

## 전자 - 포논계에서의 사이클로트론 공명선의 K함수표현

이 삼 념\*

### 〈目 次〉

1. 서론
2. 연산자 방법에 의한 공명선 함수
3. K함수의 유도
4. 결론

### 〈요 약〉

전자 - 포논 상호작용계에 대한 사이클로트론 선모양 함수를 Kubo의 전도도 공식과 사영연산자 방법을 사용하여 연속 분수꼴로 표현되는 전류 상관 함수로부터 구한후 이를 수치 해석을 위한 K함수표현으로 유도 하였다.

### I. 서론

2차원과 3차원계에서 여러가지 산란 미케니즘의 효과를 연구하기 위해서 실험 및 이론적으로 많은 작업이 행해져 왔다[1-11]. 특히 고순도의 결정을 얻는 기술의 발달은 전자적 성질의 사이클로트론 공명 연구에 새로운 장을 열었다. 따라서 사이클로트론 공명의 선폭을 조사 하므로써 밴드의 구조와 전자의 유효질량과 캐리어의 수송 이완시간 등의 값을 직접 측정하는 것이 가능 해졌다.

이론적으로는 자기포논공명선폭(magneto phonon resonance linewidths)의 수치계산에 여러가지 근사 방법에 근거를 둔 많은 계산이 있으나 그중 몇가지를 살펴보면 다음과 같다. Arora-spector[7]는 밀도 연산자 방법을 사용하여 전자-음향 포논계에 대한 공식을 얻었다. Suzuki[8]는 resolvent superoperator 방법을 사용하여 전자-포논계에 대한 공식을 얻었고 Royen등[9]은 Kubo공식[13]으로부터 시작해서 반도체 내에서 자유운반자에 대한 양자 극한 사이클로트론 공명 스펙트럼을 구하여 Born근사를 사용해서 이온화된 불순물과 LO-phonon산란을 조사했다. 1988년 Shibata등[10]은 사영연산자와 partial cumulant와

\*한국해양대학교 교양과정부 조교수(물리학 전공)

ordered cumulant 전개를 사용한 damping theoretical expansion 방법을 제시하고 이를 사이클로트론 공명선 함수에 적용하였는데 특징은 two-state jump Markoff과정과 Gaussian-Markoff과정을 고려해서 함수를 전개 시켜 나갔다는 점이다. 하지만 위의 이론들은 그 결과가 모두 다양하다. 이러한 불일치의 원인은 섭동전개가 서로 다른 방법으로 행하여졌고 근사방법이 또한 서로 다르다는데 까지 거슬러 올라갈 수 있다. 따라서 어느 것이 옳은가의 정당성을 논의하는 것은 매우 어렵다.

한편 대부분의 실험은 낮은 온도에서 선편과 자기장에 관해 주안점을 두고 행해졌다. 최근 Kobori등(11)은 양자극한 사이클로트론 공명의 선편을 포논산란(Ge과 Si에 있어서 음향 변형 퍼텐셜, CdS에서 음향압전산란, InSb에서 광학포논)에 대해 자기장과 온도의 함수로 측정했다.

본 논문은 이 실험적 연구와 shibata등의 이론에 동기를 얻어서 약한 비간섭성 산란과 강하게 상호작용하는 계의 경우에 모두 가능한 사이클로트론 흡수선을 구하여 이를 수치해석을 위한 단계로까지 수식을 유도하고자 한다. 먼저 사이클로트론 선편을 얻기위해서 사영연산자(14-16)를 사용하여 기억함수 형식으로 계산하고자 한다. 전도도는 kubo의 전류상관 공식으로부터 포논과 상호작용하는 자유전자의 계에 대해서 계산되어 졌다. 일정한 외부 자기장하에서 포물선 밴드구조를 고려하여 충돌과정이 포논의 평균장에서 일어난다고 생각한다. 따라서 섭동된 단일입자 에너지 효과를 유도할 수 있고 상호작용에 의한 lifetime은 스펙트럼선의 넓어짐에 해당한다. 이 방법은 섭동전개에 있어서 다른 이론들보다 더 엄밀하고 더 직접적인 것을 포함하고 있다.

## 2. 연산자 방법에 의한 공명선 함수

선편이 E이고 각 진동수가  $\omega$ 인 원평광된 마이크로파가 z축을 따라 고체내로 입사할때 평균 흡수력은

$$P = \frac{E^2}{2} \text{Re } \sigma_{+-}(\omega) \quad (2-1)$$

로 주어진다 [12] 여기서 Re는 실수부분을 의미하고, 포물선 띠를 갖는 물질의 z 방향을 따라 인가한 정자기장 B에 대하여 전도도 텐서  $\sigma_{+-}(\omega)$ 는

$$\sigma_{+-}(\omega) = \frac{1 - \exp(-\beta \omega_c)}{\omega_c Q} \sum_{\alpha} f(E_{\alpha}) \{1 - f(E_{\alpha} + \omega_c)\} \frac{|\langle \alpha+1 | j^+ | \alpha \rangle|^2}{i(\omega - \omega_0) - i\Gamma_{\alpha}^0(\omega)} \quad (2-2)$$

와 같다. 단  $f(E)$ 는 Fermi 분포 함수,  $\omega_c = eB/m$ ,  $m$ 은 전자의 유효 질량이다.  $Q$ 는 계의 체적이고  $\beta = (K_B T)^{-1}$ 이다. 여기서  $\hbar = 1$ 인 단위계를 사용한다. 전자의 전류 연산자  $j^{\pm}$ 에 대해서  $j^{\pm} = j_x \pm ij_y$ 이고,  $E_{\alpha}$ 는 상태  $|\alpha\rangle \equiv |N, \mathcal{K}\rangle$ 에 대응하는 비섭동하밀토니언의 에너지 고유치

