

# 低 Reynolds數에 있어서의 圓筒주위의 흐름에 관한 研究

李 殷 先

A Study on the Flow around the Circular Cylinder  
at Low Reynolds Number

*Eun-seon Lee*



## 目 次

- Abstract
- Nomenclature
- 1. 序 論
- 2. 理論展開
  - 1) 運動方程式과 境界條件
  - 2) 差分方程式
- 3. 數值計算
- 4. 實驗裝置
- 5. 實驗方法
- 6. 實驗 및 數值計算 結果
  - 1) Twin Vortices 가 發生하는 臨界 Reynolds 數
  - 2) Twin Vortices 의 變化
  - 3) Separation 角의 變化
- 7. 結 論
- 參考文獻
- 附 錄

## A Study on the Flow around the Circular Cylinder at Low Reynolds Number

*Eun-Seon Lee*

Department of Marine Engineering, graduate school, Korea Maritime Univ.

### Abstract

As a circular cylinder has comparative simple shape and becomes a good model problem for flows around other bodies of practical importance, the problem of two-dimensional viscous flow around the circular cylinder has been investigated, both theoretically and experimentally. But not a few problems are left unsolved.

It is well known that the calculations are successfully made with the approximations of Stokes or Ossen for very small Reynolds numbers, but as Reynolds number is increased, Ossen's as well as Stokes's approximations become more and more remote from the exact solution of the Navier-Stokes equations.

Therefore, in this paper, the present author transforms the Navier-Stokes equations into the finite difference equations in the steady two-dimensional viscous flow at Reynolds number up to 45, and then solves the solution of the Navier-Stokes equations numerically. Also, the author examines the accuracy of the solution by means of flow visualization with aluminum powder.

The main results are as follows;

- (1) The critical Reynolds number at which twin vortices begin to form in the rear of the circular cylinder is determined experimentally 6, and numerically 4.
- (2) As Reynolds number is increased, it is proved that the ratio of the length of the twin vortices to the diameter is grown almost linearly, both experimentally and numerically.
- (3) Separation angle is also increased according to Reynolds number. But it is found that it would converge into 101.3 degree, both experimentally and numerically.

## Nomenclature

$C_D$	Drag coefficient
$d$	Diameter of a circular cylinder
$D$	Width of the Open Channel
$f$	Any function of a point
$f_o$	Value at the point O in X-Y coordinates
$f_M$	Average value of four neighbouring points in X-Y coordinates
$h$	The height of a circular cylinder
$n$	Distance between grid points
$P$	Static pressure
$Re$	Reynolds number
$s$	The length of the twin vortices
$U$	Uniform velocity
$\vec{V}$	Velocity vector
$x, y$	Rectangular coordinates of the physical plane
$r, \theta$	Polar coordinates of the physical plane
$X, Y$	Transformed rectangular coordinates
$\alpha$	Separation angle
$\rho$	Density
$\nu$	Kinematic viscosity
$\psi$	Stream function
$\psi$	Disturbance stream function
$\xi$	Vorticity

## 1. 序 論

圓筒(Circular Cylinder)은 比較的 모양이 간단하고 여러가지 複雜한 흐름에 대한 基礎가 되므로 圓筒 周邊의 粘性 2次元 흐름에 대한 理論的, 實驗的 研究가 많이 이루어져 왔다.

實驗에 의한 研究方法으로는 Laser Doppler法 및 熱線風速計를 이용한 速度測定, 흐름의 可視化法등이 있다. 흐름의 狀態를 자세히 觀察할 수 있는 方法으로 흐름의 可視化法이 가장 널리 利用되며, 흐름의 可視化法의 技術的인 方法은 最近 Asanuma 등에 의하여 자세하게 정리되어 있다.<sup>1,2)</sup>

그러나 Reynolds 數가 작은 範圍( $Re \leq 45$ )에서는 速度計測, 定常흐름을 얻기위한 實驗裝置의 補完 등 實驗的으로 많은 어려움이 뒤따르므로 理論的 研究가 重要視 된다.

理論的 研究로는 解析의 方法, 準解析의 方法, 그리고 數值的 方法등이 있으나 粘性 흐름의 運動을 表示하는 Navier-Stokes 方程式의 非線形 加速度 項으로 인해 解析的으로 解를 구하기란 극히 힘들거나 解를 구할 수 없다.

準解析的 方法으로 Stokes는 Navier-Stokes 方程式의 非線形 加速度 項을 完全히 無視하고 no slip condition을 滿足하도록 한 解를 구하고,<sup>3,4)</sup> Tomotica 등은 非線形 加速度 項을 物體에서 멀리 떨어진 곳에서 成立하는 線形化된 모양으로 代置한 Ossen의 方程式의 解를 구했다.<sup>5)</sup> 그러나 이들에 의한 解는 Reynolds 數가 增加함에 따라 실제 흐름과 달라진다.

Reynolds 數가 45 이상이면 圓筒 뒷쪽의 흐름은 不安定하게 되고, Kármán 渦列이 發生한다. 따라서 Reynolds 數가 45 以下인 範圍에서 定常흐름의 解가 存在할 것으로 豫測된다.

本 論文에서는 圓筒 周邊의 粘性 2次元 定常흐름에 있어서 Reynolds 數가 45 以下인 흐름에 대하여 Navier-Stokes 方程式을 差分方程式으로 變換하여 數值的으로 解를 구하고, 이 흐름을 可視化하여 解의 正確性을 檢討하였다.

## 2. 理論 展開

### 1) 運動方程式과 境界條件

粘性 2次元 定常 흐름에 대한 Navier-Stokes 의 運動方程式은

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

로 표시된다. 여기서  $\vec{V}$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $P$ 는 각각 速度 Vector, 流體의 密度, 動粘性 係數, 靜壓이며,  $\nabla^2$ 은 Laplacian 演算子이다.

圓筒의 반지름이 1, x 軸 方向으로의 速度가 1인 경우의 Reynolds 數 ( $Re = U d / \nu$ , 단  $U$ 는 無限 限速 速度,  $d$ 는 圓筒의 直徑)는  $2/\nu$ 가 되며, 식 (1)을 無次元化하여 Stream function  $\psi$  와 Vorticity  $\zeta$  로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} + \frac{2}{Re} \nabla^2 \zeta = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\zeta = -\nabla^2 \psi \quad (3)$$

이다.

數值計算을 便利하게 하기 위하여  $\psi$ 를

$$\psi = y + \phi \quad (4)$$

로 표시하고, 식 (2), (3)에 대입하여 정리하면 각각 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial(\phi, \zeta)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{2}{Re} \nabla^2 \zeta = 0 \quad (5)$$

$$\zeta = -\nabla^2 \phi \quad (6)$$

極座標系에 대한 境界條件은 다음과 같이 된다.

$$r = 1 \text{ 일 때, } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\sin \theta \quad (7)$$

$$r = \infty \text{ 일 때, } \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

한편

$$X = \frac{1}{r}, \quad Y = \frac{2}{\pi} \theta \quad (9)$$

로 놓으면,  $(1 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi)$ 는  $(0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 2)$ 로 變換된다(Fig. 1).

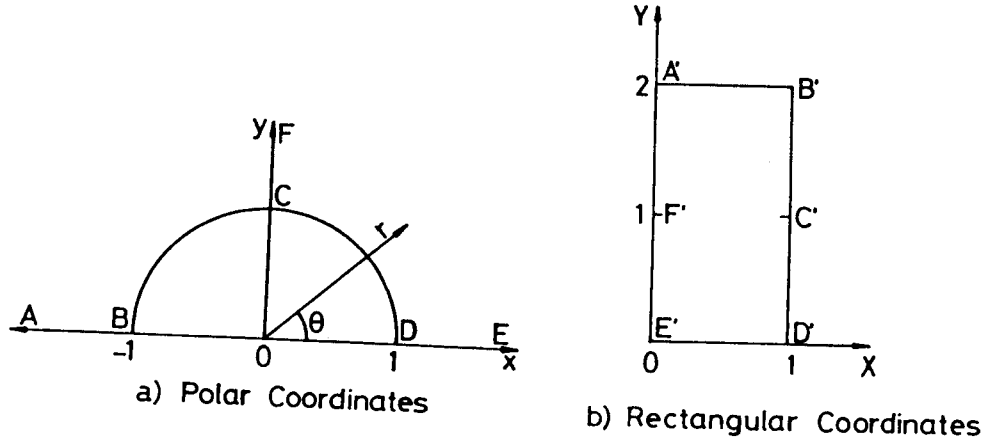


Fig.1 Transformation of Coordinates

이 때 식 (5), 식 (6)은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2X^3}{\pi} \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(X, Y)} + X^2 \frac{\partial \zeta}{\partial X} \cos \frac{\pi Y}{2} + \frac{2X}{\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial Y} \sin \frac{\pi Y}{2} \\
 & + \frac{2}{\text{Re}} \left\{ X^4 \nabla^2 \zeta - \left( X^4 - \frac{4X^2}{\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial Y^2} + X^3 \frac{\partial \zeta}{\partial X} \right\} = 0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\zeta = -X^4 \nabla^2 \psi + \left( X^4 - \frac{4X^2}{\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - X^3 \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (11)$$

2) 差分方程式

Fig. 1(b)에 표시된 X-Y 공간을 일정한 간격을 가진 여러 點으로 나누어 한 點과 그 이웃하는 點들과의 關係式을 얻을 수 있다.

