

자이로컴파스 追從系統의 制御特性에 關한 研究

李 相 鎭

A Study on the Follow-up Control Characteristics
of the Marine Gyrocompass

Lee Sangjib

〈目 次〉

Abstract	Ⅲ. 系統의 安定性
I. 序 言	Ⅳ. 系統의 定常特性
Ⅱ. 系統의 model	V. 結 言

ABSTRACT

This paper continues the study on the follow-up control characteristics, recently initiated by the author, for the improvement of the direction-indicating function of the marine gyrocompass.

The absolute stability of the system is analyzed by utilizing the Hurwitz criterion and the relative stability is discussed by calculating the gain and phase margins for the system. The relationships between the values of the adjustable parameter K_a , indicial responses and roots are examined numerically. And it becomes clear that the system is stable so long as the value of K_a is within the range, $0 < K_a < 1.2$.

The steady state characteristics are investigated theoretically by introducing both the error constant and error series methods. It is known that for the step input the steady state error is zero and the settling time with the negligible control error varies with the various values of K_a and on the other hand, the control error for the non-step input, such as the type of the ramp, parabolic and sinusoidal function is diminished with the increase of K_a value but never falls to zero under the stable system. If the interest is focussed on shortening the settling time and diminishing the control error, it is recommended that the value of K_a should be within the range between 0.3 and 0.7.

I. 序 言

船舶의 位置決定, 針路維持 및 操船上의 狀況判斷 등을 할 때 基本이 되는 方位情報은 主로 gyro compass 에 依存하고 있다. 船舶의 速度가 高速化되고 自動航法裝置가 普及되어 감에 따라 精密度가 더욱 높은 方位情報이 要望된다.

正常稼動中인 gyrocompass 에 依한 方位情報의 精密度는 地球의 自轉, 船舶의 移動·搖動 등으로 因한 影響을 받더라도 이에 對處하여 地球表面에 對한 相對運動이 없는 狀態를 維持하는 主動部의 指北機能(north-directing function)과 이 狀態를 使用者 또는 다른 航法裝置에 傳達하는 追從部의 方向指示機能(direction-indicating function)에 依하여 決定된다. gyrocompass 가 發明된 以來 指北機能의 向上을 위하여 많은 製品이 開發되었고 各 製品이 가진 未洽한 點을 改良 補完해온 結果 主動部의 機能은 거의 完璧한 水準에 到達되었다고 할 수 있다.¹⁾⁻⁶⁾ 그러나 追從部는 主動部의 構成形式에 따라 構造가 약간 다른 것이 使用되고 있으나, 追從部 自體의 機能向上에 比重을 두어 製品을 開發하거나 改良한 것이 없으며 이에 關한 研究가 別途로 進行된 바가 없는 것으로 여겨진다.

船舶이 運航中일 때는 操船者가 必要에 따라 針路를 變更시키거나, 船體가 外力의 影響을 받거나, 自動操舵機에 依한 針路維持動作이 있으면 船首方向이 變한다. 船首方向이 變할 때마다 追從部와 固定部間에는 機械的인 摩擦로 因하여 追從部가 垂直軸 周圍로 回轉된다. 이 回轉으로 因하여 主動部와 追從部間에 相對的인 角變位가 큰 값이 되지 않도록 追從部가 알맞게 動作되어야 한다.

오늘날 船舶에서 使用되고 있는 gyrocompass 의 追從系統은 比例制御形式으로 構成되어 있으며, 이 系統 構成 要素의 하나인 電力增幅部의 利得을 調整하여 알맞는 制御特性을 얻도록 되어 있다. 그러나 實際에 있어서 利得調整은 一定한 指針에 따라 行하여지지 않고 使用者의 經驗에 依存하므로 알맞는 調整效果를 期待할 수 없다. 만약 利得이 높게 調整되면 系統이 持續振動을 하게 되고 compass card 가 不安定하게 되어 그 判讀이 困難하며, 때로는 操舵機에 不必要한 操舵命令이 주어져서 船體推進에 抵抗을 增加시키는 結果가 된다. 反面에 利得이 낮게 調整되어 系統이 過制動形式으로 動作하면 主動部와 追從部間의 角變位가 커지고 그 持續時間도 길어진다. 그 結果 主動部의 垂直軸에 비틀림 또는 摩擦 torque 가 가해져서 不正誤差가 발생되며 또한 이러한 動作이 일어나고 있는 동안에는 主動部에 依한 情報이 正確하게 傳達되지 않는다. 使用者가 이 때 方位情報을 이용하여 位置를 決定하거나 針路를 維持하면 運航上의 安全이 阻害되며 이러한 情報이 入力된 自動航法 裝置를 利用하여 狀況을 判斷하면 坐礁 衝突과 같은 事故를 自招하는 誤判을 하기 쉽다. 따라서 追從系統도 다른 制御系와 같이 系統의 目的과 特殊性을 充分히 考慮하여 가장 適合한 動作을 하게 하여야 한다.

