直角球面三角形의 10個의 公式의 誘導에 관한 考察

金 相 輪

A Study of Derivation of 10 Formulas in Right Spherical Triangle

By
Kim Sang-Lun

本稿는 한국해양대학 논문집 제5집에 실은 本人의 「**벡터에 의한 球面三角法의 旣存公式의 誘導에 관한 考察**」의 繼續이고 역시 벡터에 의해서 直角球面三角形의 10個의 基本公式을 誘導하는 方法을 考察해 보는 것이다.

角 C가 90°인 直角球面三角形 ABC에서 球의 中心 O에 관한 頂點 A, B, C의 位置벡터를 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$라 하고 球의 半徑을 1이라고 假定하여 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$를 單位벡터로 看做한다. 또 三角形 ABC의 頂點 A, B, C에 對하는 邊을 a, b, c라 하면 $\angle BOC=a$, $\angle COA=b$, $\angle AOB=c$가 되고

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos c \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos a \qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\cos b$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sin c \qquad |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=\sin a \qquad |\mathbf{c}\times\mathbf{a}|=\sin b$$

인 關係가 成立한다.

$\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 세 벡터는 面 BOC上의 共面벡터이고 또 $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$도 面 AOC上의 共面벡터가 된다. 그리고 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$의 交角의 크기는 各各 $90°-a$, $90°-b$가 된다. 따라서

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\sin b\ \cos(90°-a)=\sin b\ \sin a$$

$$\mathbf{c}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\sin a\ \cos(90°-b)=\sin a\ \sin b$$

이고

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\sin a\ \sin b \quad \cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

인 關係가 成立한다.

角 C가 90°이므로 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$의 交角의 크기도 90°이고 또 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$의 交角과 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$의 交角의 크기는 各各 A, B가 된다. 따라서

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}=0\\&\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\sin b\ \sin c\ \cos A\\&\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}=\sin c\ \sin a\ \cos B\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

인 關係가 있다. (Ⅱ)의 左邊은

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b} &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

가 되므로 (Ⅱ), (Ⅲ)에 의해서

$$\left.\begin{aligned} &\cos b\ \cos a-\cos c=0 \\ &\cos a-\cos b\ \cos c=\sin b\ \sin c\ \cos A \\ &\cos b-\cos a\ \cos c=\sin c\ \sin a\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

위의 첫式에서

$$\cos c=\cos a\cos b \qquad \cos a=\frac{\cos c}{\cos b} \qquad \cos b=\frac{\cos c}{\cos a}$$

이고 두째, 세째式은

$$\left.\begin{aligned} &\cos a-\cos^2 b\ \cos a=\sin b\ \sin c\ \cos A \\ &\cos b-\cos^2 a\ \cos b=\sin c\ \sin a\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos a\ (1-\cos^2 b)=\sin b\ \sin c\ \cos A \\ &\cos b\ (1-\cos^2 a)=\sin c\ \sin a\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos a\ \sin^2 b=\sin b\ \sin c\ \cos A \\ &\cos b\ \sin^2 a=\sin c\ \sin a\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos a\ \sin b=\sin c\ \cos A \\ &\cos b\ \sin a=\sin c\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos c}{\cos b}\sin b=\sin c\ \cos A \\ &\frac{\cos c}{\cos a}\sin a=\sin c\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tan b=\tan c\ \cos A \\ &\tan a=\tan c\ \cos B \end{aligned}\right\}$$

따라서

$$\cos c=\cos a\ \cos b\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan b=\tan c\ \cos A\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\tan a=\tan c\ \cos B\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

의 세 公式을 얻는다. 이들 3個의 公式은 第 1 cosine 法則에서 $\cos C=\cos 90°=0$을 代入한 結果이다. 또 番號 (1), (3). (6)은 本人著 **球面三角法** 第44, 45頁의 公式과 對照하기 위한 便宜上의 number 이고 앞으로도 이렇케 numbering 할 것이다.

(1)式은 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$와 $\mathbf{c}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$가 共面벡터인 理由로 誘導된 것이다. 이것은 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{c}$가 (Ⅱ)의 첫式과 同等한데서 알 수 있다.