여기서 이 點들을 세 種類로 分類하면 다음과 같다.

- (1) 通常點 (Ordinary Points)
- (2) 表面點 (Surface Points)
- (3) 無限遠點 (Infinity Points)

表面點과 無限遠點의 函數값은 境界條件의 식 (7), (8)에 의해 결정되며 通常點의 函數값은 식 (10), (11)에 의해 결정된다.

- (1) 通常點 (Fig. 2)

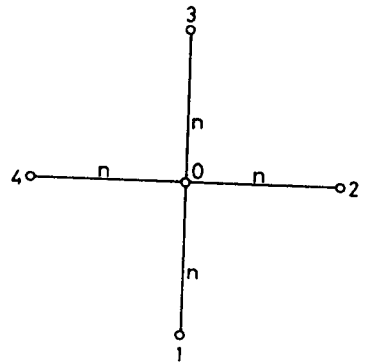


Fig.2 Ordinary Points

어떤 函數  $f$  를 0 점 주위의 1, 2, 3, 4 점에 대해 각각 Taylor 展開하여  $O(n^4)$  以上の 項을 無視하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$f_0 = f_M - (n^4/4) \nabla^2 f \tag{12}$$

여기서  $f_0$  는 0 점의 函數값,  $f_M$  은 1, 2, 3, 4 점의 函數값의 平均,  $n$  은 점들간의 거리이다.

식 (12)를 이용하여 식 (10), (11)을 差分式으로 變換하면 각각 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2 X^2}\right) \psi_0 &= \psi_M + \frac{n^2}{4X^2} \zeta_0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2 X^2}\right) (\psi_1 + \psi_3) \\ &+ \frac{n}{8X} (\psi_2 - \psi_4) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2 X^2}\right) \zeta_0 &= \zeta_M - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2 X^2}\right) (\zeta_1 + \zeta_3) + \frac{n}{8X} (\zeta_2 - \zeta_4) \\ &+ \frac{Re}{16nX} \{(\psi_2 - \psi_4)(\zeta_1 - \zeta_3) - (\psi_1 - \psi_3)(\zeta_2 - \zeta_4)\} \\ &+ \frac{Re n}{16X^2} (\zeta_2 - \zeta_4) \cos \frac{\pi Y}{2} - \frac{Re n}{8\pi X^2} (\zeta_1 - \zeta_3) \sin \frac{\pi Y}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

(2) 表面點

圓筒 表面의 點들에 대한  $\psi$ ,  $\zeta$  값은 境界條件의 식 (7), (8)을 이용한다. 즉,  $X=1$  에서

$$\psi = -\sin \frac{\pi Y}{2} \tag{15}$$

$$\zeta = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \tag{16}$$

이다. 여기서  $X=1$  에서의  $\partial^2 \psi / \partial Y^2$ ,  $\partial \psi / \partial X$  는 쉽게 구할 수 있다. 즉, 식 (15)에서

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}\right)_{X=1} = \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi Y}{2} \tag{17}$$

이고, 식 (8)에서

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)_{X=1} = \sin \frac{\pi Y}{2} \tag{18}$$

이다. 또  $\partial^2 \psi / \partial X^2$  은 다음과 같은 方法으로 計算될 수 있다.

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}\right)_{X=1} = \lim_{X \rightarrow 1} \left\{ \frac{2(\psi - \psi_{X=1})}{(X-1)^2} + \frac{2}{1-X} \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)_{X=1} \right\} \tag{19}$$

여기서 近似的으로  $X=0.9$  를 잡으면, 식 (19)는 다음과 같이 된다.

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}\right)_{X=1} = 200\psi_{X=0.9} + 220 \sin \frac{\pi Y}{2} \tag{20}$$

식 (17), (18), (20)을 식 (16)에 대입하여 정리하면,  $X=1$  에서의  $\zeta$  는

$$\zeta_{x=1} = -200\phi_{x=0.9} - 222 \sin \frac{\pi Y}{2} \quad (21)$$

가 된다.

(3) 無限遠點

無限遠點에서의 境界條件의 식 (8)을 滿足하는 Imai의 식<sup>6)</sup>을 이용하면 無限遠點에서는

$$\phi = -\frac{C_D}{2} \left(1 - \frac{Y}{2}\right) \quad (22)$$

이다. 여기서  $C_D$ 는 抗力係數이다.

無限遠點에서  $\zeta$ 는 당연히 다음과 같이 된다.

$$\zeta = 0 \quad (23)$$

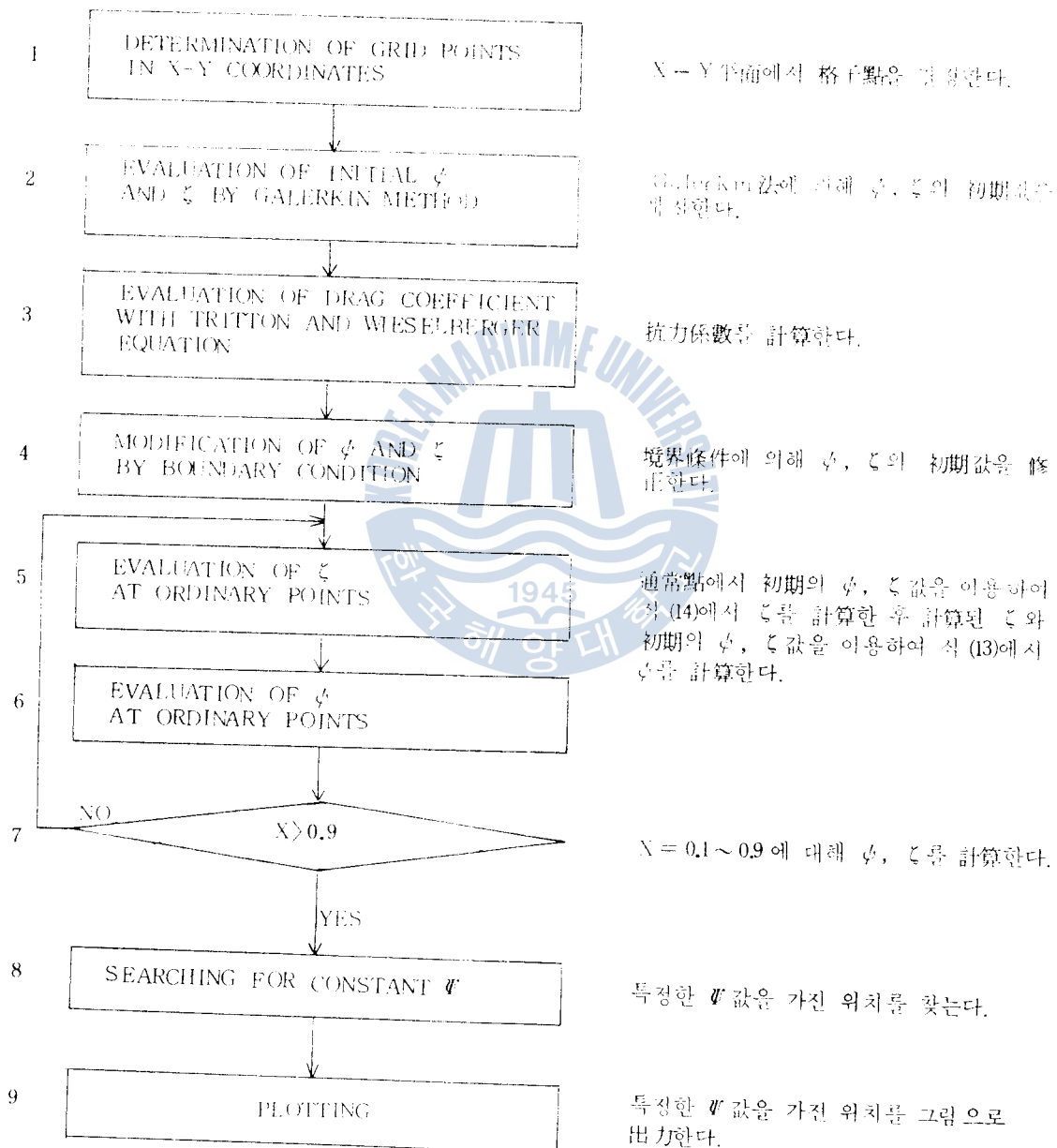
식(22), (23)은 물론 境界條件의 식 (7), (8)을 滿足한다.





### 3. 數 值 計 算

數值計算의 節次를 표시하면 다음과 같다.