本 研究는 gyrocompass 의 方向指示機能向上을 위한 基礎研究의 一環으로, 追從系統에 關한 數學的 model⁷⁾을 基礎로 하여 系統의 安定性和 應答特性 및 定常特性에 關하여 理論 및 數值計算으로 解析하고 定量的인 分析을 하여 安定성이 確保되는 條件과 良好한 定常特性이 維持되는 方案을 提案한다. 즉 Hurwitz 安定度判別法으로 系統의 絕對安定도가 確保되는 條件을 決定하고 利得·位相을

計算하여 相對安定度를 檢討하며, 利得變動에 對한 安定度, 出力特性 및 特性方程式의 根의 位置와 出力과의 關係 等을 說明하며, 誤差定數法과 誤差級數法을 利用하여 系統의 定常誤差 및 誤차를 定量的으로 分析하여 이것을 減縮하는 條件을 提示한다.

II. 系統의 model

本稿가 研究의 對象으로 한 gyrocompass(Hokshin D-1) 追從系統은 ① 偏角檢出部(error detector), ② 電力增幅部(amplifier), ③ 追從電動機(servomotor), ④ 減速齒車(reduction gears) 및 ⑤ 追從外球(container) 等으로 構成되어 있고, 이들 各要素의 電氣的·機械的인 特性으로부터 구한 傳達函數와 要素間의 信號流動 및 入出力關係 等을 考慮하면 系統은 다음과 같은 block 總圖로 表示되며, 따라서 系統의 前向傳達函數 $G(s)$ 와 開 loop 傳達函數 $G(s) \cdot H(s)$ 는 式 (1)과 같다.

$$G(s) = G(s) \cdot H(s) = \frac{A_1}{A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4} \quad (1)$$

但, $A_1 = 0.125$, $A_2 = 1.776$, $A_3 = 25.5$, $A_4 = 12.4285$, $A_5 = 1034.64 \cdot K$.

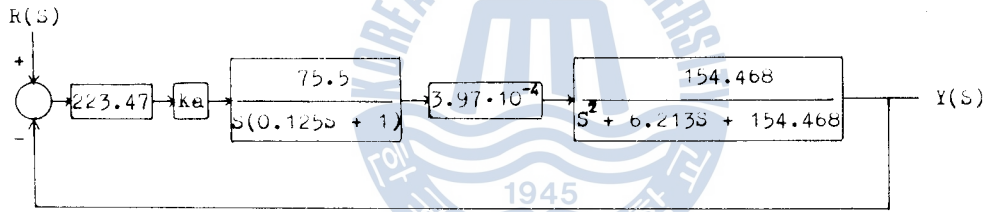


Fig. 1. Block diagram of the follow system.

한편 入力에 對한 出力의 比를 全系統의 閉 loop 傳達函數로 보면 傳達函數 $W(s)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\ &= \frac{A_1}{A_1 s^3 + A_2 s^2 + A_3 s + A_4} \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2)의 分母 分子를 A_1 으로 나누어 整理하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A_{10}}{s^3 + A_{11}s^2 + A_{12}s + A_{13}} \quad (3)$$

但, $A_{11} = A_2/A_1$, $A_{12} = A_3/A_1$, $A_{13} = A_4/A_1$, $A_{10} = A_1/A_1$

III. 系統의 安定性

追從系統도 다른 制御系와 마찬가지로 入力이 系統에 加해지면, 그 出力應答은 安定하고, 定常誤차는 可能限한 작으며, 過渡特性이 良好하게 되도록 安定性과 速應性이 保障되어야 한다. 以下에서는 系統의 安定性에 對하여 具體적으로 考察하고자 한다.

系統의 制御特性을 評價할 境遇에는 먼저 對象이 되는 系統이 安定한가, 不安定한가, 또는 安定하다면 어떠한 條件下에서 어느 程度 그 安定성이 確保되는가를 明確히 할 必要가 있다.

追從系統의 構成要素中 安定성에 影響을 미치는 parameter 로서는, 人爲的으로 變動시킬 수 있는 增幅部利得 K_a , 長期間 使用함에 따라 container 支持部의 各部品에 機械的인 變化가 일어남으로써 그 값이 變하는 container의 固有角周波數 ω_n 및 減衰率 ζ 등을 들 수 있으나, 여기서는 이미 提案한 바와 같이 ω_n 및 ζ 는 一定한 값을 갖는다고 보고 K_a 만을 變數로 하여 이의 變動에 따른 安定性を 다음과 같은 順序로 檢討하기로 한다.