이고,  $N$ 는 Landau 지수,  $\vec{k}$ 는 전자의 파수 벡터 이고  $\Gamma_a^0(\omega)$ 는 선모양 함수이다 여기서 에너지가  $\omega_{\vec{q}}$ 이고 운동량이  $\vec{q}$ 인 포논에 대해서 포논 하밀토니언

$$H_p = \sum_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger} b_{\vec{q}} \quad (2-3)$$

및 전자와 포논의 상호 작용을 나타내는 산란 퍼텐셜

$$V = \sum_{\vec{q}} (\gamma_{\vec{q}} b_{\vec{q}} + \gamma_{\vec{q}}^{\dagger} b_{\vec{q}}^{\dagger}) \quad (2-4)$$

$$\gamma_{\vec{q}} = C_{\vec{q}} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) \quad (2-5)$$

을 모델로 선택한다 단,  $b_{\vec{q}}^{\dagger}, b_{\vec{q}}$ 는 각각 포논의 생성 및 소멸 연산자이고,  $\vec{r}$ 는 전자의 위치벡터이다. 그러면

$$\omega_0 = \langle \omega_c + \langle \alpha+1 | V | \alpha+1 \rangle - \langle \alpha | V | \alpha \rangle \rangle_p \quad (2-6)$$

이고  $\langle A \rangle_p$ 는 A의 포논분포에 대한 평균이다. 만약  $\langle \langle \alpha | V | \alpha \rangle \rangle_p = 0$ 을 가정하면,  $\omega_0 = \omega_c$ 가 된다 이와 같이 하여 계산한 결과에 의하면 (상세한것은 참고문헌 17, 18 참조)

$$\begin{aligned} \Gamma_a^0(\omega) = \sum_{\vec{q}} (1+n_{\vec{q}}) & \left[ \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{(\gamma_{\vec{q}})_{\beta \alpha} \{ (\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\alpha, \beta} - \frac{j_{\beta}^+}{j_{\alpha}^+} (\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\alpha+1, \beta+1} \}}{\omega + E_{\alpha+1} - E_{\beta} + \omega_{\vec{q}} - i\eta - \Gamma_{1\alpha}^1(\omega)} \right. \\ & + \sum_{\beta \neq \alpha+1} \frac{(\gamma_{\vec{q}})_{\alpha+1, \beta} \{ (\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\beta, \alpha+1} - \frac{j_{\beta-1}^+}{j_{\alpha}^+} (\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\beta-1, \alpha} \}}{\omega + E_{\beta} - E_{\alpha} + \omega_{\vec{q}} - i\eta - \Gamma_{2\alpha}^1(\omega)} \left. \right] \\ & + \sum_{\vec{q}} n_{\vec{q}} \left[ \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{(\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\beta \alpha} \{ (\gamma_{\vec{q}})_{\alpha, \beta} - \frac{j_{\beta}^+}{j_{\alpha}^+} (\gamma_{\vec{q}})_{\alpha+1, \beta+1} \}}{\omega + E_{\alpha+1} - E_{\beta} - \omega_{\vec{q}} - i\eta - \Gamma_{3\alpha}^1(\omega)} \right. \\ & + \sum_{\beta \neq \alpha+1} \frac{(\gamma_{\vec{q}}^{\dagger})_{\alpha+1, \beta} \{ (\gamma_{\vec{q}})_{\beta, \alpha+1} - \frac{j_{\beta-1}^+}{j_{\alpha}^+} (\gamma_{\vec{q}})_{\beta-1, \alpha} \}}{\omega + E_{\beta} - E_{\alpha} - \omega_{\vec{q}} - i\eta - \Gamma_{4\alpha}^1(\omega)} \left. \right] \quad (2-7) \end{aligned}$$

를 얻는다. 단  $\eta \rightarrow 0^+$ 이고,  $n_{\vec{q}}$ 는 plank 분포함수이다.

여기서

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\alpha}^1(\omega) = & \left[ \left( \sum_{\beta \neq \alpha+1} \hat{V}_2 E_2 - \sum_{\beta \neq \alpha+1} \hat{V}_2 \sum_{\beta \neq \alpha} E_1 \right) + \left( \sum_{\beta \neq \alpha} \hat{V}_3 E_3 - \sum_{\beta \neq \alpha} \hat{V}_3 \sum_{\beta \neq \alpha} E_1 \right) \right. \\ & \left. + \left( \sum_{\beta \neq \alpha+1} \hat{V}_4 E_4 - \sum_{\beta \neq \alpha+1} \hat{V}_4 \sum_{\beta \neq \alpha} E_1 \right) - \theta_1 \right] / j_{\alpha}^+ \Delta_1 \quad (2-8) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{2a}^1(\omega) = \left[ \left( \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 E_1 - \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 \sum_{\beta \neq a+1} E_2 \right) + \left( \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_3 E_3 - \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_3 \sum_{\beta \neq a} E_2 \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_4 E_4 - \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_4 \sum_{\beta \neq a} E_2 \right) - \theta_2 \right] / j_a^+ \Delta_1 \quad (2-9)$$

$$\Gamma_{3a}^1(\omega) = \left[ \left( \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_1 E_1 - \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_1 \sum_{\beta \neq a} E_3 \right) + \left( \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 E_2 - \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 \sum_{\beta \neq a} E_3 \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_4 E_4 - \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_4 \sum_{\beta \neq a} E_3 \right) - \theta_3 \right] / j_a^+ \Delta_1 \quad (2-10)$$

$$\Gamma_{4a}^1(\omega) = \left[ \left( \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_1 E_1 - \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_1 \sum_{\beta \neq a+1} E_4 \right) + \left( \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 E_2 - \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 \sum_{\beta \neq a+1} E_4 \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_3 E_3 - \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_3 \sum_{\beta \neq a+1} E_4 \right) - \theta_4 \right] / j_a^+ \Delta_1 \quad (2-11)$$