本論文에서는 Galerkin法에 의해  $\psi$ ,  $\zeta$  값을 近似的으로 計算하였으며,<sup>7)</sup> 그에 대한 식은 다음과 같다(附錄參照).

$$\begin{aligned} \psi = & \left( \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^3} + \frac{A_3}{r^5} + \frac{A_4}{r^7} \right) \sin \theta \\ & + \left( B_1 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^4} + \frac{B_4}{r^6} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (24)$$

$$\zeta = \left( \frac{A_5}{r^5} + \frac{A_6}{r^7} + \frac{A_7}{r^9} \right) \sin \theta + \left( \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_6}{r^6} + \frac{B_7}{r^8} \right) \sin 2\theta \quad (25)$$

여기서  $A_1, B_1$  은 다음 식을 만족하는 값이며, Newton-Raphson法에 의해 구한다.

$$\frac{9.7893}{\text{Re}} A_1 - 0.0415 B_1 - 0.0275 A_1 B_1 + \frac{26.5974}{\text{Re}} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{6.4647}{\text{Re}} B_1 + 0.0171 A_1^2 + 0.1482 A_1 + 0.3746 = 0 \quad (27)$$

또,

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{22}{9} A_1 - 4, & B_2 &= -\frac{7}{3} B_1 \\ A_3 &= \frac{17}{9} A_1 + 4, & B_3 &= \frac{5}{3} B_1 \\ A_4 &= -\frac{4}{9} A_1 - 1, & B_4 &= -\frac{1}{3} B_1 \\ A_5 &= -8 A_2, & B_5 &= 4 B_1 \\ A_6 &= -24 A_3, & B_6 &= -12 B_3 \\ A_7 &= -48 A_4, & B_7 &= -32 B_4 \end{aligned}$$

위의 과정 3에서 식 (22)를 計算하기 위한 抗力係數  $C_D$  는 Tritton과 Wieselberger<sup>8)</sup>의 식인 다음의 식을 사용하였다.

$$C_D = 1 + 10 \text{Re}^{-\frac{2}{3}} \quad (28)$$

또한 과정 5, 6은  $X = 0.1 \sim 0.9$ 에 대하여 反覆 수행되며,  $\psi$ 와  $\zeta$  값이 安定될 때까지 反覆한다. 本論文에서는  $\text{Re} \leq 10$ 에 대해 30회,  $10 \leq \text{Re} \leq 30$ 에 대해 50회,  $30 < \text{Re} \leq 45$ 에 대해 70회 수행하여 가장 적당한  $\psi$ ,  $\zeta$  값을 選擇하였다.

### 4. 實 驗 裝 置

物體 周邊의 流體 흐름을 研究하기 위한 實驗方法은 두 種類로 大別된다. 즉, 停止한 流體內에서 物體를 움직이는 方法과 物體를 고정하고 流體를 흘러 보내는 方法이다. 前者의 경우는 流體內에서 物體를 갑자기 움직일 경우 流體의 混亂과 순간 加速度가 發生하고, 等速運動을 얻기까지의 加速區間과 等速運動에서 停止할 때까지의 減速區間이 必要하므로 實驗裝置가 커져야 한다. 또한 物體運動裝置의 上下左右 및 前後의 搖動을 방지하기 위한 精密한 기계적 補完이 必要하다. 따라서 本 實驗에서는 物體를 固定하고 流體를 흘러보내는 後者의 方法을 採用하였다.

Photo.1은 本 實驗에 使用하기 위하여 製作한 回流水槽이며, Fig. 3은 回流水槽의 략도이다. 回流水槽는 10 mm 두께의 투명 아크릴로 제작하였고 Fig. 3에서 A는 供給側區域, B는 出口側區域이며, C는 開水路이다.

使用流體인 물은 펌프 P를 통해서 供給側區域A에 供給되며, A<sub>1</sub> 부분에 물이 다 차면 A<sub>2</sub>로 넘쳐 흐르고 下部通路를 통해서 A<sub>3</sub>를 지나 開水路C에 흐르게 된다. 開水路의 水深은 水門 D를 上下로 움직여 조절되며, 물의 速度는 供給 밸브 V<sub>1</sub> 과 by-pass 밸브 V<sub>2</sub> 에 의해 조절된다.

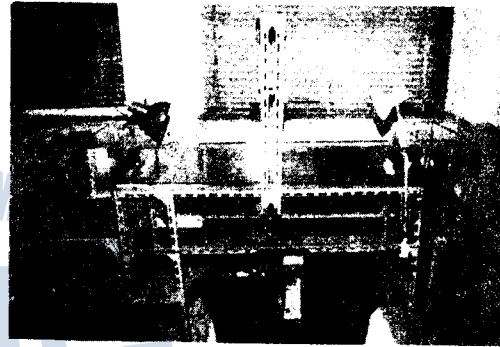


Photo.1 Circulating Water Channel

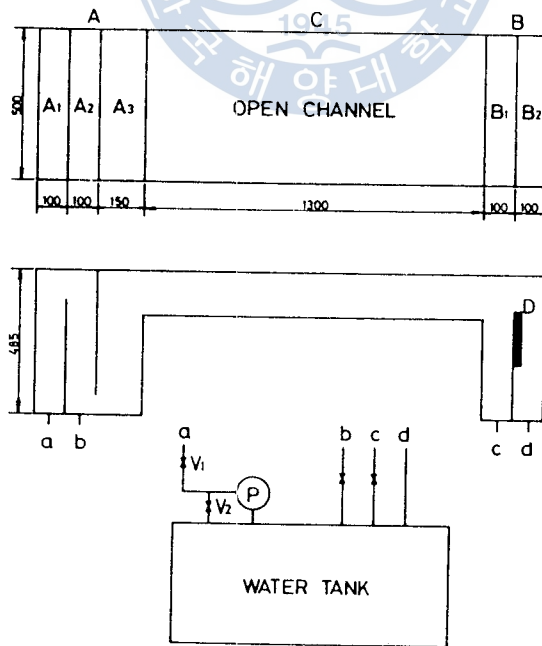


Fig.3 Schematic Diagram of Experimental Equipment

펌프側 P에서 A<sub>1</sub> 區域으로 流體가 流入될 때 斷面積의 急變으로 生기는 水의 亂動을 없앨 目的으로 A<sub>1</sub> 區域의 底部에 스폰지를 깔았고, 그위에 지름 약 1 cm의 유리 구슬을 높이 20 cm가량 채워 물을 通過 시켰다. 또한 A<sub>1</sub>에서 A<sub>2</sub>로 落下하는 流體의 落下로 인한 混亂을 방지할 目的으로 A<sub>2</sub> 區域에도 스폰지를 넣었다. A<sub>3</sub> 區域에는 圓滑한 流體의 上昇을 위해 案内板인 1 mm의 얇은 아크릴 판을 彎曲하여 설치하였고, 開水路에의 흐름을 均一하게 하고 渦動을 막기 위하여 開水路의 上流 쪽에는 200 mesh의 鐵網을 설치하였다(Fig.3.1). 出口側에도 流體의 落下로 인한 攪亂과 流出聲音을 막기 위해 B<sub>2</sub> 部分의 底部에 5 cm 높이의 유리 구슬을 채우고, 그 위에 스폰지를 깔아 가능한 限 安定된 흐름이 되도록 努力하였다.

壁面의 影響은 開水路 平行壁의 거리가 物體 직경의 50 배 이상이면 무시될 수 있다.<sup>9)</sup> 따라서 開水路의 幅은 本 實驗에서 使用되는 가장 큰 物體 직경의 50 배가 넘도록 製作하였다.

可視化를 위한 撮影에 使用된 카메라는 Nikon이며, Microlens를 부착 하였다. Photo.1에서 보는 바와같이 카메라 설치대를 物體의 垂直上部에 設置하여, 여기에 카메라를 固定하였고, 필름은 ASA 125를 使用하였다.

開水路의 밑바닥에는 1 cm × 1 cm의 모눈금을 螢光物質로 새긴 Scaling Plate를 만들어 설치하였고, 物體의 크기와 Wake의 크기등을 相對的으로 評價할 수 있도록 하였다.

實驗에 使用되는 圓筒 모델은 黃銅으로 製作하였으며 Table1. 과 같다.

