準同位函數와 그 應用에 對한 考察

金　　章　　郁

A Study on the Homotopic Function and its Application

by

Kim Chang Wook

<目　次>

Abstract

The purpose of this paper are, to give the definition of the homotopic function, to prove the lemmata, to put down some notations concerning to it, to prove the theorems on the homotopic function, and also to prove the theorems on homotopy group, so that they may be of some help to prove the Cauchy's theorems in Real and Complex Analysis by means of Rudin's hints

1. 序　論

本論文에서는 準同位函數의 定義, 補助定理, 註를 設定하여 m－準同位函數의定義 準同位函數關係의 性質 等을 明示하고, 準同位函數와 準同位群의 定理를 證明하고, 나아가서 解析學에 있어서의 Cauchy 積分定理를 Rudin의 暗示에 의하여 證明하는 것 等을 研究의 目的으로 두었다

2. 定義, 補助定理, 註

〔補助定理 2～1〕

(1) X, Y, Z를 位相空間이라 하자, 連續寫像 $f, f'\colon X\to Y$, $g, g'\colon Y\to Z$에 있어서 $f\simeq f'$, $g\simeq g'$ 이면, $gof\simeq g'of'$ 〔5〕

(2) $f, g\colon X\to Y$가 準同位이면 모든 $A\subset X$에 關하여 $f|A\simeq g|A$ 〔4〕

(3) $f, g\colon x\to\prod_{\alpha} Y\alpha$가 準同位일 必充條件은 모든 α에 關하여 $p_{\alpha}of\simeq p_{\alpha}og$ 〔2〕

〔定義 2~2〕

F_0, F_1: $X \to Y$이라 하고 連續 m-價函數 H: $X \times I \to Y$가 存在하여, $H(x, 0) = F_0(x)$, $H(x, 1) = F_1(x)$이면 F_0는 F_1에로 m-準同位이라 하고 $F_0 \simeq F_1$이라 표시한다.

〔定義 2~3〕

Y가 Kuratowski 空間이고 F: $X \to Y$가 連續이면 F는 閉點이다.

〔定義 2~4〕

X는 Hausdorff 空間이고, Y는 Compact 空間이라 하고, 閉點 F는 m-價函數이라 하자. f는 $f(x) = F(x)$에 의하여 X로부터 $S(Y)$임이 定義된다. 여기에서 S-價函數 f는 F의 誘導函數이다.

〔定義 2~5〕

$F, G \in \Gamma^m(Y, Y_0)$이면, F는 $\Gamma^m(Y, Y_o)$內에서 G에로 m-準同位이고, $[F]$에 의하여 F에로의 m-準同位類를 表示한다.

$F, G \in \Gamma^m(Y, Y_o)$에 關하여

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F(2x_1, x_2, \cdots x_m), \quad 0 \leqq x_1 \leqq \frac{1}{2}$$

$$= G(2x_1 - 1, \cdots x_m), \quad \frac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$$

로써 $H = F + G$를 定義하며, 〔F〕+〔G〕=〔$F+G$〕이다.

〔定義 2~6〕

各 $F \in \Gamma^m(Y, Y_o)$에 對하여 元素 $f \in F^m(s(Y), Y_o)$가 存在하며 F는 $\Gamma^m(Y, Y_o)$ 內에서 f에로 m-準同位이다.

〔定義 2~7〕

$f_0, f_1 \in F^m(S(Y), Y_o)$이고, H는 f_0이 f_1에로 關聯되는 $\Gamma^m(Y, Y_o)$내로 m-準同位이면. f_0이 f_1에로 關聯되는 $F^m(S(Y), Y_o)$내로 準同位 h가 存在한다.

〔註 2~8〕

座標軸이 주어진 Euclid 空間 R^n의 原點과 座標軸上의 單位點을 頂點으로 하는 n次元 Euclid 單體를 $\Delta(n)$으로 表示하고, 또한 位相空間 X에 對하여 連續寫像 T: $\Delta(n) \to X$ 全體의 集合을 $S(x)_n$으로 表示한다. 이 $S(x)_n$의 元을 X의 特異單體이라 한다. 〔6〕

〔定義 2~9〕

準同位 f_t: $X \to Y$가 各 t에 따라서 Y의 가운데로 同相寫像일 때,
f_t를 isotopy, f_0는 f_1에 isotopic이라 한다. 이러한 條件이 없는 최초의 意味의 準同位를 自由準同位이라 한다.

3. 準同位函數

〔定理 3~1〕

F_0, F_1: $X \to Y$는 m-價函數이라 하자.

그러면 $F_0 \simeq F_1 \Longleftrightarrow f_0 \sim f_1$

여기서의 X는 hausdorff 空間이고 Y는 compact 空間이며, f_0, f_1: $X \to S(Y)$는 誘導函數에 關聯되는 것이다.

