{cases} N, & q = lN \text{ 인 경우, } l=0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{다른 경우에는} \end{cases}$$

$$F_x = Re \{ N e^{i l N \Omega t} \int_0^\pi \int_r L^{(lN)}(r, \phi_\alpha) \cos \beta(r) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \}$$

그러나 $\int_0^\pi L^{(lN)}(r, \phi_\alpha) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha = L^{(lN)}(r)$ (스팬방향의 부하)

그러므로

$$F_x = Re \{ N \gamma_o e^{i l N \Omega t} \int_0^1 L^{(lN)}(r) \cos \beta(r) dr \}$$

y방향의 힘의 합은

$$\begin{aligned} F_y &= Re \sum_{n=1}^N e^{iq \cdot \Omega t + \theta_n} \int_{S_1} \Delta P^{(q)}(r, \phi_o) \sin \beta(r) \cos(\Omega t - \phi_o - \bar{\theta}_n) dS \\ &= Re \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_r L^{(q)}(r, \phi_o) \sin \beta(r) \{ e^{i(q-1) \cdot \Omega t + \theta_n} e^{i\theta_o \cos \phi_\alpha} \right. \\ &\quad \left. + e^{i(q+1) \cdot \Omega t + \theta_n} e^{i\theta_o \cos \phi_\alpha} \} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \right] \end{aligned}$$

왜냐하면

$$\sum_{n=1}^N e^{\pm i(q \pm 1) \cdot \theta_n} = \begin{cases} N, & q \pm 1 = lN \\ 0, & \text{다른 경우에는} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_y &= Re \left\{ \frac{N}{2} e^{i l N \Omega t} \int_0^\pi \int_r [L^{(lN-1)}(r, \phi_\alpha) e^{\theta_o \cos \phi_\alpha} + L^{(lN+1)}(r, \phi_\alpha) e^{-i \theta_o \cos \phi_\alpha} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \beta(r) \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \right\} \end{aligned}$$

ϕ_α 적분은

$$\int_0^\pi L^{(lN \pm 1)}(r, \phi_\alpha) e^{\pm i \theta_o \cos \phi_\alpha} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha$$

$$= \int_0^{\pi} \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(IN\mp 1, \bar{n})}(r) \Theta^{(\bar{n})} e^{\pm i\bar{\theta}_b^r \cos \phi_\alpha} \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha$$

$$= \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(IN\mp 1, \bar{n})}(r) \Lambda^{(\bar{n})}(\mp \theta_b^r)$$

여기서 $\Lambda^{(\bar{n})}(\theta_b^r)$ 은 부록 1에 주어져 있다.

그러므로

$$F_y = Re \left\{ \frac{Nr_0}{2} e^{iIN\Omega t} \int_0^1 \sum_{\bar{n}=1}^N [L^{(IN-1, \bar{n})}(r) \Lambda^{(\bar{n})}(-\theta_b^r) + L^{(IN+1, \bar{n})}(r) \Lambda^{(\bar{n})}(\theta_b^r)] \cdot \sin \beta \right.$$

$$\left. (r) dr \right\}$$

수직방향의 힘은

$$F_z = Re \left\{ \sum_{\bar{n}=1}^N e^{i\bar{q}(\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_s \Delta p^{(\bar{q})}(r, \phi_\alpha) \sin \beta(r) \sin(\Omega t - \phi_\alpha - \bar{\theta}_n) dS \right\}$$

F를 구할 때 취했던 관계들과 같은 방법으로 계산해 보면는 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$F_z = Re \left\{ \frac{-Nr_0}{2i} e^{iIN\Omega t} \int_0^1 \sum_{\bar{n}=1}^N [L^{(IN-1, \bar{n})}(r) \Lambda^{(\bar{n})}(-\theta_b^r) - L^{(IN+1, \bar{n})}(r) \Lambda^{(\bar{n})}(\theta_b^r)] \cdot \sin \beta(r) dr \right\}$$

x축에 관한 모멘트(토크)는

$$Q_x = Re \left\{ - \sum_{\bar{n}=1}^N e^{i\bar{q}(\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_s \Delta P^{(\bar{q})}(r, \phi_\alpha) \sin \beta(r) r dS \right\}$$

F를 구할 때와 같은 방법으로 행하면

$$Q_x = Re \left\{ -Nr_0^2 e^{iIN\Omega t} \int_0^1 L^{(IN)}(r) \sin \beta(r) r dr \right\}$$

y축에 대한 굽힘 모멘트는

$$Q_y = Re \left\{ \sum_{\bar{n}=1}^N e^{i\bar{q}(\Omega t - \bar{\theta}_n)} \int_s \Delta p^{(\bar{q})}(r, \phi_\alpha) [r \phi_0 \tan \beta(r) \sin \beta(r) \sin(\Omega t - \phi_\alpha - \bar{\theta}_n) + r \cos \beta(r) \right.$$

$$\left. \cos(\Omega t - \phi_\alpha - \bar{\theta}_n)] dS \right\}$$

앞에서 취했던 삼각 함수의 변환을 따르면

$$Q_y = Re \sum_{\bar{n}=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_r L^{(\bar{q})}(r, \phi_\alpha) \left\{ i \theta_b^r \cos \phi_\alpha \frac{\sin^2 \beta(r)}{\cos \beta(r)} [e^{i(q+1)(\Omega t - \bar{\theta}_n)} e^{i\theta_b^r \cos \phi_\alpha} \right.$$