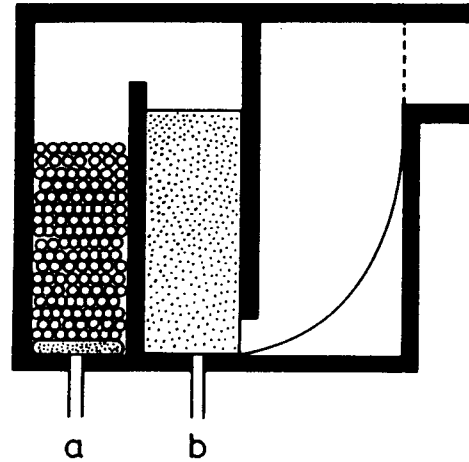


Fig.3.1 Details of .A Part

Table1. Specification of Models

d(mm)	h(mm)	D/d	Material
9.8	35	50	Bronze
9	35	55.6	"
7.9	35	63	"
6	35	83	"
5	35	100	"

## 5. 實 驗 方 法

序論에서 記述한 바와같이 흐름의 可視化法은 흐름의 狀態를 자세히 나타낼 수 있으므로 1차로 사용되는 實驗方法이다. 흐름의 可視化法에는 表面塗布法, Tuft 法, 直接注入法, 化學法, 電氣制御法 등이 있다.<sup>1)</sup>

本 實驗에서는 直接注入法 中에서 알루미눔 粉末을 撒布하는 方法을 擇하였다. 粒子가 매우 微細하면 粒子 自體에 의한 흐름의 攪亂을 無視할 수 있고, 粒子 自體의 運動은 粒子 自體의 慣性力로 起見할 수 있으며, 粒子가 떠 있는 位置에서의 流體의 運動과 같아지기 때문에 流體 運動을 잘 나타내다고 볼 수 있다. 그러나 알루미눔 粉末을 뿌릴 때 擴散作用이 생기서 흐름에 어떤 影響을 미치는 경우도 있다. 따라서 흐름의 上流側(物體의 앞 40 cm 前方)에서 200 mesh 의 鐵網을 使用하여, 알루미눔 粉末을 계속적으로 뿌려서 擴散의 影響이 없어진 후에 物體 周邊을 지나도록 하였다.

알루미눔 粉末을 밝은 照明을 받을수록 빛의 反射가 좋아서 鮮명한 사진을 얻을 수 있으나 顯像의 熱에 의해 흐름의 影響을 만으므로 30W 以下의 電燈(2 개를 Photo. 1에 보일 바와같이 物體의 兩側에 설치하여 物體 周邊에서 흐름차가 나타나지 않도록 하였다.

實驗의 때에 가장 중요한 것은 開水路의 觀察部에서 均一한 速度分布의 定常 흐름을 얻는 것하고 흐름의 速度를 正確하게 計測하는 것이다.  $1 \text{ cm} < \text{sec}$  이하의 微速의 要될 때는 本 實驗에서는 速度計測이 어려웠으며, 다음과 같은 流速에의 影響에 留意하며 實驗을 實施하였다.

- (1) 觀察時 사람의 接近移動에 의한 影響
- (2) 알루미눔 粉末을 뿌릴 때 擴散에 의한 影響
- (3) 照明燈의 熱에 의한 影響
- (4) 電燈의 驅動振動에 의한 影響
- (5) 實驗裝置 周邊의 空氣流動에 의한 影響
- (6) 外部騒音에 의한 影響

流體의 運動速度는 物體를 넘지 않은 狀態에서 水面에 알루미눔 粉末을 뿌려 흘러간 시간과 거리를 測定하여 구하고, 이것을 確認하기 위하여 B-Shutter 를 이용하여 노출시간 동안에 移動한 알루미눔 粉末의 流跡線의 길이를 撮影해서 그 速度를 計測하였다.

Photo. 2는 흐름이 均一한가를 確認하고 흐름의 速度를 計測하기 위하여 撮影한 眞은 사진중의 하나이다. 이 사진에서 볼 수 있는 바와같이 알루미눔 粉末의 流跡線은 바닥에 깔린 Scaling Plate 의 線과 平行하고 그 길이를 대체로 均一하다. 흐름의 均一함을 알 수 있다.

Fig. 4는 이들 사진을 통해 얻어진 開水路 觀察部에서의 無次元 速度 分布圖이다.

圓筒 모양을 물 속에 고정시키면, 表面張力에 의해 모뎀 周邊의 水面은 흐르는 水面과 水平面을 이루지 못하므로 이것을 除去하기 위해 모뎀 表面에 파라핀을 얇게 발라 使用하였다.

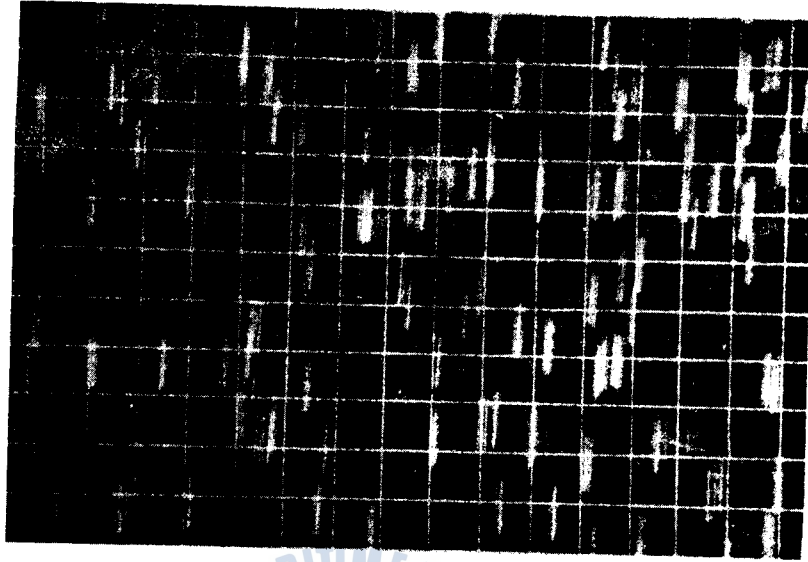


Photo.2 Photograph showing Velocity Distribution  
0.42 cm/sec F8-3S

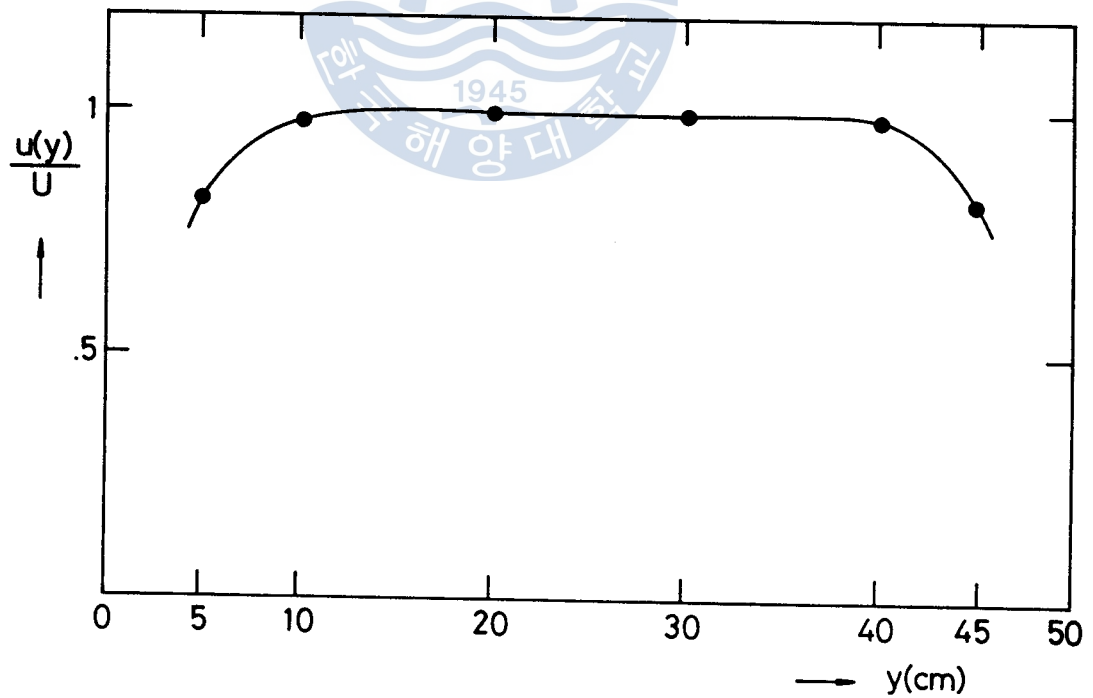


Fig.4 Dimensionless Velocity Distribution

### 6. 實驗 및 數值計算 結果

1) 低 Reynolds 數에 있어서의 圓筒 뒤의 흐름에 관한 研究는, 流體力學의 重要한 部分인 流體의 運動에 對한 數值計算의 結果를 示한 圖 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000.