$$\theta_1 = \sum_q \sum_{\beta \neq a} (1+n_q^-) (\gamma_q^-)_{\nu, \mu} \left\{ j_\mu^+ (\gamma_q^+)_{\mu\nu} - j_\nu^+ (\gamma_q^+)_{\mu+1, \nu+1} \right\} E_1 \quad (2-12)$$

$$\theta_2 = \sum_q \sum_{\beta \neq a+1} (1+n_q^-) (\gamma_q^-)_{\mu+1, \nu} \left\{ j_\mu^+ (\gamma_q^+)_{\nu, \mu+1} - j_{\nu-1}^+ (\gamma_q^+)_{\nu-1, \mu} \right\} E_2 \quad (2-13)$$

$$\theta_3 = \sum_q \sum_{\beta \neq a} n_q^- (\gamma_q^+)_{\nu, \mu} \left\{ j_\mu^+ (\gamma_q^-)_{\mu\nu} - j_\nu^+ (\gamma_q^-)_{\mu+1, \nu+1} \right\} E_3 \quad (2-14)$$

$$\theta_4 = \sum_q \sum_{\beta \neq a+1} n_q^- (\gamma_q^+)_{\mu+1, \nu} \left\{ j_\mu^+ (\gamma_q^-)_{\nu, \mu+1} - j_{\nu-1}^+ (\gamma_q^-)_{\nu-1, \mu} \right\} E_4 \quad (2-15)$$

$$\hat{V}_1 = \sum_q (1+n_q^-) (\gamma_q^-)_{\beta, a} \left[ j_a^+ (\gamma_q^+)_{a, \beta} - j_\beta^+ (\gamma_q^+)_{a+1, \beta+1} \right] \quad (2-16)$$

$$\hat{V}_2 = \sum_q (1+n_q^-) (\gamma_q^-)_{a+1, \beta} \left[ j_a^+ (\gamma_q^+)_{\beta, a+1} - j_{\beta-1}^+ (\gamma_q^+)_{\beta-1, a} \right] \quad (2-17)$$

$$\hat{V}_3 = \sum_q n_q^- (\gamma_q^+)_{\beta, a} \left[ j_a^+ (\gamma_q^-)_{a, \beta} - j_\beta^+ (\gamma_q^-)_{a+1, \beta+1} \right] \quad (2-18)$$

$$\hat{V}_4 = \sum_q n_q^- (\gamma_q^+)_{a+1, \beta} \left[ j_a^+ (\gamma_q^-)_{\beta, a+1} - j_{\beta-1}^+ (\gamma_q^-)_{\beta-1, a} \right] \quad (2-19)$$

$$\Delta_1 = -(j_a^+)^{-1} \left[ \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_1 + \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_2 + \sum_{\beta \neq a} \hat{V}_3 + \sum_{\beta \neq a+1} \hat{V}_4 \right] \quad (2-20)$$

$$E_1 = 2 \omega + E_{a+1} - E_\beta + \omega_q^- \quad (2-21)$$

$$E_2 = 2 \omega + E_\beta - E_a + \omega_q^- \quad (2-22)$$

$$E_3 = 2\omega + E_{\alpha+1} - E_\beta - \omega_q \quad (2-23)$$

$$E_4 = 2\omega + E_\beta - E_\alpha - \omega_q \quad (2-24)$$

이다. 식 (2-12)에서 (2-15)까지의 합의 기호에 있는 플라임 부호는  $\beta \approx \nu$  그리고  $\alpha \approx \mu$  즉  $(N_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) = (N_\mu, \mathcal{K}_\mu)$ 와  $(N_\beta, \mathcal{K}_\beta) = (N_\nu, \mathcal{K}_\nu)$ 는 제외 된다는 뜻이다. (2-7)식을 계산 할때

$$\sum_{\beta \approx \alpha} \hat{V}_1 E_1 = \sum_{\beta \approx \alpha} \hat{V}_1 \sum_{\beta \approx \alpha} E_1 - \theta_1 \quad (2-25)$$

와 같은 관계식을 사용 하였다.

### 3. K함수의 유도

사이클로트론 공명선 함수  $\Gamma_\alpha^0(\omega)$ 를 계산하기 위해서 (2-7)식에 있는 전자-포논 상호 작용 행렬요소  $|\langle \beta | \gamma_q | \alpha \rangle|^2$ 와 같은 항들을 계산해야 한다. 먼저  $(\gamma_q)_{\alpha, \beta}$ 를 계산하여 보면

$$(\gamma_q)_{\alpha, \beta} = \langle N_\alpha, k_\alpha | C_q^\dagger e^{iq \cdot \vec{r}} | N_\beta, k_\beta \rangle \quad (3-1)$$

$$= \int dV \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} e^{-i(yk_\alpha + zk_\alpha)} \Phi_{N_\alpha}^*(x - X_\alpha) \\ \times C_q^\dagger e^{iq \cdot \vec{r}} \times \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} e^{-i(yk_\beta + zk_\beta)} \Phi_{N_\beta}(x - X_\beta) \quad (3-2)$$

$$= \iiint dx dy dz \frac{1}{L_y L_z} e^{i(k_\beta - k_\alpha)y} e^{i(k_\beta - k_\alpha)z} \Phi_{N_\alpha}^*(x - X_\alpha) \Phi_{N_\beta}(x - X_\beta) C_q^\dagger e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} \quad (3-3)$$

$$= C_q^\dagger \int dx \Phi_{N_\alpha}^*(x - X_\alpha) e^{iq_x X} \Phi_{N_\beta}(x - X_\beta) \int dx \frac{1}{L_y} e^{i(k_\beta - k_\alpha + q)y} \int dz \frac{1}{L_z} e^{i(k_\beta - k_\alpha + q)z} \quad (3-4)$$

$$= C_q^\dagger J_{N_\alpha, N_\beta}(X_\alpha, q_x, X_\beta) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q_x} \delta_{k_\beta, k_\alpha - q_z} \quad (3-5)$$

