좁은 水路에서의 水面波의 等價回路

俞　洪　善

Equivalent circuit analysis for a narrow channel

Hong-Sun Yu

目　次

Abstract

The equivalent-circuit analysis method introduced by J. W. Miles(1971) is applied to the problem of the surface wave transmission through a narrow rectangular channel whose depth is not even. To derive the equivalent circuit equations for the channel, the channel is divided into infinitesimally small fractions and the equivalent circuit for a fraction is sought and the circuit equations for the circuit are transformed into the differential equations by taking the limits of them as the size of the fraction goes to zero.

1. 序　論

John W. Miles는 港灣의 振動問題를 다룸에 있어서 音響진동이나 電磁진동문제를 다루는데 대단히 유용한 等價回路의 方法을 도입했다.[1] 이 방법은 항만의 外部진동, 水路진동 및 內部共鳴등의 問題를 따로 따로 獨立해서 다룰 수 있게 해 주고 境界値問題를 풀지 않고도 問題의 重要量들을 概算할 수 있게 하며 理論値 대신에 觀測値를 쉽게 代置해 볼 수 있게 하며 電算處理가 용이해 진다는 등의 利点을 가지고 있다. 그러나 실제문제에 있어서 항만의 기하학적형태의 복잡성이 다른 방법에서와 마찬가지로 문제취급을 어렵게 하는 제약이되고 있음은 물론이다.

本論文에서는 좁은 수로에서의 수면 파의 문제를 等價回路의 문제로 변환하여 다루어 보되 특히 水深이 一定하지 않은 境遇를 다루었다. 수심이 일정한 경우의 등가회로는 쉽게 구해진다. 일정수심의 경우에서 얻은 결과를 이용하여 수심이 일정치 않은 경우를 다루기 위하여 수로를 그 軸에 따라 微小간격으로 나누어서 이 微小區間의 연속적인 집합으로 보자. 그러면 각 미소구간은 근사적으

로 일정수심으로 볼 수 있으니까 그 等價回路를 구할 수 있고 따라서 全水路는 이와 같은 미소등가 회로의 直列連結回路로 볼 수 있는 것이다.

2. 等價回路의 諸量定義

單一振動數의 水面波의 式은 다음과 같이 表現된다.

$$\zeta(x,\ y)e^{i\omega t}=V_0\ exp\{-jk(x\cos\theta+y\ \sin\theta)\}e^{i\omega t} \quad\cdots\cdots(1)$$

여기서 V_0는 振幅, k는 波數, ω는 角振動數, θ는 考察点의 x軸에 대한 方位角이고 $j=\sqrt{-1}$이다. 單一成分波이므로 $e^{i\omega t}$에 관한 지식은 이미 알려진 것으로 보고 논의를 $\zeta(x,y)$에 대해서만 한정키로 한다. 우리가 다루는 問題를 淺海條件($kh\ll1$)이 成立하는 경우로 前提하면 다음과 같은 지식을 利用할 수 있다.[2)]

波速은 $c=\sqrt{gh}$ 로 계산되며 그리고

$$(\nabla^2+k^2)\zeta=0 \quad \left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \quad\cdots\cdots(2)$$

$$u=(jg/\omega)\ (\partial\zeta/\partial x)\cdots\cdots(3)$$

등이 成立한다. 여기서 g는 重力加速度, u는 水粒子의 운동속도의 x성분이다.

여기서 등가회로의 電壓에 해당하는 量은 水路의 任意斷面에서 水位의 平均値로 定義되는데 直四角形水路에서 波의 진행방향을 x軸으로 하고 그에 수직한 水平軸을 y軸으로 잡을 때 電壓 V는

$$V=\int\zeta u^*dy/(\int u^*dy) \quad\cdots\cdots(4)$$

로 계산된다. 여기서 u^*는 u의 複素共軛이다. 그리고 電流I는 그 地点의 연직단면을 통해 흐르는 流量으로 定義되며

$$I=\int udS=\int uhdy\cdots\cdots(5)$$

로 計算된다. 等價回路의 임피이던스 Z는

$$Z=V/I=\int\zeta u^*dy/(\int u^*dy)\cdot\int uhdy \quad\cdots\cdots(6)$$

로 계산된다. 이상에서 h는 水深을 나타낸다.

