正規基의 性質과 Compact化에 關한 小考

金　章　郁

A note on Normal base Compactification

Kim, Chang-Wook

〈目　次〉

Abstract

The concept of a normal base is due to Frink [3], who applied this concept to a compactification procedure due to Wollman [8] and studied whether every Hausdonff compactification can be obtained by this procedure.

Let X be a Tychonoff space, $\mathscr{F}$ a normal base on X, $W(\mathscr{F})$ the wollman compactification of X determined by $\mathscr{F}$ and Y an arbitrary (Hausdorff) compactification of X. We give the necessary and sufficient conditions for the inequality $Y \geq W(\mathscr{F})$ and also $W(\mathscr{F}) \geq Y$. We also extend certain basic properties of normal base which ordinary involve arbitrary finite number of sets to an arbitrary finite number of sets and, when X is compact to finite-point families of sets.

Ⅰ. 서　론

정규기(normal base)의 개념은 Frink[3]에 의하여 정의되었으며, 이 이론을 Wollman[8]에 의하여 증명된 Compact화에 응용하였고 이와 같은 방법론이 다른 Hausdorff Compact화에도 응용이 될 수 있는 것인가에 대하여도 연구하였다.

X를 Tycconoff 공간이라고 하고 $\mathscr{F}$를 X상의 정규기라고 하며 $W(\mathscr{F})$를 $\mathscr{F}$에 의하여 결정되는 X의 Wollmann compact화라고 하자. 그리고 Y를 X의 Hausdorff compact화라고 하면 본 논문에서는 다음의 부등식 $W(\mathscr{F}) \geq Y$와 $W \geq W(\mathscr{F})$를 만족하기 위한 필요충분조건을 구하며 일반적으로 α개의 집합을 포함하는 normal hase의 성질을 유한개의 집합을 포함하는 정규기로 확장하여 그 성질을 연구하며, 또 X가 compact일 때 유한점집합족으로도 확장하여 그 성질을 연구할 것이다.

본 논문을 통하여 모든 위상공간은 Tychonoff 공간이라고 가정하며 특히 Compact 공간은 Hausdorff

공간으로 생각한다. 기호를 간단히 하기 위하여 Imbedding은 포함관계로서 대치된다. 따라서, X의 Compact화는 X를 dense인 부분집합으로 포함하는 Compact인 공간 Y를 의미한다. 정규기와 Wollman compact화의 개념과 여러가지 성질은 논문 [1], [3], [5], [6]을 보면 잘 알 수 있을 것이다. X가 Z에서 dense인 Compact공간이 되며 Z의 폐부분집합에 대하여 $\{Cl_z(F) \mid F \in \mathscr{F}\}$는 기가 되며 또 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$이면 $Cl_z(F_1 \cap F_2) = Cl_z(F_1) \cap Cl_z(F_2)$이고 특히 $\{Clz(F) \mid F \in \mathscr{F}\}$는 Z의 정규기가 된다.

Ⅱ. 폐집합의 분활성

〈명제 1〉 X가 위상공간이라 하고 D를 X의 폐부분집합의 족으로서 임의의 교집합에 관하여 Closed라고 하자. $\mathscr{H}$를 $\{Cl_x(H) \mid H \in \mathscr{H}\} \subset \mathscr{D}$인 집합족으로 두고 $H_1, H_2 \in \mathscr{H}$, $H_1 \cap H_2 = \phi$이면 $H_1 \cap Cl_x(H_2) = \phi$라고 가정하자. 그러면, 다음 (1)(2)는 서로 동치이다.

(1) $A_1, A_2 \in \mathscr{D}$이고 $A_1 \subset A_2 = \phi$이면 $F_1, F_2 \in \mathscr{H}$가 존재하여 $A_1 \subset F_1, A_2 \subset F_2$이고 $F_1 \cap F_2 = \phi$이다.

(2) $A_v \in \mathscr{D}$에 대하여 족$\{A_v\}_{v \in V}$이 $\bigcap_{v \in V} A_v = \phi$이고 $\{X - A_v\}_{v \in V}$가 유한점합족이면, $F_v \in \mathscr{H}$가 존재하여 $A_v \subset F_v$이고 $\bigcap_{v \in V} F_v = \phi$이다.