여기서

$$J_{N_\alpha, N_\beta}(X_\alpha, q_x, X_\beta) = \int dx \Phi_{N_\alpha}^*(x - X_\alpha) e^{iq_x X} \Phi_{N_\beta}(x - X_\beta) \quad (3-6)$$

이다. 한편  $X_\beta = -r_0^2 k_{\beta y} = -r_0^2 (k_{\alpha y} - q_y) = -r_0^2 k_{\alpha y} + r_0^2 q_y = X_\alpha + r_0^2 q_y$  이므로 (3-5)식은

$$(3-5)식 = C_q^\dagger J_{N_\alpha, N_\beta}(X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q_x} \quad (3-7)$$

와 같이 된다. 이와 같은 방법으로 (2-7)식에서  $\gamma_q$ 에 대한 것들을 계산하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$(\gamma_q)_{\beta, \alpha} = C_q^\dagger J_{N_\beta, N_\alpha}(X_\alpha - r_0^2 q_y, q_x, X_\alpha) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q_x} \quad (3-8)$$

$$(\gamma_q)_{\alpha+1, \beta} = C_q^\dagger J_{N_\alpha+1, N_\beta}(X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q_x} \quad (3-9)$$

$$(\gamma_q^-)_{\beta, \alpha+1} = C_q^- J_{N, N_{\alpha-1}}(X_{\alpha} - r_0^2 q_y, q_x, X_{\alpha}) \delta_{k_{\alpha}, k_{\alpha} - q} \quad (3-10)$$

$$(\gamma_q^-)_{\beta-1, \alpha} = C_q^- J_{N, N_{\alpha}}(X_{\alpha} - r_0^2 q_y, q_x, X_{\alpha}) \delta_{k_{\alpha}, k_{\alpha} - q} \quad (3-11)$$

$$(\gamma_q^-)_{\alpha+1, \beta+1} = C_q^- J_{N_{\alpha+1}, N_{\beta+1}}(X_{\alpha}, q_x, X_{\alpha} + r_0^2 q_y) \delta_{k_{\alpha}, k_{\alpha} - q} \quad (3-12)$$

한편  $J_{NN'}(X, q_x, X')$ 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J_{NN'}(X, q_x, X') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_N^*(x-X) e^{ixq_x} \Phi_{N'}(x-X') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (2^N N! 2^{N'} N'!)^{-\frac{1}{2}} (r_0 \sqrt{\pi})^{-1} H_N\left(\frac{x-X}{r_0}\right) H_{N'}\left(\frac{x-X'}{r_0}\right) e^{-\frac{1}{2r_0^2} \left\{ (x-X)^2 + (x-X')^2 - ixq_x, 2r_0^2 \right\}} \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} &= (2^N N! 2^{N'} N'! \pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_N\left(z + \frac{X' - X + ir_0^2 q_x}{2r_0}\right) H_{N'}\left(z + \frac{X - X' + ir_0^2 q_x}{2r_0}\right) \\ &\quad \times e^{-\left\{ \left(\frac{X-X'}{2r_0}\right)^2 - \frac{i(X+X')}{2} q_x + \left(\frac{r_0 q_x}{2}\right)^2 \right\}} \end{aligned} \quad (3-14)$$

이때 (3-13) 식에서 (3-14) 식의 계산에서는  $z = \frac{1}{r_0} \left( x - \frac{X-X' + ir_0^2 q_x}{2} \right)$  로 변수치환을 하고 계산하였다. 한편

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z+a) H_n(z+b) e^{-z^2} dz = 2^n \sqrt{\pi} m! b^{n-m} L_m^{n-m}(-2ab), \quad n \geq m \quad (3-15)$$

를 이용하면 (3-14) 식은

$$(3-14) \text{ 식} = 2^N \cdot \sqrt{\pi} N_{<}! \left( \frac{X_{<} - X_{>} + ir_0^2 q_x}{2r_0} \right)^{N_{>} - N_{<}} \cdot L_{N_{>}}^{N_{>} - N_{<}} \left( \frac{1}{2r_0^2} \left\{ (X' - X)^2 + (r_0^2 q_x)^2 \right\} \right) \quad (3-16)$$

가 된다 이때  $N_{>}$ 와  $N_{<}$ 는 두 수  $N$ 과  $N'$ 의 큰쪽과 작은쪽에 해당되고  $L_n^m(t)$ 는 associate Laguerre polynomial로서 다음과 같다.

$$L_n^m(t) = \frac{e^t}{n!} t^{-m} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+m} e^{-t}) \quad (3-17)$$