〔證 明〕

定義 2~2에 의하여 H는 m-準同位連結 F_0와 F_1이며 定義 2~3에 의하여 H, F_0, F_1이 閉點이며 f_0, f_1, h는 誘導函數에 關聯되는 것이다. 定義 2~4에서 H의 連續性은 h가 連續인 것에 包含된다.

또한 $h(x, o) = H(x, o) = F_0(x) = f_0(x)$

$h(x, 1) = H(x, 1) = F_1(x) = f_1(x)$

그래서, h는 f_0와 f_1에 연결되는 準同位이다.

逆으로 h는 f_0와 f_1에 연결되는 準同位이면, 函數 h는 $H(x, t) = h(x, t)$에 의하여 定義되는 m-價函數 H에 誘導된다. 定義 2~4에서 H는 閉點이고, h는 連續인 까닭으로 H는 連續인 것에 포함된다.

〔定理 3~2〕

Y가 compact 空間이면 $M\Pi_m(Y, Y_o) \simeq \Pi_m(s(Y), Y_o)$이다. [4]

〔證 明〕

各 $F \epsilon \Gamma^m(S(Y), Y_o)$에 對하여, $f \epsilon F^m(S(Y), Y_o)$는 定義 2-6에 의해서 주어진 元素라하고 $\lambda[F] = (f)$에 의해서 λ: $M\Pi_m(Y, Y_o) \to \Pi_m(S(Y), Y_o)$는 定義된다. 여기에서 (f)는 f를 포함하는 $F^m(S(Y), Y_o)$ 내로의 準同位類이다.

定義 2~5에 의해서 H는 G에 關聯되는 元素인 $g \epsilon F^m(S(Y), Y_o)$와 $[F]$의 元素이면 f와 g는 m-準同位이다.

그런 까닭으로 定義 2~7에 의해서, f와 g는 $F^m(S(Y), Y_o)$내에서 準同位이다.

이로 因하여 λ는 定義되었다.

(f)는 f에 의해서 表現되는 $\Pi_m(S(Y), Y_o)$의 元素이라 하자. 그러면 f는 역시 $\Gamma^m(S(Y), Y_o)$의 元素이다. $f \epsilon [F]$, $\lambda[F] = (f)$와 같이 $M\Pi_m(Y, Y_o)$내로 元素$[F]$이 存在한다. 따라서 λ는 定義 2~7로부터 isomorphism이다.

4. 應 用

〔定理 4~1〕

f는 開集合 X내에서 解析的이고 γ_o γ_1은 X내의 두개의 許容道이라 하자.

그러면 $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$ 〔5〕

(1) γ_0, γ_1은 X내에서, 閉이고 自由準同位이든지, (2) γ_0, γ_1은 X내에서 fixed end-point準同位이다.

〔證 明〕

(1) 位相空間 X와 연속사상 $\gamma:[o,1]\to X$(道)를 주면 閉道 γ_0, γ_1은

$$H(o.t)=H(1.t) \ (o\leqq t\leqq 1)$$

$$\gamma_0(o)=\mathrm{H}(o,t)=\gamma_1(o), \ \gamma_0(1)=H(1,t)=\gamma_1(1)$$

이면 X內에서 自由準同位이다.

(2) γ_0, γ_1은 $\gamma_0(o)=H(o.t)=\gamma_1(o)$ $\gamma_0(1)=H(1.t)=\gamma_1(1)(o\leqq t\leqq 1)$일 동안에 $H(s,o)=\gamma_0(s)$, $H(s,1)=\gamma_1(s)$ $(o\leqq s\leqq 1)$으로 連續寫像 H: $S=[o,1]\times[o,1]\to X$가 存在하면 fixed end-point 準同位이다.

5. 結　　論

準同位函數의 定義, 補助定理, 註를 明示하고, 다음과 같은 결과를 얻었다. 準同位函數에 있어서는 F_0, F_1: $X\to Y$이 m-價函數이고, $f_0, f_1: X\to S(Y)$는 誘導函數일 때 $F_0\simeq F_1 \Leftrightarrow f_0\sim f_1$임이 證明되었고 準同位群에 있어서는 γ가 Compact hausdorff 空間이면 $M\Pi_m(Y, Y_o)\simeq \Pi_m(S(Y), Y_o)$가 證明되고, 나아가서 Cauchy 定理의 結合準同位表現을 準同位函數를 이용하여 證明하였다.

參 考 文 獻

(1) 群と位相(裳華房), 横田一郎(1970).
(2) S, T, Hu: Homotopy Theory, Academic Press (1959)
(3) W, Rudin: Real and Complex analysis, MacGRaw-hill Book Co. (1971).
(4) E, H, Spanier: Algebraic Topology, MacGRaw-hill Book Co. (1970)
(5) J. Dugundji: Topology, Allyn and Bacon INC, (1963).
(6) 數學辭典(岩波書店) (1970).