〈증명〉 (2)에서 부터 (1)은 자명하게 된다. 따라서 (1)에서 (2)만 증명하면 된다. 지금 A_o와 $\cap \{A_v \mid 0 < v \in V\}$가 $\mathscr{D}$의 서로 소인 집합이므로 (1)에 의해서 $F_o, H \in \mathscr{H}$가 존재해서 $A_o \subset F_o$이고 $\cap \{A_v \mid 0 < v \in V\} \subset H$이며 $F_o \cap H = \phi$이다. 따라서 $Cl_x(F_o) \cap \mathscr{H} = \phi$,

$$Clx(F_o) \cap \cap \{A_v \mid 0 < v \in V\} = \phi.$$

지금 $0 < v \in V$, $a < v$라고 가정하면 집합 $F_a \in \mathscr{H}$에 대하여 다음을 정의할 수 있다. 즉, $A_a \subset F_a$,

$$\cap \{Cl_x(F_b) \mid b \leq a\} \cap \cap \{A_b \mid a < b \in V\} = \phi.$$

다음에 우리는 조건 $A_v \subset F_v$와

$$\cap \{Cl_x(F_b) \mid b \leq v\} \cap \cap \{A_b \mid v < b \in V\} = \phi$$

를 만족하는 집합 $F_v \in \mathscr{H}$를 구할 것이다. 이것을 위하여 처음에 $\cap \{Clx(F_b) \mid b < v\} \cap \cap \{A_b \mid v \leq b \in V\} = \phi$를 증명할 것이다.

지금 $\cap \{Cl_x(F_b) \mid b < v\} \cap \cap \{A_b \mid v \leq b \in V\} \neq \phi$라고 가정하고 x를 위의 집합의 원이라고 하자.

$I = \{b \in V \mid x \in X - A_b\}$라고 두면 $\{X - A_b\}_{b \in V}$가 유한점집합족이므로 I는 유한집합이고 또 $\bigcap_{b \in V} A_b = \phi$이므로 I는 공집합이 아니다. 따라서, $a = \sup I$는 존재하고 또 $b \in I$로부터 $b < v$이므로 $a < v$이다.

따라서,
$$\begin{aligned} x &\in \bigcap_{b \in I} Cl_x(F_b) \cap \cap \{A_b \mid a > b \notin I\} \cap \cap \{A_b \mid a < b \in V\} \\ &\subset \bigcap_{b \in I} Clx(F_b) \cap \cap \{F_b \mid a > b \notin I\} \cap \cap \{A_b \mid a < b \in V\} \\ &\subset \{Cl_x(F_b) \mid b \leq a\} \cap \cap \{A_b \mid a < b \in V\} = \phi \end{aligned}$$

이며 이것은 모순이다. 따라서, A_v와 $\cap \{Cl_x(F_b) \mid b < v\} \cap \cap \{A_v \mid v < b \in V\}$는 서로 소인 $\mathscr{D}$의 원이다. 따라서 $F_v, H \in \mathscr{H}$가 존재하여 $A_v \subset F_v$이고 $\cap \{Cl_x(F_b) \mid b < v\} \cap \cap \{A_b \mid v < b \in V\} \subset H$이고 $F_v \cap H = \phi$. 그러면 $Cl_x(F_v) \cap H = \phi$ 그리고 따라서 $\cap \{Cl_x(F_b) \mid b \leq v\} \cap \cap \{A_b \mid v < b \in V\} = \phi$이고 따라서 족

$\{F_v\}_{v\in V}$가 구성되었다. 이제 $\bigcap_{v\in V} F_v=\phi$만 증명하면 된다. 만일 $x\in\bigcap_{v\in V} F_v\neq\phi$이면 $I=\{b\in V|x\in X-A_b\}$에 대하여 I는 유한이고 공집합이 아니다. 따라서 $a=\sup I$라 두면 $a\in I$이므로 $\cap\}Cl_x(F_b)|b\leq a\}\cap\cap\{A_b|a<b\in V\}=\phi$이고 $x\notin\cap\{A_b|a<b\in V\}$ 이것은 a의 정의에 모순이다. 따라서 $\bigcap_{v\in V} F_v=\phi$이다.

〈**명제 2**〉 X를 하나의 집합이라고 두고 $\mathscr{D}$는 X의 부분집합의 족으로서 임의의 교집합이 폐집합에 관하여 Closed라고 하며 또 $\mathscr{H}\subset\mathscr{D}$라고 가정하면 다음 (1), (2)는 서는 동치이다.