따라서 (3-14) 식에 (3-16) 식을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (3-14) \text{ 식} &= \frac{1}{\sqrt{2^N \cdot N_{<}! \cdot 2^{N'} \cdot N_{>}! \cdot \pi}} 2^N \cdot \sqrt{\pi} N_{<}! \left( \frac{X_{<} - X_{>} + ir_0^2 q_x}{2r_0} \right)^{N_{>} - N_{<}} \\ &\quad \times L_{N_{>}}^{N_{>} - N_{<}} \left( \frac{1}{2r_0^2} [(X' - X)^2 + (r_0^2 q_x)^2] \right) e^{-\left\{ \left(\frac{X-X'}{2r_0}\right)^2 - \frac{i(X-X')}{2} q_x + \left(\frac{r_0 q_x}{2}\right)^2 \right\}} \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2^{N_>} N_<!}{2^{N_<} N_>!}} \left( \frac{X_< - X_> + ir_0^2 q_x}{2r_0} \right)^{N_> - N_<} \\
 &\times L_{N_<}^{N_> - N_<} \left( \frac{1}{2r_0^2} [(X' - X)^2 + (r_0^2 q_x)^2] \right) \times e^{-\left\{ \left( \frac{X-X'}{2r_0} \right)^2 - \frac{i(X+X')}{2} q_x + \left( \frac{r_0 q_x}{2} \right)^2 \right\}} \quad (3-19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{N_<!}{N_>!}} \left( \frac{X_< - X_> + ir_0^2 q_x}{\sqrt{2} r_0} \right)^{N_> - N_<} \\
 &\times L_{N_<}^{N_> - N_<} \left( \frac{1}{2r_0^2} [(X' - X)^2 + (r_0^2 q_x)^2] \right) \times e^{-\left\{ \left( \frac{X-X'}{2r_0} \right)^2 - \frac{i(X+X')}{2} q_x + \left( \frac{r_0 q_x}{2} \right)^2 \right\}} \quad (3-20)
 \end{aligned}$$

여기서  $X_< - X_> = -r_0^2 q_y$  가 되는데

예를 들어 계산하면  $X = X_\alpha = -r_0^2 k_{\alpha y}$ ,  $X' = X_\beta = -r_0^2 k_{\beta y}$  에서  $\delta_{k_\alpha, k_\beta - q}$  이므로

$X' = -r_0^2 (k_{\alpha y} - q_y) = -r_0^2 k_{\alpha y} + r_0^2 q_y$  가 된다. 그러므로  $X - X' = X_< - X_> = -r_0^2 q_y$  가 된다 혹은

$\delta_{k_\alpha, k_\beta - q}$  를 이용하면  $X = X_\alpha = -r_0^2 (k_{\beta y} - q_y) = -r_0^2 k_{\beta y} + r_0^2 q_y$

되어서  $X - X' = X_> - X_< = r_0^2 q_y$  즉  $X_< - X_> = -r_0^2 q_y$  가 된다.

$$\text{따라서 (3-20) 식에서 } \left( \frac{X_< - X_> + ir_0^2 q_x}{\sqrt{2} r_0} \right)^{N_> - N_<} = \left( \frac{-r_0^2 q_y + ir_0^2 q_x}{\sqrt{2} r_0} \right)^{N_> - N_<}$$

$$= \left( \frac{r_0(iq_x - q_y)}{\sqrt{2}} \right)^{N_> - N_<} \text{ 가 되고 } |X' - X| = r_0^2 q_y \text{ 이므로 } N' \geq N \text{ 인 경우}$$

(3-20) 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 (3-20) \text{ 식} &= J_{N'N} (X', q_x, X) = \sqrt{\frac{N!}{N'!}} \left( \frac{r_0(iq_x - q_y)}{\sqrt{2}} \right)^{N' - N} L_{N'}^{N' - N} \left( \frac{r_0^2 (q_x^2 + q_y^2)}{2} \right) \\
 &\times e^{-\left\{ \left( \frac{r_0 q_y}{2} \right)^2 - \frac{i(X+X')}{2} q_x + \left( \frac{r_0 q_x}{2} \right)^2 \right\}}
 \end{aligned}$$

한편  $J_{N'N} (X', q_x, X)$  을 계산해보면

$$J_{N'N} (X', q_x, X) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_{N'}^* (x - X') e^{ixq} \Phi_N (x - X)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2^N N! \sqrt{\pi} r_0)^{-\frac{1}{2}} H_N \left( \frac{x-X'}{r_0} \right) e^{-\frac{(x-X')^2}{2r_0^2}} e^{ixq_x} \\
 &\quad \times (2^N N! \sqrt{\pi} r_0)^{-\frac{1}{2}} H_N \left( \frac{x-X}{r_0} \right) e^{-\frac{(x-X)^2}{2r_0^2}} dx \\
 &= J_{NN'}(X, q_x, X')
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

가 된다. 즉

$$\begin{aligned}
 J_{NN'}(X, q_x, X') &= J_{N'N}(X', q_x, X) \\
 &= J_{NN'}^*(X, -q_x, X')
 \end{aligned} \tag{3-23}$$

$$= J_{N'N}^*(X', -q_x, X) \tag{3-24}$$

의 관계가 됨을 알 수 있다. 그러므로 우리는 다음을 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K_1(N, N'; t) &\equiv J_{NN'}(X, q_x, X') = J_{N'N}(X', q_x, X) \\
 &= \frac{N!}{N'!} \left( \frac{r_0^2 (q_x^2 + q_y^2)}{2} \right)^{N'-N} e^{-\left\{ \frac{r_0^2 (q_x^2 + q_y^2)}{2} \right\}} \left[ L_N^{N'-N} \left( \frac{r_0^2 (q_x^2 + q_y^2)}{2} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

$$= \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} \left[ L_N^{N'-N}(t) \right]^2 \tag{3-26}$$

$$t \equiv \frac{r_0^2 (q_x^2 + q_y^2)}{2} \tag{3-27}$$

또

$$\begin{aligned}
 J_{N+1, N+1}(X', -q_x, X) &= J_{N+1, N+1}(X \pm r_0^2 q_y, -q_x, X) \\
 &= \sqrt{\frac{(N+1)!}{(N'+1)!}} \left( \frac{r_0(q_y - iq_x)}{\sqrt{2}} \right)^{N'-N} L_{N+1}^{N+1-N-1}(t) e^{-\left\{ \left( \frac{r_0 q_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{r_0 q_x}{2} \right)^2 + \frac{i(X+X')q_x}{2} \right\}}
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