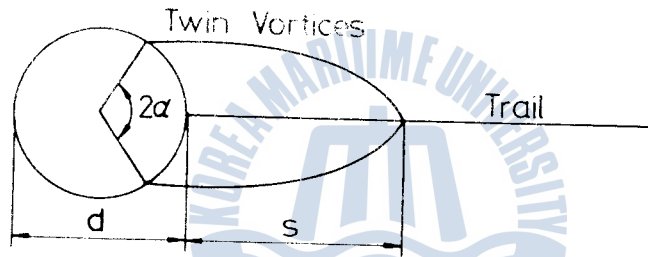


Fig.5 Structure of the Twin Vortices

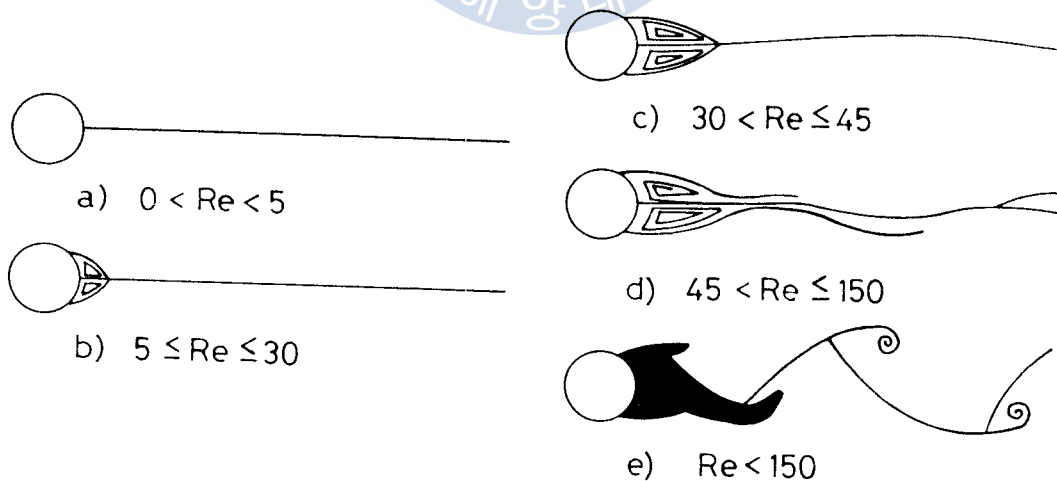


Fig.6 Process of the Development of the Wake behind a Circular Cylinder

### 1) Twin Vortices 가 發生하는 臨界 Reynolds 數

Twin Vortices 가 形成되기 이전의 圓筒 주위의 流體 粒子는 圓筒의 曲面을 따라 圓筒前後에서 對稱性을 이루며 이동한다. 그러나 Twin Vortices 가 發生한 직후부터 圓筒前後의 흐름은 對稱性을 상실한다.

물을 作動流體로 使用하였을 경우, 물의 粘性係數가 작기 때문에 Twin Vortices 가 形成되는 臨界 Reynolds 數를 찾기 위해 매우 微速이 요구되었다.

Twin Vortices 가 發生하는 臨界 Reynolds 數에 대하여, Taneda<sup>9)</sup>는 實驗을 통해서 약 5, Tomotica and Aoi<sup>5)</sup>는 數值計算으로 3.02임을 밝혀 내었다. 本 實驗에서는 약 6에서 Twin Vortices 가 發生하였으며, 數值的 計算으로는  $Re \leq 6$ 에서 集中的인 計算을 하여  $Re = 4$ 에서 發生함을 밝혀내었다 (Table 2.).

Fig. 7은 Twin Vortices가 發生하는 臨界 Reynolds 數에 대한 數值的 計算結果의 流線의 모양이다.

Table 2. Critical Reynolds Numbers Forming Twin Vortices

Numerical Value	4
Experimental Value	6
Tomotica and Aoi	3.02
Taneda	5

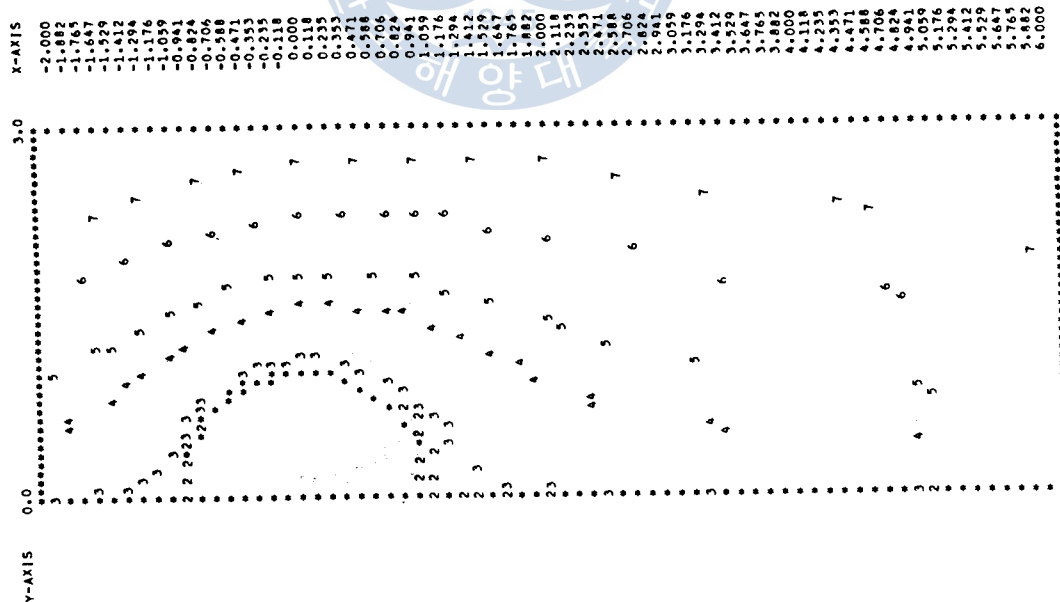


Fig.7 Calculated Streamline at  $Re = 4$



2) Twin Vortices 의 變化

Twin Vortices 가 發生한 후 Reynolds 數가 增加함에 따라 eddy 의 크기는 점점 커지는 것으로 나타났다. Fig. 8은 實驗, 數值計算 및 Taneda의 實驗結果를 보인 것으로 Reynolds 數에 따라  $s/d$ 가 線形的으로 增加하며 數值計算이 實驗結果와 잘 一致함을 알 수 있다.

Fig. 9는 Fornberg<sup>10)</sup>, Takami and Keller<sup>11)</sup>, Dennis and Chang<sup>12)</sup>, Nieuwstadt and Keller<sup>13)</sup>의 數值計算 結果와 本 論文의 數值計算 結果를 比較한 것이다. Twin Vortices 의 크기는 實驗에서와 같이 線形的으로 增加함을 알 수 있으며, 本 論文의 數值計算結果와도 잘 一致한다. 이와 같이 Reynolds 數가 增加함에 따라 Twin Vortices 의 크기가 커지는 것은 粘性力에 대한 慣性力이 커지기 때문으로 생각된다.

Photo.3은 實驗을 통해 얻은 많은 사진중의 일부이며, Fig.10은 數值計算에서 구한 流線의 모양이다.

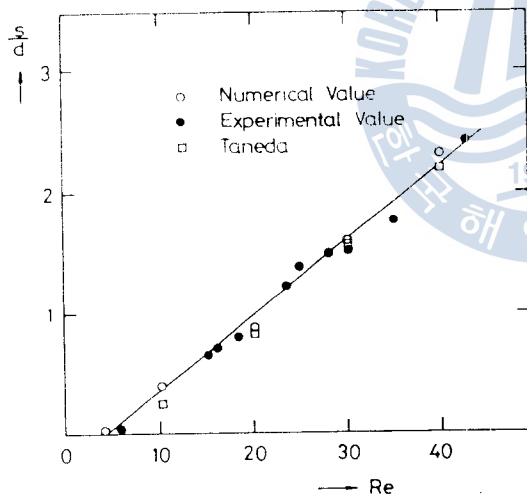


Fig 8 Comparison of Experimental with Numerical Solution in the Length of the Twin Vortices