$$- e^{i(q-1)(\Omega t - \bar{\theta}_n)} e^{i\theta_b^r \cos \phi_\alpha}] + \cos \beta(r) [e^{i(q+1)(\Omega t - \bar{\theta}_n)} e^{i\theta_b^r \cos \phi_\alpha}$$

$$+ e^{i(q-1)(\Omega t - \bar{\theta}_n)} e^{i\theta_b^r \cos \phi_\alpha}] r \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha dr \left. \right\}$$

$$= Re \frac{N}{2} e^{iIN\Omega t} \int_r \left\{ \int_0^{\pi} i \theta_b^r \tan \beta(r) \sin \beta(r) [L^{(IN-1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\theta_b^r \cos \phi_\alpha} \right.$$

$$\left. - L^{(IN+1)}(r, \phi_\alpha) e^{-i\theta_b^r \cos \phi_\alpha}] \cdot \cos \phi_\alpha \sin \phi_\alpha d\phi_\alpha \right.$$

$$+ \int_0^\pi \cos\beta(r) \{ L^{(N-1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\theta_0 \cos\phi_\alpha} + L^{(N+1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\bar{\theta}_0 \cos\phi_\alpha} \} \cdot \sin\phi_\alpha d\phi_\alpha \cdot r dr$$

처음의 ϕ_α 적분은

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi L^{(N+1)}(r, \phi_\alpha) e^{i\theta_0 \cos\phi_\alpha} \cos\phi_\alpha \sin\phi_\alpha d\phi_\alpha \\ &= \int_0^\pi \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(N\mp 1, \bar{n})}(r) \mathfrak{H}(\bar{n}) e^{\pm i\theta_0 \cos\phi_\alpha} \cos\phi_\alpha \sin\phi_\alpha d\phi_\alpha \\ &= \sum_{\bar{n}=1}^N L^{(N\mp 1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(\mp \theta_0^r) \end{aligned}$$

여기서 $\Lambda_1^{(\bar{n})}$ 은 부록 1에 정의되어 있다.

마침내 우리는 Q_y 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_y = R e^{\left\{ -\frac{N r_0^2}{2} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \left[i\theta_0^r \sin\beta(r) \tan\beta(r) \sum_{\bar{n}=1}^N \{ L^{(N-1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(-\theta_0^r) \right. \right. \right.} \\ \left. \left. - L^{(N+1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(\theta_0^r) \right\} + \cos\beta(r) \sum_{\bar{n}=1}^N \{ L^{(N-1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(-\theta_0^r) \right. \right. \\ \left. \left. + L^{(N+1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(\theta_0^r) \right\} \right\} r dr \end{aligned}$$

z축에 대한 굽힘 모멘트는

$$\begin{aligned} Q_z = R e^{\left\{ \sum_{\bar{n}=1}^N e^{i\varphi_n \Omega t - \bar{\theta}_n} \int_0^1 \left[\Delta p^{(\varphi)}(r, \phi_\alpha) \{ r \phi_\alpha \tan\beta(r) \sin\beta(r) \cos(\Omega t - \phi_\alpha - \bar{\theta}_n) \right. \right. \right.} \\ \left. \left. - r \cos\beta(r) \sin(\Omega t - \phi_\alpha - \bar{\theta}_n) \right\} ds \right\} \end{aligned}$$

위식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_z = R e^{\left\{ -\frac{N r_0^2}{2i} e^{iN\Omega t} \int_0^1 \left[i\theta_0^r \sin\beta(r) \tan\beta(r) \sum_{\bar{n}=1}^N \{ L^{(N-1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(-\theta_0^r) \right. \right. \right.} \\ \left. \left. - L^{(N+1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(\theta_0^r) \right\} + \cos\beta(r) \sum_{\bar{n}=1}^N \{ L^{(N-1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(-\theta_0^r) \right. \right. \\ \left. \left. - L^{(N+1, \bar{n})}(r) \Lambda_1^{(\bar{n})}(\theta_0^r) \right\} \right\} \cdot r dr \end{aligned}$$

畫像處理技法을 利用한 變形率 解析에 관한 研究

A Study on the Strain Analysis by
the Image Processing Technique



<目 次>

Abstract	3.2. 모아레 무늬와 變形率 사이의 基本 關係式
記號 說明	3.3. 走査 모아레 패턴의 發生 原理 와 變形率 計算式의 誘導
제1장 序 論	3.4. 시뮬레이션 및 검토
1.1. 개 관	3.5. 結 言
1.2. 연구 동향 및 필요성	제4장 圓形 구멍을 가진 平板의 變形 率解析
1.3. 연구의 내용 및 방법	4.1. 緒 言
제2장 마이크로 컴퓨터를 利用한 畫像 處理技法의 開發	4.2. 주사 모아레법에 의한 실험적 해석
2.1. 緒 言	4.3. 이론적인 해석 및 고찰
2.2. 시스템의 構成	4.4. 結 言
2.3. 畫像處理 소프트웨어	제5장 結 論
2.4. 應用例	參考 文獻
2.5. 結 言	附 錄：프로그램 리스트
제3장 走査 모아레법에 의한 變形率 解析	
3.1. 緒 言	