(3)

다음에 또

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})&=(\sin b\ \sin a\ \sin 90^\circ)\,\mathbf{c}\\(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})&=(\sin b\ \sin c\ \sin A)\,\mathbf{a}\\(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})&=(\sin c\ \sin a\ \sin B)\,\mathbf{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(\text{IV})$$

이 成立하고 이들의 左邊은 各各

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}\\&(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}\\&(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(\text{V})$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=0\cdots\cdots\cdots(\text{VI})$$

이 되므로 (IV)는

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}&=\sin b\sin a\\\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}&=\sin b\ \sin c\ \sin A\\-\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}&=\sin c\ \sin a\ \sin B\end{aligned}\right\}$$

가 된다. 卽

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}&=\sin b\sin a\\\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{b}&=\sin b\ \sin c\ \sin A\\\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{c}&=\sin c\ \sin a\ \sin B\end{aligned}\right\}$$

이므로 이들에 (I)을 代入하면

$$\left.\begin{aligned}\sin a\ \sin b&=\sin b\ \sin a\\\sin a\ \sin b&=\sin b\ \sin c\ \sin A\\\sin a\ \sin b&=\sin c\ \sin a\ \sin B\end{aligned}\right\}$$

위의 첫式은 矛盾은 아니나 새로운 事實은 없고 두째 세째式에서

$$\sin a=\sin c\ \sin A\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\sin b=\sin c\ \sin B\cdots\cdots\cdots(5)$$

를 얻는다. 이들은 sine 法則에서 $\sin C=\sin 90^\circ=1$ 이라고 놓은 結果이다.

(III)에 双對原理를 適用하기 위해서 **a, b, c** 대신에 $\dfrac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}$, $\dfrac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}$, $\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}$ 를 代入하면

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\\&\quad=\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)-\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\\&\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\\&\quad=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}-\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\cdot\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\right)\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)\\&\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\times\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\end{aligned}\right|\cdots\cdots(\text{VII})$$

(4)

$$=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}-\left(\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\sin c}\right)\left(\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\sin a}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\sin b}\right)$$

가 된다. 이들에서

$$\left.\begin{array}{l}(\sin B\ \mathbf{b})\cdot(\sin A\ \mathbf{a})=(-\cos B)(-\cos A)-0\\ (\sin B\ \mathbf{b})\cdot(-\sin 90°\mathbf{c}=(-\cos A)-(-\cos B)0\\ (-\sin 90°\mathbf{c})\cdot(\sin A\ \mathbf{a})=(-\cos B)-(-\cos A)0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin B\ \sin A\ (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})=\cos A\ \cos B\\ -\sin B(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=-\cos A\\ -\sin A(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=-\cos B\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin B\sin A\cos c=\cos A\cos B\\ \sin B\cos\ a=\cos A\\ \sin A\cos\ b=\cos B\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos c=\frac{\cos B}{\sin B}\frac{\cos A}{\sin A}\\ \cos A=\sin B\cos a\\ \cos B=\sin A\ \cos b\end{array}\right\}$$

$\therefore\ \cos c=\cot A\ \cot B$ ……………………………………………………(8)

$\cos A=\sin B\ \cos a$ ……………………………………………………(9)

$\cos B=\sin A\ \cos b$ ……………………………………………………(10)

이들 公式은 第2 cosine 法則에서 $\cos C=0$, $\sin C=1$ 이라고 놓은 結果이다.

(9), (10)을 邊邊 곱하면

$$\cos A\ \cos B=\sin B\ \cos a\ \sin A\ \cos b$$

$$1=\frac{\sin A}{\cos A}\ \frac{\sin B}{\cos B}\cos a\ \cos b$$

(1)의 $\cos c=\cos a\ \cos b$ 를 代入하여

$$1=\tan A\ \tan B\ \cos c$$

$$\therefore\ \cos\ c=\cot A\ \cot B$$

即 (8)이 誘導된다.

다음에 (2), (9)를 邊邊 곱하면

$$\sin a\ \cos A=\sin A\ \sin c\ \cos a\ \sin B$$

(5)에서 $\sin b=\sin B\ \sin c$ 이므로

$$\sin a\ \cos A=\sin A\ \cos a\ \sin b$$

$$\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin A}{\cos A}\sin b$$

$\therefore\ \tan a=\tan A\ \sin b$ ……………………………………………………(4)

또 (5), (10)을 邊邊 곱하면

$$\sin b \ \cos B = \sin B \ \sin c \ \cos b \ \sin A$$

(2)에서 $\sin a = \sin c \ \sin A$ 이므로

$$\sin b \ \cos B = \sin B \ \cos b \ \sin a$$

$$\frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin B}{\cos B} \sin a$$

$$\therefore \tan b = \tan B \ \sin a \quad \cdots\cdots (7)$$

를 얻는다.

參考文獻

① 金相輪著 **球面三角法** 韓國海洋大學 海事圖書出版部刊

② 金相輪 ; **벡터에 의한 球面三角法의 旣存公式의 誘導에 관한 考察,** 한국해양대학 논문집 제5집