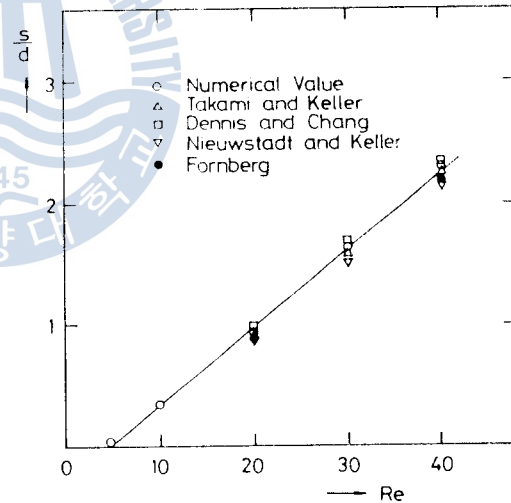


Fig.9 Comparison of present Numerical Solution with other Numerical Solutions

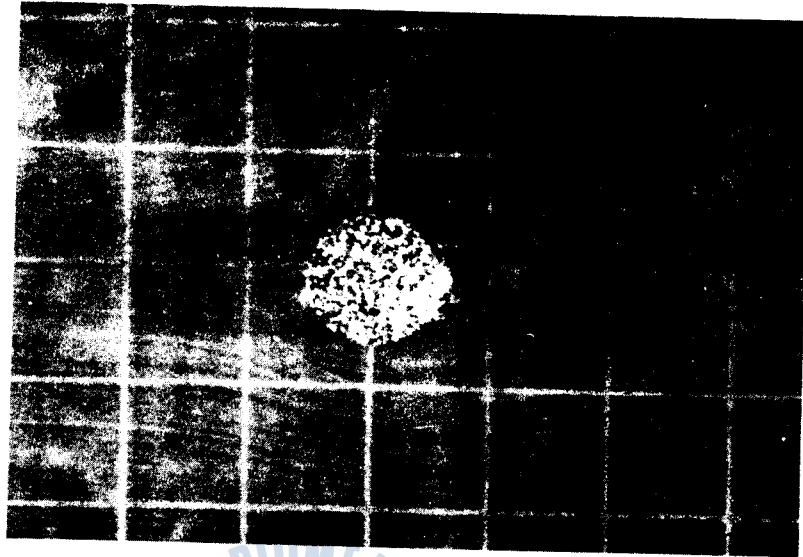


Photo.3(a) Photograph at  $Re = 16$   
F22 - 14S

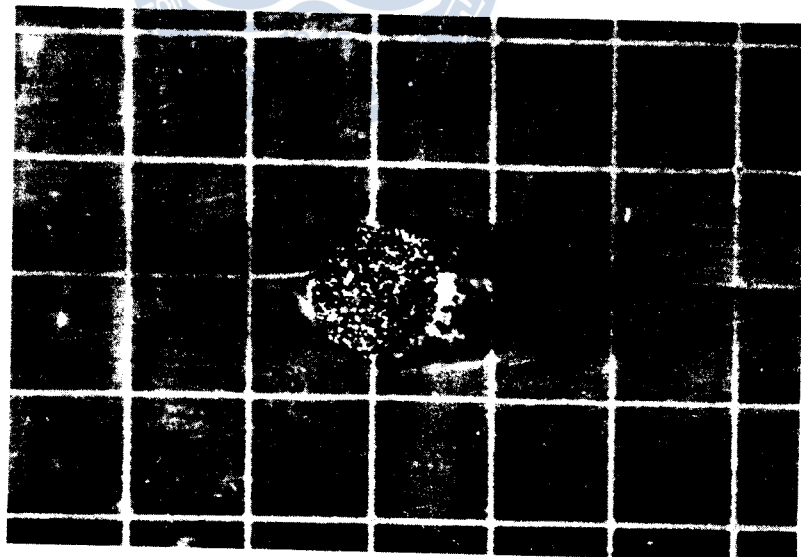


Photo.3(b) Photograph at  $Re = 25$   
F22 - 14S

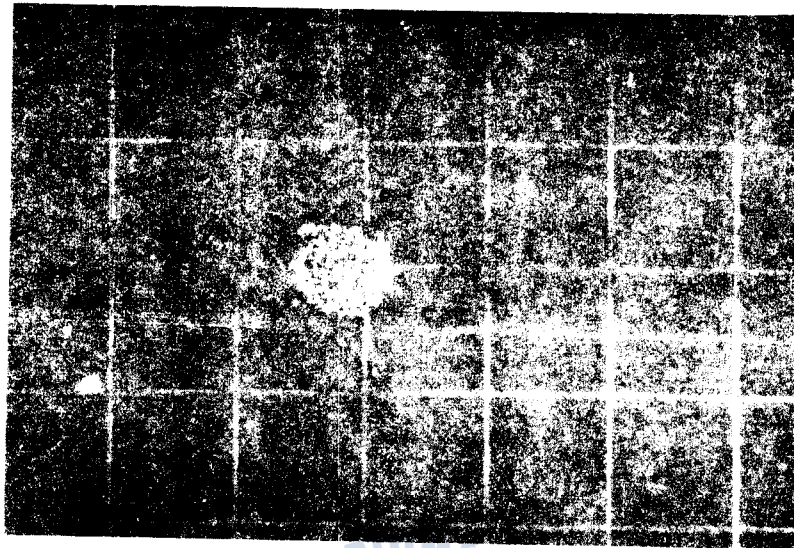


Photo. 3(c) Photograph at  $Re = 30$   
F32 - 18S

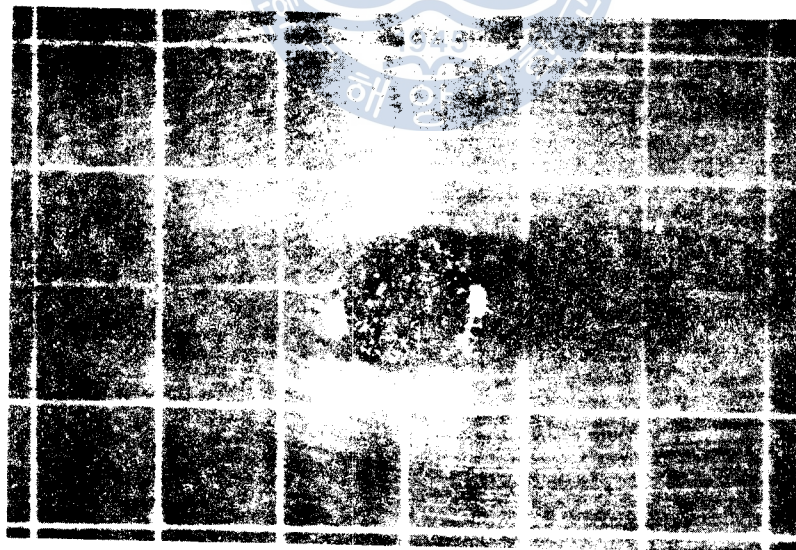


Photo. 3(d) Photograph at  $Re = 35$   
F22 - 14S

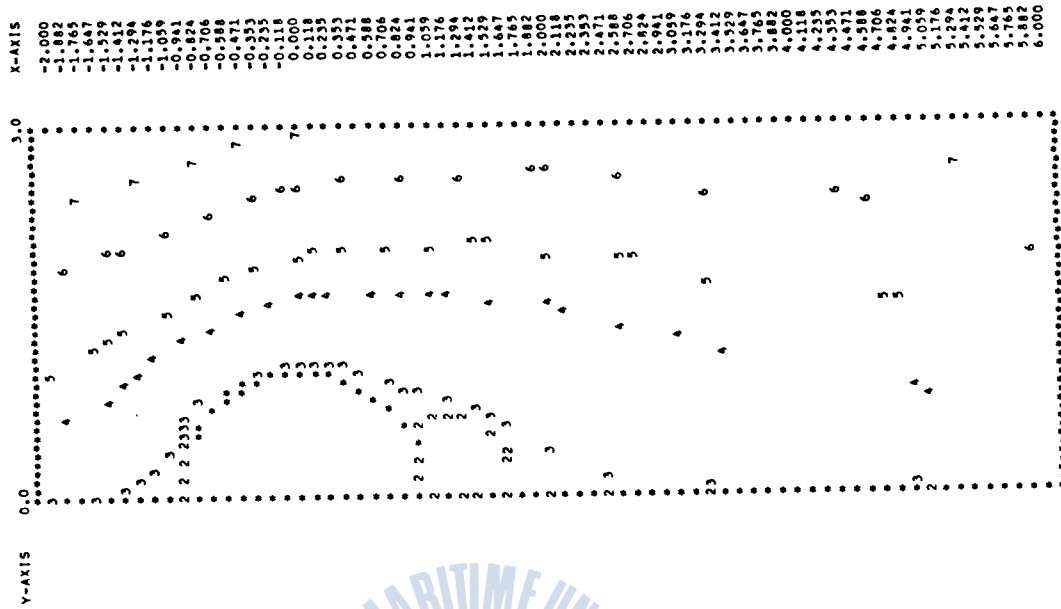


Fig.10(a) Calculated Streamline at  $Re=10$

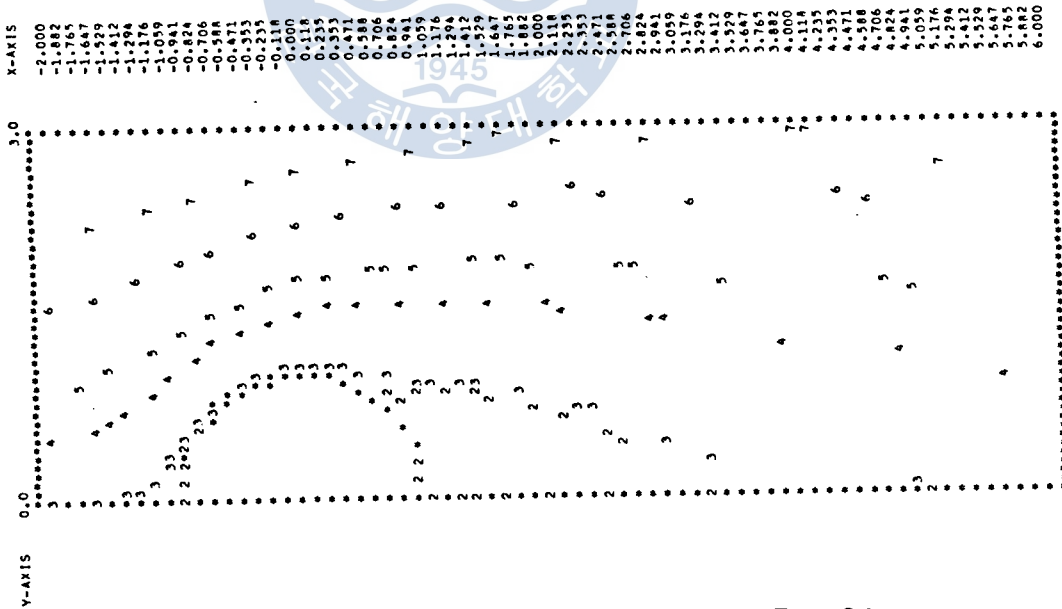


Fig.10(b) Calculated Streamline at  $Re=20$

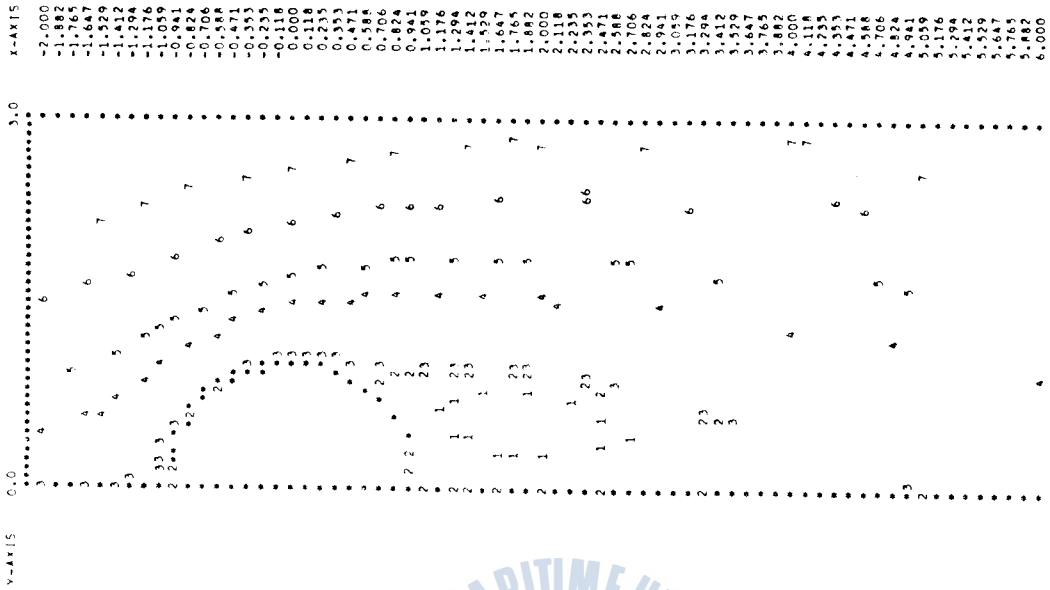


Fig.10(c) Calculated Streamline at Re=30

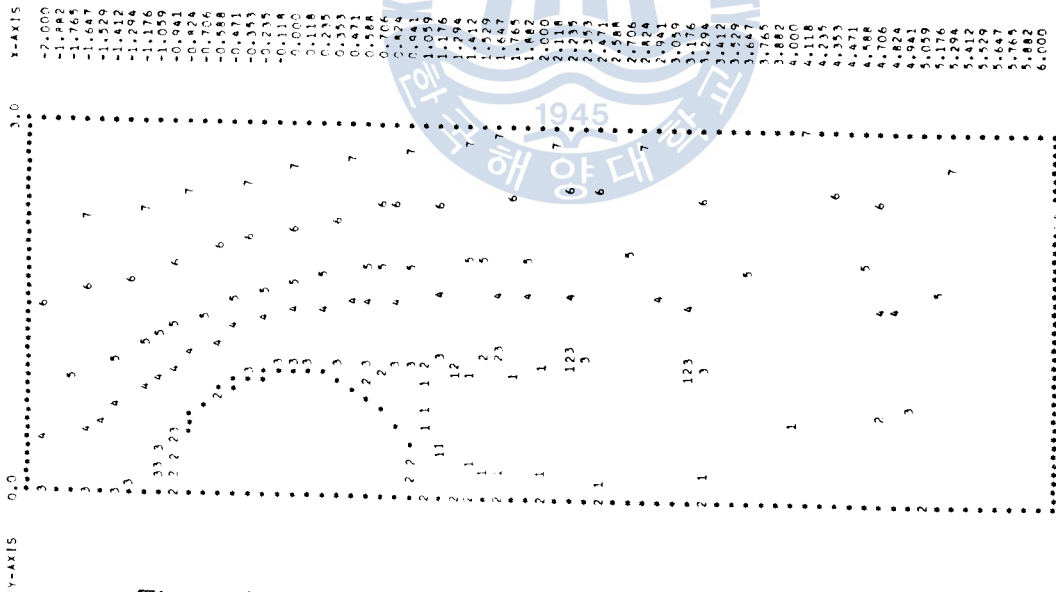


Fig.10(d) Calculated Streamline at Re=40

### 3) Separation 角의 變化

흐름의 方向으로 壓力의 上昇이 있는 경우에 壁面을 따라 흐르는 流體粒子는 粘性作用으로 인해 前進이 방해되고 壓力 上昇을 克服하면서 흘러가야 한다. 어떤 위치까지는 流體 粒子는 壓力의 降下 領域에서 蓄積한 運動에너지로 前進을 계속한다. 그러나 運動에너지는 流體의 粘性으로 인한 摩擦 때문에 消耗되고 前進速度가 점차 減少하여 결국 粒子는 停止하고 停止한 流體粒子는 壓力이 낮은 쪽으로 흐르게 되므로 결국 壁面에서 離脫하는 Separation 현상이 일어난다.