(1) 만일 $A_1, A_2\in\mathscr{D}$이고 $A_1\cap A_2=\phi$이면 $F_1, F_2\in\mathscr{H}$가 존재하여 $A_1\subset F_1$, $A_2\subset F_2$이고 $F_1\cap F_2=\phi$이다.

(2) $A_v\in\mathscr{D}$, $v\in V$인 족$\{A_v\}_{v\in V}$에 대하여 $\{X-A_v\}_{v\in V}$가 유한점집합족이고 $\bigcap_{v\in V} A_v=\phi$이면 $F_v\in\mathscr{H}$가 존재하여 $A_v\subset F_v$, $v\in V$이고 $\bigcap_{v\in V} F_v=\phi$이다.

〈**증명**〉 집합 X에 discrete 위상을 도입하면 X는 위상공간이 되고 〈명제 1〉를 적용하면 〈명제 2〉는 같은 방법으로 증명된다.

〈**정리 1**〉 $\mathscr{F}$를 공간 X의 정규기라 하고 $Z=W(\mathscr{F})$라고 하자. 족$\{A_v\}_{v\in V}$를 Z의 폐부분집합족이라고 하는 $\{Z-A_v\}_{v\in V}$가 유한점집합족이고 $\bigcap_{v\in V} A_v=\phi$이면 $F_v\in\mathscr{F}$가 존재하여 $A_v\subset Cl_z\leq(F_v)$이고 $\bigcap_{v\in V} Cl_z(F_v)=\phi$이다.

〈**증명**〉 $\mathscr{D}$를 Z의 폐부분집합의 모임이라 할 때 $\mathscr{H}=\{Cl_z(F)|F\in\mathscr{F}\}$이면 Steiner[5], Biles[1]에 의하여 〈명제 2〉의 (1)이 만족된다는 것이 곧 증명되며 따라서 〈명제 2〉의 (2)에 의하여 본 정리는 증명된다.

다음의 정리도 역시 폐집합의 분활성에 관한 것이다. 첨수집합 V가 정확히 α개의 원으로 되어있는 경우에도 정규기 정의의 한 부분에 해당된다.

〈**정리 2**〉 Y를 Compact 공간이라고 하고 $\mathscr{F}$를 Y의 정규기라고 하자. $F_v\in\mathscr{F}$, $v\in V$에 대하여 $\{Y-F_v\}_{v\in V}$가 $\bigcap_{v\in V} F_v=\phi$인 유한점집합족이면 $G_v\in\mathscr{F}$가 존재하여 $F_v\subset Y-G_v$, $v\in V$이고 $\bigcap_{v\in V}(Y-G_v)=\phi$이다.

〈**증명**〉 $\mathscr{H}=\{Y-F|F\in\mathscr{F}\}$라 두고 $\mathscr{D}$를 Y의 폐부분집합의 모임이라고 하면 〈명제 1〉의 (1)은 정규기정의의 한 부분에 해당되고 따라서 (2)가 성립한다. 따라서 본 정리가 성립한다.

〈**따름정리**〉 $\mathscr{F}$를 공간 X의 정규기라고 하자. n를 $n\geq 1$인 정수라 두고 $F_1, F_2, \cdots, F_n\in F$가 $\bigcap_{i=1}^{n} F_i=\phi$라 하면 $G_1, G_1, \cdots, G_n\in\mathscr{F}$가 존재하여 $F_i\subset X-G_i(i=1, 2, \cdots,)$이고 $\bigcap_{i=1}^{n}(X-G_i)=\phi$이다.

〈**증명**〉 $Z\subset W(F)$라고 하면 $\{Cl_z(F)|F\in\mathscr{F}\}$는 Z의 정규기가 된다. Z가 compact이고 $\{Z-Cl_z(F_i)\}_{i=1, 2, \cdots}$가 유한점집합족이므로 〈정리 2〉에 의해서 쉽게 증명된다.

Ⅲ. 부등식 $Y\geq W(\mathscr{F})$, $Y\leq W(\mathscr{F})$의 필요충분조건

공간 Y가 X의 Compact 화이고 $\mathscr{F}$가 X의 정규기일 때 부등식 $Y\geq W(\mathscr{F})$, $Y\leq W(\mathscr{F})$가 성립하기 위한 필요충분한 조건을 구할 것이다.