3. 一定水深水路의 等價回路

一定水深 h, 길이 l, 幅b의 직사각형수로에서 그 폭이 길이보다 크지 않다면 波는 그 퍼짐이 심하지 않아서 길이軸을 x축이라 할 때 x에만 의존하고 y에는 무관하다. 즉 파의 y성분은 무시될 수 있다. 이 조건이 성립하기 위해서는 $kb\ll1$이면 되는데 $kb<\pi$정도라도 위의 진술은 유효함이 확인된다.[1)] 따라서 (2)식은

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)\zeta=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

이 되고 이 방정식의 해는

$$\zeta(x)=A\cos kx+B\sin kx\cdots\cdots(8)$$

이 된다. 이제 ζ와 u는 x만의 함수이므로 (4)식에서 V를 구하면

$$V(x)=\zeta(x)\cdots\cdots(9)$$

이 된다. 여기서 $x=0$에서는 $V(0)=V_1$, $x=l$에서는 $V(l)=V_2$라고 한다면 (8)식의 상수 A와 B는

$$A=V_1,\quad B=V_2\csc kl-V_1\cot kl \quad\cdots\cdots(10)$$

이 되며 (8)식은

$$V(x)=V_1\cos kx+(V_2\csc kl-V_1\cot kl)\sin kx \quad\cdots\cdots(11)$$

로 된다. 한 편 (5)식에서 u는 x만의 함수이고 h는 일정하므로 전류는

$$I(x)=uh\int dy=uhb \quad \cdots\cdots(12)$$

로 계산된다. 그리고

$$u(x)=\frac{jg}{\omega}k[-V_1 \sin kx+(V_2 \csc kl-V_1 \cot kl)\cos kx] \quad \cdots\cdots(13)$$

이므로 전류는

$$I(x)=jbc[-V_1 \sin kx+(V_2 \csc kl-V_1 \cot kl)\cos kx] \quad \cdots\cdots(14)$$

가 된다. 여기서도 $x=0$에서 $I(0)=I_1$, $x=l$에서 $I(l)=I_2$라 한다면

$$I_1=jbc(V_2 \csc kl-V_1 \cot kl) \quad \cdots\cdots(15)$$

$$I_2=jbc[(V_2 \csc kl-V_1 \cot kl)\cos kl-V_1 \sin kl]$$
$$=I_1 \cos kl-jbc\, V_1 \sin kl \quad \cdots\cdots(16)$$

여기서 V_1을 구하면

$$V_1=-j\frac{\cot kl}{bc}I_1+j\frac{\csc kl}{bc}I_2 \quad \cdots\cdots(17)$$

그리고

$$V_2=-j\frac{\csc kl}{bc}I_1+j\frac{\cot kl}{bc}I_2 \quad \cdots\cdots(18)$$

상수 I_1과 I_2를 써서 (11)식과 (14)식을 표현하면

$$V(x)=(jbc \sin kl)^{-1}[I_1 \cos k(l-x)-I_2 \cos kx] \quad \cdots\cdots(19)$$

$$I(x)=\csc kl[I_1 \sin k(l-x)+I_2 \sin kx] \quad \cdots\cdots(20)$$

이 된다. (17)식과 (18)식을 行列로 표현하면

$$\begin{Bmatrix}V_1\\V_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}Z_{11}I_1-Z_{12}I_2\\Z_{21}I_1-Z_{22}I_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\Z_{21}&Z_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}I_1\\-I_2\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(21)$$

로 쓸 수 있고 여기서

$$Z_{11}=-j\frac{\cot kl}{bc}=Z_{22} \quad \cdots\cdots(22)$$

$$Z_{12}=-j\frac{\csc kl}{bc}=Z_{21} \quad \cdots\cdots(23)$$

이다 .이 行列關係式이 나타내는 바는 交流回路理論에 따라 그림(1)에 보이는 바와 같은 T形의 四端子回路로 나타낼 수 있다.[3] 이 회로의 두 팔 부분의 임피이던스는

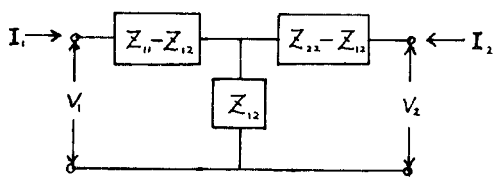

그림 1. 等價回路

$$Z_{11}-Z_{12}=Z_{22}-Z_{12}=(j/bc)\tan\frac{1}{2}kl \quad \cdots\cdots(24)$$

가동부분의 임피이던스는

$$Z_{12}=-(j/bc)\csc kl \quad \cdots\cdots(25)$$

로 계산되는데 전자는 誘導性이요, 후자는 容量性임을 알 수 있다.