알루미늄 粉末을 撒布하여 흐름을 可視化 하였을 때 Separation 角을 明確히 計測할 수 없는 단점이 있다. 따라서 Fig. 11 에서 보인 Separation 角에 대한 實驗結果는 사진에서 近似的으로 計測하여 구한 값들이며, 많은 實驗을 행하여 얻은 平均값이다. 이들은 Fornberg<sup>10)</sup>의 數值計算結果와 대체로 一致하였으며, 本論文의 數值計算結果와도 거의 一致함을 Fig. 11 에서 볼 수 있다.

Fig. 11 에서 보는 바와같이 Separation 角은 Reynolds 數에 따라 增加를 하지만 Twin Vortices의 크기 ( $s/d$ )와 같이 線形的으로 增加하지는 않으며, 어떤 角에 收斂할 것으로 推測된다. 이에 대해 Bordetsky<sup>16)</sup>는 Reynolds 數가 무한히 增加할 때 Separation 角이  $125^\circ$ 에 收斂한다는 것을 理論的으로 밝힌바 있다. 本論文에서는 實驗結果와 數值計算結果를 토대로 最小自乘法을 이용하여 Reynolds 數에 대한 Separation 角의 近似式으로 다음과 같은 式을 얻었으며, 收斂角으로  $101.3^\circ$ 를 얻었다.

$$\alpha = 101.3 (1 - e^{-0.0342 Re}) \quad (29)$$

이상의 數值計算은 Fig. 1(b)의 直交座標系 領域을 一定間隔을 가진 여러개의 점으로 나누어 有限差分法을 이용하여 Computer 에 의해 計算되었다. 有限領域을 더욱 많은 點으로 나누어 解를 구할 경우에는 解의 正確性이 增加하지만 그에 따른 Computer 容量과 計算時間이 增加하게 된다. 따라서 解의 正確性에 그다지 影響을 미치지 않는 最小의 點들로 나누는 것이 要求되며, 本論文에서는 X軸을 0.1간격으로 10등분, Y軸을 0.1간격으로 20등분하여  $11 \times 21$ 개의 點들로 나누어  $Re = 3 \sim 6, 10, 20, 30, 40 \sim 45$ 에 대해 計算하였다.

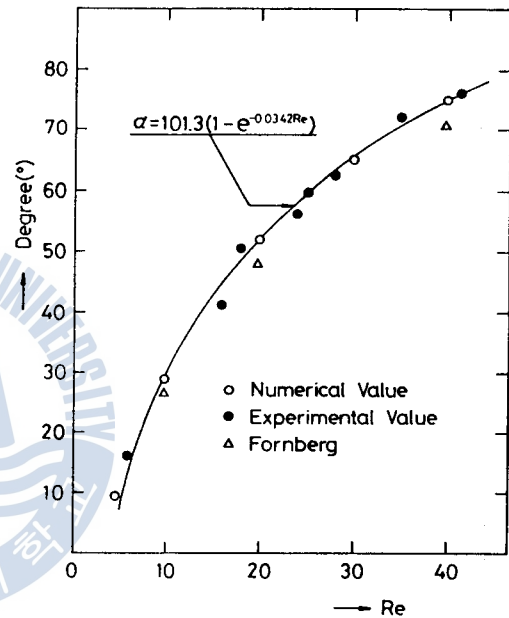


Fig. 11 Separation Angle

## 7. 結 論

이상의 實驗 및 數值計算 結果에서 低 Reynolds 數의 定常 흐름 解가 存在함을 알 수 있으며 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1) Twin Vortices 가 形成되는 臨界 Reynolds 數는 實驗적으로 약 6, 數值적으로 4임을 알았다. 이것은 Taneda의 實驗에 의한 5, Tomotika and Aoi의 數值計算에 의한 3.02와 3개로 一致한다.