〈**정리 3** 〔7〕,〔2〕〉 공간 X가 Y의 dense인 부분공간이고, $f:X\longrightarrow Z$에서 Compact 공간 Z의 연속사상이면 f가 Y상으로 확장가능할 필요충분조건은 Z의 임의의 두 폐집합 B_1, B_2, $B_1\cap B_2=\phi$에 대하여 $Cl_Y(f^{-1}(B_1)\cap Cl_Y(f^{-1}(B_2))=\phi$일 때이다.

일반적으로 Y_1, Y_2가 X의 Compact화이면 이들 사이의 순서를 다음과 같이 정의한다. 즉, $Y_1\geq Y_2$이기 위한 필요하고 충분한 조건은 사상 $fi:Y_1\longrightarrow Y_2$가 존재하고 이것이 $I=f|:X\longrightarrow X$인 항등함수로 축소될 수 있을 때이다.

위의 〈정리 3〉과 정의로부터 다음을 얻을 수 있다.

〈**명제 3**〉 Y_1, Y_2가 X의 Compact화이면 Y_1, Y_2이기 위한 필요충분조건은 X의 임의의 두 부분집합 B_1, B_2에 대하여 $Cl_{Y_2}(B_1)\cap Cl_{Y_2}(B_2)=\phi$이면 $Cl_{Y_1}(B_1)\cap Cl_{Y_2}(B_2)=\phi$일 때이다.

〈**정리 4**〉 $\mathscr{F}$가 X의 정규기이고 Y가 X의 Compact화일 때 부등식 $Y\geq W(\mathscr{F})$가 성립하기 위한 필요충분조건은 임의의 두 집합 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$, $F_1\cap F_2=\phi$에 대하여 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$일 때이다.

〈**증명**〉 $Z=W(\mathscr{F})$라 두고 $Y\geq Z$라고 가정하자. 또 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$, $F_1\cap F_2=\phi$라 하면 $Cl_Z(F_1)\cap Cl_Z(F_2)=\phi$이고 〈명제 3〉에 의하여 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$이다. 역으로 임의의 두 집합 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$, $F_1\cap F_2=\phi$에 대하여 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$라 하고 〈명제 3〉을 적용하자. B_1, B_2를 X의 폐부분집합이라 두고 $Cl_Z(B_1)\cap Cl_Z(B_2)=\phi$라고 하면 〈정리 1〉에 의하여 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$가 존재하여 $Cl_Z(B_i)\subset Cl_Z(F_i)_{i=1,2}$이고 $Cl_Z(F_1)\cap Cl_Z(F_2)=\phi$이다. 따라서 $F_1\cap F_2=\phi$이고 가정에 의하여 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$. 그러나 $B_i=X\cap Cl_Z(B_i)\subset X\cap Cl_Z(F_i)=F_{i(=1,2)}$이므로 $Cl_Y(B_1)\cap Cl_Y(B_2)=\phi$.

다음은 부등식 $Y\leq W(\mathscr{F})$이 성립하기 위한 필요충분조건을 구한 것이다.

〈**정리 5**〉 $\mathscr{F}$가 공간 X의 정규기이고 Y는 X의 Compact화일 때 부등식 $W(\mathscr{F})\geq Y$가 성립하기 위한 필요하고 충분한 조건은 Y의 임의의 두 폐집합 B_1, B_2, $B_1\cap B_2=\phi$에 대하여 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$가 존재하여 $B_i\subset Cl_Y(F_i)_{(i=1,2)}$이고 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$일 때이다.