이므로 (3-21) 식과 (3-28) 식으로 부터

$$K_2(N, N'; t) \equiv J_{NN'}(X, q_x, X') J_{N+1, N+1}(X', -q_x, X) \tag{3-29}$$

$$= J_{N+1, N+1}(X, q_x, X') J_{N, N}(X', -q_x, X) \tag{3-30}$$

$$= \sqrt{\frac{(N+1)!}{(N'+1)!}} \sqrt{\frac{N!}{N'!}} (t)^{N'-N} e^{-t} L_N^{N'-N}(t) L_{N+1}^{N'-N}(t) \tag{3-31}$$

$$= \sqrt{\frac{N+1}{N'+1}} \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} L_N^{N'-N}(t) L_{N+1}^{N'-N}(t) \tag{3-32}$$



와 같이 정의 하고 다시

$$K(N, N'; t) \equiv K_1(N, N'; t) - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} K_2(N, N'; t) \quad (3-33)$$

$$K'(N, N'; t) \equiv K_1(N+1, N'+1; t) - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} K_2(N, N'; t) \quad (3-34)$$

와 같이 둔다. 여기서 함수  $K(N, N'; t)$ 를 두가지 경우에 대해서 살펴본다. 먼저  $N' > N$ 의 경우

$$K(N, N'; t) = K'(N, N'-1; t) \quad (3-35)$$

$$= K_1(N, N'; t) - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} K_2(N, N'; t)$$

$$= \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} \left[ L_N^{N'-N}(t) \right]^2 - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} \sqrt{\frac{N+1}{N'+1}} \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} L_N^{N'-N}(t) L_{N+1}^{N'-N}(t) \quad (3-36)$$

$$= \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} L_N^{N'-N}(t) \left[ L_N^{N'-N}(t) - L_{N+1}^{N'-N}(t) \right] \quad (3-37)$$

여기서 associated Laguerre polynomial의 회귀관계

$$L_{N+1}^{N'-N}(t) - L_N^{N'-N}(t) = L_{N+1}^{N'-N-1}(t)$$

를 사용하면

$$(3-37) \text{ 식} = \frac{N!}{N'!} (t)^{N'-N} e^{-t} L_N^{N'-N}(t) L_{N+1}^{N'-N-1}(t) \quad (3-39)$$

가 된다 한편  $N' \leq N$  인 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K(N, N'; t) &= K_1(N, N'; t) - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} K_2(N, N'; t) \\ &= \frac{N'!}{N!} (t)^{N-N'} e^{-t} \left[ L_N^{N-N'}(t) \right]^2 - \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} \sqrt{\frac{N'+1}{N+1}} \frac{N'!}{N!} (t)^{N-N'} e^{-t} L_N^{N-N'}(t) L_{N+1}^{N-N'}(t) \\ &= \frac{N'!}{N!} (t)^{N-N'} e^{-t} L_N^{N-N'}(t) \left[ L_N^{N-N'}(t) - \frac{N'+1}{N+1} L_{N+1}^{N-N'}(t) \right] \end{aligned} \quad (3-40)$$

여기서 회귀관계

$$(N+1)L_N^{N-N'}(t) - (N'+1)L_{N+1}^{N-N'}(t) = tL_N^{N-N'+1}(t) \quad (3-41)$$

를 사용하면

$$\begin{aligned} (3-40) \text{ 식} &= \frac{N'!}{N!} (t)^{N-N'} e^{-t} L_N^{N-N'}(t) \left[ \frac{t}{N+1} L_N^{N-N'+1}(t) \right] \\ &= \frac{N'!}{(N+1)!} (t)^{N-N'+1} e^{-t} L_N^{N-N'}(t) L_N^{N-N'+1}(t) \end{aligned} \quad (3-42)$$

가 된다. 그러므로 (2-7)식의 분자를  $K(N, N'; t)$  함수로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 (\text{첫번째항}) &= (\gamma_q^-)_{\beta, \alpha} (\gamma_q^+)_{\alpha, \beta} \\
 &= C_q^- J_{N_\beta, N_\alpha} (X_\alpha + r_0^2 q_y, q_x, X_\alpha) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q} \\
 &\quad \times C_q^+ J_{N_\alpha, N_\beta} (X_\alpha, -q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha + q} \\
 &= |C_q^-|^2 K_1(N_\beta, N_\alpha; i) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q}
 \end{aligned} \tag{3-43}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{두번째항}) &= \frac{j_\beta^+}{j_\alpha^+} (\gamma_q^-)_{\beta, \alpha} (\gamma_q^+)_{\alpha+1, \beta+1} \\
 &= \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} C_q^- J_{N_\beta, N_\alpha} (X_\alpha + r_0^2 q_y, q_x, X_\alpha) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q} \\
 &\quad \times C_q^+ J_{N_\alpha + 1, N_\beta + 1} (X_\alpha, -q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha + q} \\
 &= \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} |C_q^-|^2 K_2(N_\beta, N_\alpha; i) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q}
 \end{aligned} \tag{3-44}$$

위 식에서  $j_\alpha^+ = \langle \alpha + 1 | j^+ | \alpha \rangle = ie \sqrt{\frac{2 \omega_c (N_\alpha + 1)}{m}}$  이 사용되었다.