4. 水深이 一定하지 않은 경우

一定하지 않은 水深을 가진 水路에 대한 문제를 다루기 위해서 서론에서 말한 것처럼 수로를 x축에 따라 dx의 간격으로 세분했다고 생각해 보자. 그 중 어느 한 구간은 폭이 b, 길이 dx인, 그리고 dx가 충분히 작으면 그 구간에서는 깊이의 변화가 거의 없다고 볼 수 있으므로 일정 수심의 수로가 된다. 따라서 앞절의 결론을 적용할 수 있다. 그리고 $dx\to 0$의 극한을 취해 보자. 그림 2에

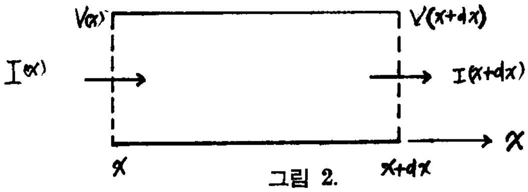

그림 2.

서 표시된 임의의 한 구간에서 x에서의 전압 $V(x)$ 및 전류 $I(x)$와 구간의 끝인 $x+dx$에서의 전압 $V(x+dx)$ 및 전류 $I(x+dx)$와를 비교해서 이 미소구간에서의 전압 변화 및 전류변화를 구해 보자. $V(x)=V_1$, $V(x+dx)=V_2$, $I(x)=I_1$, $I(x+dx)=I_2$로 놓으면 (21)식에서

$$V_1=Z_{11}I_1-Z_{12}I_2 \quad \cdots\cdots(26)$$

$$V_2=Z_{21}I_1-Z_{22}I_2 \quad \cdots\cdots(27)$$

이 구간에서의 전위의 변화 $dV=V_2-V_1=V(x+dx)-V(x)$를 구해 보면

$$dV=(I_1+I_2)(Z_{12}-Z_{11})=-j\frac{\tan\frac{1}{2}kdx}{bc}(I_1+I_2) \quad \cdots\cdots(28)$$

를 얻는다. 여기서 $dx\to 0$의 극한을 취하면 $\tan\frac{1}{2}kdx\to\frac{1}{2}kdx$, $\frac{I_1+I_2}{2}=I(x)$가 되므로

$$dV=-j\frac{kI(x)}{bc}dx \quad \cdots\cdots(29)$$

다시 고쳐 쓰면

$$\frac{dV}{dx}=-j\frac{\omega}{bgh}I(x) \quad \cdots\cdots(30)$$

를 얻는다. 여기서 수심 $h=h(x)$로 위치에 따라 변한다. 한편 (16)식에서 $dI=I_2-I_1=I(x+dx)-I(x)$를 구해 보자. $l=dx\to 0$의 극한을 취하면 $V_1\approx V_2=V(x)$, $\cos kl\to 1, \sin kl\to kdx$ 이 되므로

$$dI=-jbck\,V\,dx \quad \cdots\cdots(31)$$

따라서

$$\frac{dI}{dx}=-jb\omega\,V(x) \quad \cdots\cdots(32)$$

를 얻는다. 이상과 같이 하여 수심이 일정하지 않은 수로에서의 수면파의 전달문제를 다룰 수 있는 회로방정식을 얻었다.

5. 結 論

Miles의 等價回路方法을 水路에서의 波浪問題를, 특히 水深이 일정하지 않은 경우의 문제를 다루는데 적용해 보았다. $h(x)$의 형태 즉 수심의 분포에 따라 문제의 難易가 결정되겠지만 式자체가 電位變化와 電流變化를 포함하고 있기 때문에 실제수로문제를 다루는데 있어서 모든 자료들을 전기회로정보로 바꾸어 놓을 수 있고 따라서 computor에 의한 문제취급이 용이해 질 것이다.

실제 관측예를 통해서 검증을 해보았으면 하는 바람을 실현치 못하고 논문을 마감하는 것이 유감스럽지만 계속 자료를 찾는 노력을 계속코저 한다. 수로에서의 파랑문제는 港外로부터의 파동에너지를 항내에 전달하는데 있어서 파고감쇠효과나 filter로서의 역할을 맡고 있으므로 관심을 기울여야 할 문제라고 생각하며 계속 관심을 쓰고저 한다.

參 考 文 献

1) J. W. Miles(1971): Resonance of Harbours; an equivalent circuit analysis. Journ. of Fluid Mech. Vol. 46, Part 2, pp. 241~265.
2) H. Lamb(1932): Hydrodynamics §189. Cambridge Univ. Press.
3) 松元崇(1961); 電氣回路論演習 pp. 261~270.