〈**증명**〉 $Z=W(\mathscr{F})$라 두고 $Z\geq Y$라고 가정하자. 함수 $f:Z\longrightarrow Y$를 $I=f|_X:X\longrightarrow X$인 항등함수로 축소가능한 연속사상이고 하자. B_1, B_2를 Y의 폐부분집합이라 두고 $B_1\cap B_2=\phi$이라고 하자. Y가 normal 공간이므로 Y의 개부분집합 V와 W가 존재하여 $B_1\subset V$, $B_2\subset W$이고 $Cl_Y(V)\cap Cl_Y(W)=\phi$이다. $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(Y-V)$는 Z의 폐부분집합이고 $f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(Y-V)=\phi$이다. $Z=W(\mathscr{F})$이므로 $F, E\in\mathscr{F}$가 존재하여 $f^{-1}(B_1)\subset Cl_Z(F_1)$, $f^{-1}(Y-V)\subset Cl_Z(E)$, $Cl_Z(F_1)\cap Cl_Z(E)=\phi$이다. 같은 방법으로 $F_2, H\in\mathscr{F}$가 존재하여 $f^{-1}(B_2)\subset Cl_Z(F_2)$, $f^{-1}(Y-W)\subset Cl_Z(H)$, $Cl_Z(F_2)\cap Cl_Z(H)=\phi$이다. 또 $F_1\subset V$이고 $F\subset W$이다. 따라서 $B_1\subset Cl_Y(F_1)$, $B_2\subset Cl_Y(F_2)$이고

$$Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)\subset Cl_Y(V)\cap Cl_Y(W)=\phi$$

역으로, Y의 임의의 두 폐집합 B_1, B_2, $B_1\cap B_2=\phi$에 대하여 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$가 존재하여 $B_i\subset Cl_Y(F_i)_{(i=1,2)}$이고 $Cl_Y(F_1)\cap Cl_Y(F_2)=\phi$라고 가정하자. $\mathscr{D}$를 Y의 폐부분집합의 모임이라 두고 $\mathscr{H}=\{Cl_Y(F)|F\in\mathscr{F}\}$라 두면 〈명제 2〉에 의하여 $\{Y-B\}_{v\in V}$가 유한접집합족인 Y의 폐부분집합족 $\{B_v\}_{v\in V}$이 $\bigcap_{v\in V} B_v=\phi$이면 $F_v\in\mathscr{F}$가 존재하여 $B_v\subset Cl_Y(F_v)$, $v\in V$이고 $\bigcap_{v\in V} F_v\leq\bigcap_{v\in V} Cl_Y(F_v)=\phi$이다($\bigcap_{v\in V} F_v=\phi$). 따라서 임의의 Y의 폐부분집합 B_1, B_2, $B_1\cap B_2=\phi$에 대하여 $F_1, F_2\in\mathscr{F}$가 존재하여 $B_i\subset Cl_Y(F_i)_{(i=1,2)}$

이고 $F_1 \cap F_2 = \phi$이다. 따라서 임의의 Y의 폐부분집합 B_1, B_2, $Cl_Y(B_1) \cap Cl_Y(B_2) = \phi$에 대하여 F_1, $F_2 \in \mathscr{F}$가 존재하여 $B_i \subset F_{i(i=1,2)}$이고 $F_1 \cap F_2 = \phi$이다. 지금 B_1, B_2를 $Cl_Y(B_1) \cap Cl_Y(B_2) = \phi$인 X의 폐부분집합이라고 하자. 그러면 위의 사실에 의하여 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$가 존재하여 $B_i \subset F_{i(i=1,2)}$이고 $F_1 \cap F_2 = \phi$이다. 그런데 $Z = W(\mathscr{F})$이고 $Cl_Z(F_1) \cap Cl_Z(F_2) = \phi$이므로 $Cl_Z(B_1) \cap Cl_Z(B_2) = \phi$이다. 따라서 〈명제 3〉에 의하여 $Z \geq Y$이다.

References

[1] C. Biles, *Wollman Type Compactification*, Proc. Amer. Math. Soc., 25(1970), 363~368.

[2] R. Engelking, *Outline of General Topology*, Pan. Wyd. Nau. War. 1968.

[3] O. Frink, *Compactifications and Semi-normed Spaces*, Amer. J. Math., 86(1964), 602~607.

[4] A. Steiner and E. Steiner, *Nest Generated Intersection Rings in Tychonoff Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 148(1970). 589~601,

[5] ________, *Wollman and Z Compactification*, Duck. Math. J., 35(1968), 269~276.

[6] E. Steiner, *Wollman Spaces and Compactifications*, Fund. Math., 61(1968), 295~304.

[7] A. Taimanov, *On Extension of Continuous Mappings of Topological Spaces*, Mat. Sbronik., 31 (1952).

[8] H. Wollman, *Lattices and Topological Spaces*, Ann. of Math., 39(1938), 112~126.