따라서

$$\begin{aligned}
 (3-43)\text{식} - (3-44)\text{식} &= |C_q^-|^2 \left[ K_1(N_\beta, N_\alpha; i) - \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} K_2(N_\beta, N_\alpha; i) \right] \delta_{k_\alpha, k_\beta - q} \\
 &= |C_q^-|^2 K(N_\alpha, N_\beta; i) \delta_{k_\alpha, k_\beta - q}
 \end{aligned} \tag{3-45}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{세번째항}) &= (\gamma_q^-)_{\alpha+1, \beta} (\gamma_q^+)_{\beta, \alpha+1} \\
 &= C_q^- J_{N_\alpha + 1, N_\beta} (X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q} \\
 &\quad \times C_q^+ J_{N_\beta, N_\alpha + 1} (X_\alpha + r_0^2 q_y, -q_x, X_\beta) \delta_{k_\alpha, k_\beta + q} \\
 &= |C_q^-|^2 K_1(N_\alpha + 1, N_\beta; i) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q}
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{네번째항}) &= (\gamma_q^-)_{\alpha+1, \beta} (\gamma_q^+)_{\beta-1, \alpha} \\
 &= C_q^- J_{N_\alpha + 1, N_\beta} (X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q} \\
 &\quad \times C_q^+ J_{N_\beta - 1, N_\alpha} (X_\alpha + r_0^2 q_y, -q_x, X_\alpha) \delta_{k_\alpha, k_\beta + q} \\
 &= |C_q^-|^2 K_2(N_\alpha, N_\beta - 1; i) \delta_{k_\beta, k_\alpha - q}
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

따라서

$$(3-46)\text{식} - (3-47)\text{식} = |C_q^-|^2 \left[ K_1(N_\alpha + 1, N_\beta; i) - \sqrt{\frac{N_\beta}{N_\alpha + 1}} K_2(N_\alpha, N_\beta - 1; i) \right] \delta_{k_\beta, k_\alpha - q}$$

$$\begin{aligned}
 &= |C_q^-|^2 K'(N_\alpha, N_{\beta-1}; t) \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-48}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{다섯번째항}) &= (\gamma_q^+)_{\beta\alpha} (\gamma_q^-)_{\alpha\beta} \\
 &= C_q^+ J_{N_\beta, N_\alpha} (X_\alpha + r_0^2 q_y, -q_x, X_\alpha) \delta_{k_x, k_y + q_z} \\
 &\times C_q^- J_{N_\alpha, N_\beta} (X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K_1(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-49}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{여섯번째항}) &= \frac{j_\beta^+}{j_\alpha^+} (\gamma_q^+)_{\beta\alpha} (\gamma_q^-)_{\alpha+1, \beta+1} \\
 &= \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} C_q^+ J_{N_\beta, N_\alpha} (X_\alpha + r_0^2 q_y, -q_x, X_\alpha) \delta_{k_x, k_y + q_z} \\
 &\quad \times C_q^- J_{N_\alpha + 1, N_\beta + 1} (X_\alpha, q_x, X_\alpha + r_0^2 q_y) \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} |C_q^-|^2 K_2(N_\beta, N_\alpha; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-50}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 (3-49)\text{식} - (3-50)\text{식} &= |C_q^-|^2 \left[ K_1(N_\alpha, N_\beta; t) - \sqrt{\frac{N_\beta + 1}{N_\alpha + 1}} K_2(N_\beta, N_\alpha; t) \right] \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-51}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{일곱번째항}) &= (\gamma_q^+)_{\alpha+1, \beta} (\gamma_q^-)_{\beta, \alpha+1} \\
 &= C_q^+ J_{N_\alpha + 1, N_\beta} (X_\alpha, -q_x, X_\alpha - r_0^2 q_y) \delta_{k_x, k_y + q_z} \\
 &\times C_q^- J_{N_\beta, N_\alpha + 1} (X_\alpha - r_0^2 q_y, q_x, X_\beta) \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K_1(N_\alpha + 1, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-52}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{여덟번째항}) &= \frac{j_{\beta-1}^+}{j_\alpha^+} (\gamma_q^+)_{\alpha+1, \beta} (\gamma_q^-)_{\beta-1, \alpha} \\
 &= \sqrt{\frac{N_\beta}{N_\alpha + 1}} C_q^+ J_{N_\alpha + 1, N_\beta} (X_\alpha, -q_x, X_\alpha - r_0^2 q_y) \delta_{k_x, k_y + q_z} \\
 &\times C_q^- J_{N_\beta - 1, N_\alpha} (X_\alpha - r_0^2 q_y, q_x, X_\beta) \delta_{k_x, k_y - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 \sqrt{\frac{N_\beta}{N_\alpha + 1}} K_2(N_\alpha, N_\beta - 1; t) \delta_{k_x, k_y - q_z}
 \end{aligned} \tag{3-53}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 (3-52)\text{식}-(3-53)\text{식} &= |C_q^-|^2 \left[ K_1(N_\alpha + 1, N_\beta; t) - \sqrt{\frac{N_\beta}{N_\alpha + 1}} K_2(N_\alpha, N_\beta - 1; t) \right] \delta_{k_x, k_x - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K'(N_\alpha, N_{\beta-1}; t) \delta_{k_x, k_x - q_z} \\
 &= |C_q^-|^2 K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_x - q_z} \tag{3-54}
 \end{aligned}$$

그러므로 (3-45)식, (3-48)식, (3-51)식, (3-54)식을 (2-7)식에 대입하여 정리 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\alpha^0(\omega) &= \sum_q |C_q^-|^2 \left[ (1+n_q^-) \left\{ \sum_{\beta \neq \alpha} \left( \omega - E_{\alpha+1}(k_{az}) - E_\beta(k_{az} + q_z) + \omega_q^- - i\eta - \Gamma_{1\alpha}^1(\omega) \right)^{-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\beta \neq \alpha+1} \left( \omega - E_\beta(k_{az} - q_z) - E_\alpha(k_{az}) + \omega_q^- - i\eta - \Gamma_{2\alpha}^1(\omega) \right)^{-1} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + n_q^+ \left\{ \sum_{\beta \neq \alpha} \left( \omega + E_{\alpha+1}(k_{az}) - E_\beta(k_{az} - q_z) - \omega_q^- - i\eta - \Gamma_{3\alpha}^1(\omega) \right)^{-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\beta \neq \alpha+1} \left( \omega + E_\beta(k_{az} + q_z) - E_\alpha(k_{az}) - \omega_q^- - i\eta - \Gamma_{4\alpha}^1(\omega) \right)^{-1} \right\} \right] \\
 &\quad \times K(N_\alpha, N_\beta; t) \tag{3-55}
 \end{aligned}$$