2) Twin Vortices 가 일단 形成되면 Reynolds 數가 增加함에 따라 Twin Vortices의 中心은  $s/d$ 에 比例로 線形的으로 커진다.

3) Separation 角은 Reynolds 數가 增加함에 따라 增加하였으며, 다음과 같은 近似式으로 表示되었다.

$$\alpha = 101.3 (1 - e^{-0.042 Re})$$

本 實驗에서는 알루미날 粉末을 이용하여 흐름을 可視化하였으나, Separation이 일어나는 正確한 位置를 計測하지 못하였다. 따라서 色素를 이용한 可視化法을 開發함으로써 正確한 位置를 計測하는 方法의 開發이 要된다.



## 參 考 文 獻

- 1) 淺沼強外 14人, “流れの可視化 ハンドブツゲ”, 朝倉書店, (1979)
- 2) 日本機械學會, “流れ”, 丸善, (1984)
- 3) Hermann Schlichting, “Boundary Layer Theory”, McGraw Hill, 112, (1979)
- 4) C. H. Yih, “Fluid Mechanics”, McGraw Hill, 367, (1969)
- 5) S. Tomotica and T. Aoi, “The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers”, Quart. J. Mech, 3-2, 140, (1950)
- 6) M. Kawaguti, “Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the flow around a Circular Cylinder at Reynolds Number 40”, J. Phys. Soc, Japan, 8-6, 747, (1953)
- 7) C. Y. Chow, “An Introduction to Computational Fluid Mechanics”, John Wiley, 290, (1979)
- 8) M. White, “Viscous Fluid Flow”, McGraw Hill, 210, (1974)
- 9) S. Taneda, “Experimental Investigation of the Wakes behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Numbers”, J. Phy. soc, Japan, 11-3, 302, (1956)
- 10) B. Fornberg, “A numerical study viscous flow past a circular cylinder”, J. F. M, 98-4, 810, (1980)
- 11) H. Keller and H. Takami, “Numerical studies of viscous flow about cylinders”, John Wiley, 115, (1966)
- 12) S. Dennis and G. Chang, “Numerical Solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100”, J. F. M, 42, 471, (1970)
- 13) F. Nieuwstadt and H. Keller, “Viscous flow past circular cylinders”, Comp. Fluids, 1-59, (1973)
- 14) M. Thomson, “Theoretical Hydrodynamics”, Macmillan, 646, (1968)
- 15) I. Imai, “On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body with special reference to Filon's Paradox”, Proc. Roy. Soc, A208, 487, (1951)
- 16) S. Bordetsky, “Discontinuous fluid motion past circular and elliptic cylinders”, Proc. Roy. Soc, A102, 542, (1923)



## 附 錄

식 (5)를  $(r, \theta)$  平面에 대해  $\psi$ 만의 식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{2}{\text{Re}} \nabla^4 \psi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \sin \theta \right) \nabla^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \cos \theta \right) \nabla^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{A-1})$$

Galerkin 法에 의하면, 식 (A-1)의 解는 近似的으로 다음과 같은  $\phi_i$ 의 線形結合으로 된 多項式으로 표시될 수 있다.

$$\psi = \sum_{i=1}^n \phi_i(r, \theta) \quad (\text{A-2})$$

Kawaguti는 식 (A-2)를  $n=2$ 에 대해서 다음과 같이 표시하였다.

$$\begin{aligned} \psi = & \left( \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^3} + \frac{A_3}{r^5} + \frac{A_4}{r^7} \right) \sin \theta \\ & + \left( B_1 + \frac{B_2}{r^2} + \frac{B_3}{r^4} + \frac{B_4}{r^6} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

식 (A-3)은 境界條件의 식 (8)을 自動적으로 만족한다. 또 식 (A-3)이 境界條件의 식 (7)을 만족하기 위하여 다음과 같이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= -1 \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 &= 0 \\ A_1 + 3A_2 + 5A_3 + 7A_4 &= 1 \\ B_2 + 2B_3 + 3B_4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

식 (A-3)을 식 (A-1)에 대입한 값을 NS로 두면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{NS} = & \frac{-384}{\text{Re}} \left\{ \left( \frac{A_2}{r^7} + \frac{6A_3}{r^9} + \frac{20A_4}{r^{11}} \right) \sin \theta + 2 \left( \frac{B_3}{r^8} + \frac{5B_4}{r^{10}} \right) \sin 2\theta \right\} \\ & + \left\{ \left( \frac{A_1}{r^3} + \frac{3A_2}{r^5} + \frac{5A_3}{r^7} + \frac{7A_4}{r^9} \right) \sin \theta + \left( \frac{2B_2}{r^4} + \frac{4B_3}{r^6} + \frac{6B_4}{r^8} \right) \sin 2\theta \right\} \times \\ & \left\{ 8 \left( \frac{A_2}{r^5} + \frac{3A_3}{r^7} + \frac{6A_4}{r^9} \right) \cos \theta - 8 \left( \frac{B_1}{r^2} - \frac{3B_3}{r^6} - \frac{8B_4}{r^8} \right) \cos 2\theta \right\} \\ & - \left\{ \left( \frac{A_1}{r^2} + \frac{A_2}{r^4} + \frac{A_3}{r^6} + \frac{A_4}{r^8} \right) \cos \theta + 2 \left( \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^3} + \frac{B_3}{r^5} + \frac{B_4}{r^7} \right) \cos 2\theta \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ 8 \left( \frac{5A_2}{r^6} + \frac{21A_3}{r^8} + \frac{54A_4}{r^{10}} \right) \sin \theta - 4 \left( \frac{2B_1}{r^3} - \frac{18B_3}{r^7} - \frac{64B_4}{r^9} \right) \sin 2\theta \right\} \\
& - 8 \left( \frac{5A_2}{r^6} + \frac{21A_3}{r^8} + \frac{54A_4}{r^{10}} \right) \sin \theta \cos \theta + 4 \left( \frac{2B_1}{r^3} - \frac{18B_3}{r^7} - \frac{64B_4}{r^9} \right) \sin 2\theta \cos \theta \\
& - 8 \left( \frac{A_2}{r^6} + \frac{3A_3}{r^8} + \frac{6A_4}{r^{10}} \right) \sin \theta \cos \theta + 8 \left( \frac{B_1}{r^3} - \frac{3B_3}{r^7} - \frac{8B_4}{r^9} \right) \sin \theta \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{A-5}$$

圓筒表面에서 近似값 NS가 0이 될 必要가 있으므로 다음과 같이 되어야 한다.

$$\begin{aligned}
A_2 + 6A_3 + 20A_4 &= 0 \\
B_3 + 5B_4 &= 0
\end{aligned} \tag{A-6}$$

식 (A-4), (A-6)에서  $A_2, A_3, A_4$  와  $B_2, B_3, B_4$  를 각각  $A_1, B_1$  으로 표시하면,

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\frac{22}{9} A_1 - 4, & B_2 &= -\frac{7}{3} B_1 \\
A_3 &= \frac{17}{9} A_1 + 4, & B_3 &= \frac{5}{3} B_1 \\
A_4 &= -\frac{4}{9} A_1 - 1, & B_4 &= -\frac{1}{3} B_1
\end{aligned} \tag{A-7}$$

와 같이 된다.

圓筒에서 떨어진 곳의 領域에서는 一般으로 誤差가 0이 아니므로 全體領域에서 다음과 같은 條件을 滿足할 必要가 있다.

$$\int_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} (NS) \sin \theta \, d\theta \, dr = 0 \tag{A-8}$$

$$\int_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2} (NS) \sin 2\theta \, d\theta \, dr = 0 \tag{A-9}$$

식 (A-8), (A-9)에 식 (A-7)을 넣어 정리하면 각각 다음과 같이 된다.

$$\frac{9.7893}{Re} A_1 - 0.0415 B_1 - 0.0275 A_1 B_1 + \frac{26.5974}{Re} = 0 \tag{A-10}$$

$$\frac{6.4647}{Re} B_1 + 0.0171 A_1^2 + 0.1482 A_1 + 0.3746 = 0 \tag{A-11}$$

식 (A-10), (A-11)은 Newton-Raphson 法에 의해 풀 수 있다.