(3-55)식의 K 함수를 계산할때  $\gamma_q^-$ 의 행렬 요소는  $k_{\beta y} - k_{\alpha y}$ 에만 의존 하므로 분모의 에너지항

$E_{N_j, k_j} - E_{N_i, k_i}$  와 같은 항에는 무관하다. 그러므로 에너지  $E_{N,k} = (N + \frac{1}{2}) \omega + \frac{k_z^2}{2m}$  와 델타 함수

$\delta_{k_x, k_x - q_z}$  로 부터  $E_\alpha(k_{az}) = (N + \frac{1}{2}) \omega + \frac{k_{az}^2}{2m}$ ,  $E_\beta(k_{az} + q_z) = (N + \frac{1}{2}) \omega + \frac{(k_{az} + q_z)^2}{2m}$  와 같

이 계산 되어 질수있다. 또한 (2-16)식 ~ (2-19)식 까지를 역시 K 함수로 표시하면 각각

$$\hat{V}_1 = \sum_q |C_q^-|^2 (1+n_q^-) (-j_\alpha^+) K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_x - q_z} \tag{3-56}$$

$$\hat{V}_2 = \sum_q |C_q^-|^2 (1+n_q^-) (-j_\alpha^+) K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_x - q_z} \tag{3-57}$$

$$\hat{V}_3 = \sum_q |C_q^-|^2 n_q^- (-j_\alpha^+) K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_x, k_x - q_z} \tag{3-58}$$

$$\hat{V}_4 = \sum_q |C_q|^2 n_q^+ (-j_\alpha^+) K(N_\alpha, N_\beta; t) \delta_{k_\alpha, k_x - q} \quad (3-59)$$

가 되므로 (3-55)식의 분모의 고차항 효과를 포함하는  $\Gamma_\alpha^1(\omega)$ 의 꼴도 역시 K함수로  $\Gamma_\alpha^0(\omega)$ 와 유사하게 표현 되어진다. (3-55)식은 포논 산란에 대한 사이클로트론 공명선 함수인데 이것은 에너지 분포에 고차항 효과를 포함하는 점에서 resolvent superoperator 방법으로 계산한 suzuki의 결과와 유사한 꼴이다. 하지만 충돌항을 전개하는데 있어서 본 논문에서는 suzuki가 도입한 가정을 피할수 있었다. 여기서 더 이상의 고차항의 계산은 분모에 불규칙적인 양이 나타나기 때문에 수행하기가 힘들다. 만약 분모에 있는 고차항의 효과  $\Gamma_\alpha^1(\omega)$ 를 무시한다면 이는 shibata 등의 결과와, 비록 전자-불순물계에 대해서 계산되어 졌지만, 유사한 꼴이다.

#### 4. 결론

이제까지 사영연산자를 사용하여 시간 상관 함수를 연속 분수꼴로 전개하고 이를 전자-포논계에 대한 선모양 함수의 공식을 얻었다. 이 공식을 K함수로 상세히 풀어 계산하므로 수치 해석을 위한 작업이 가능한 식으로 만들었다. 이 결과를 앞으로 음향 변형 퍼텐셜과 압전 그리고 광학 포논 산란 등에 적용하여 자기장, 온도 그리고 자유운반자 농도의 함수로서 선폭을 구하고 기존의 이론 및 최근의 실험결과와 비교하는 것이 앞으로의 과제이다.

## 참고문헌

1. E.E.H. Shin, P.N. Argyres, and B.Lax, Phys.Rev.B7, 3572(1973)
2. X.Wu and F.M. Peeters, Phys. Rev.B, 41, 3109(1990)
3. B.Tanatar and M.Singh, Phys.Rev.B, 43, 6612(1991)
4. J.Y.Ryu, S.N.Yi and S.D.Choi, J.Phys. C 2, 3515(1990)
5. S.N.Yi, J.J.Song and S.D.Choi, J.Korean phys.Soc,22,289(1993)
6. R.J.Nicholas, M.A. Hopkins, D.J.Barnes and M.A. Brummell, Phy.Rev.B, 39, 10955(1989)
7. V.K.Arora and H.N.Spector, phys. stat. sol (b), 94, 701(1979)
8. A. Suzuki, Phys. Rev. B 33, 1047(1986)
9. J.Von Royen, J.De Sitter, and J.T.Devreese, Phys. Rev. B 30, 7154(1984)
10. F.Shibata and H.Ezaki, Physica 149A, 472(1988)
11. H. Kobori, T. Ohyama and E.Otsuka, J.phys. Soc Japan 59, 2141(1990) ;  
ibid 59, 2164(1990)
12. S.Fujita and A. Loddor, Physica 83B, 117(1976)
13. R.kubo, J.phys. Soc. Japan, 12, 570(1957)
14. H. Mori, Prog. Theor. Phys, 34, 399(1965)
15. S.N.Yi, J.Y.Ryu and S.D.Choi, Progr. Theor. phys, 82, 299(1989)
16. J.J.Song, S.N.Yi, and S.D.Choi, J.Math, Phys. 33, 336(1992)
17. 이삼녕, 교양논총(한국해양대학교 교양과정부논문집) 창간호, 143(1993)
18. S.N.Yi, J.J.Song, Y.J.Lee, C.H. Choi and S.D.Choi(physica, submitted for  
publication)