먼저 Hurwitz 安定度判別法에 依하여, 系統의 特性方程式의 係數로부터 Hurwitz 行列式을 構成하고, 이들 各各의 값을 K_a 를 變數로 하여 計算한다. 이 때 負의 符號의 出現如否를 把握하여 絕對安定성이 確保되는 條件을 決定한다. 다음 開 loop 傳達函數의 크기와 位相을 周波數別, K_a 別로 計算하고 그 結果로부터 作成한 利得·位相圖를 利用하여 相對安定度の 尺度인 利得餘裕, 位相餘裕를 구한다. 끝으로 特性方程式의 根을 Bairstow 法을 使用하여 K_a 別로 計算하고 이것을 基礎로 하여 根軌跡圖를 作成하여, 根의 移動에 따른 系統의 安定度 및 階段入力에 對한 出力特性을 解析·檢討하기로 한다.

1) 絕對安定性

一般的으로 線形制御系에 有界한 入力이 加해질 때 그 應答出力이 有界하면 系는 安定하고, 反面에 有界하지 않거나 持續振動形態로 되면 不安定하다고 하며, 安定과 不安定한 限界狀態에 있으면 臨界安定하다고 한다.

系統이 有界한 出力特性을 갖게 되려면 傳達函數의 分母를 零으로 하는 特性方程式의 根이 S-平面의 左半부에 存在하여야 한다. Hurwitz 安定度判別法에 依하면 特性方程式의 係數 및 그 係數로부터 構成한 Hurwitz 主座行列式의 값이 모두 正이면 모든 根은 負의 實部를 갖게 되어 S-平面의 左半부에 存在하게 된다. 따라서, 系統의 特性方程式이 이 條件을 滿足하면 出力特性式的 指數項은 時間이 經過함에 따라 모두 消滅하게 되므로 安定성이 確保된다¹⁾.

系統의 特性方程式은 式(3)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$S^4 + A_{(4)}S^3 + A_{(3)}S^2 + A_{(2)}S + A_{(1)} = 0 \quad (4)$$

方程式의 모든 根이 負의 實部를 갖기 위한 必要充分條件은 方程式의 모든 係數가 正이고, 方程式의 係數로 構成된 Hurwitz 主座行列式의 값이 正이 되어야 한다.

式(4)에 있어서 係數 $A_{(4)}$, $A_{(3)}$, $A_{(2)}$ 는 각각 다음과 같이 一定하고

$$A_{(4)} = 14.208 > 0$$

$$A_{(3)} = 204.1 > 0$$

$$A_{(2)} = 1235.7 > 0$$

또 $A_{(1)}$ 이 正이 되려면 條件式

$$A_3/A_1 = 1034.64 K_a/0.125 > 0 \quad (5)$$

으로부터 $K_a > 0$ 이어야 한다.

한편, Hurwitz 行列式中 A_1, A_2 는 각각

$$A_1 = A_{(4)} = 14.208 > 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} \\ 1 & A_{(3)} \end{vmatrix} = A_{(1)}A_{(3)} - A_{(2)} = 1664.1528 > 0$$

이고, A_3 이 正이 되려면 條件式

$$A_3 = \begin{vmatrix} A_{(4)} & A_{(2)} & 0 \\ 1 & A_{(3)} & A_{(1)} \\ 0 & A_{(4)} & A_{(3)} \end{vmatrix} = A_{(4)}A_{(3)}A_{(1)} - A_{(2)}^2A_{(1)} - A_{(3)}^2 > 0$$

로부터,

$$K_a < 1.23 \tag{6}$$

이어야 하며, A_4 가 正이 되려면 條件式

$$A_4 = \begin{vmatrix} A_{(4)} & A_{(2)} & 0 & 0 \\ 1 & A_{(3)} & A_{(1)} & 0 \\ 0 & A_{(4)} & A_{(2)} & 0 \\ 0 & 1 & A_{(3)} & A_{(1)} \end{vmatrix} = A_{(1)} \cdot A > 0$$

으로부터 $A_4 > 0$ 이 될 境遇와 同一한 條件을 滿足하면 되므로 結局 前述의 條件式(5), (6)으로부터,

$$0 < K_a < 1.23 \tag{7}$$

가 系統의 安定性이 確保되는 K_a 의 範圍임을 알 수 있다.

2) 相對安定度

制御系의 特性方程式이 $1 + G(s)H(s) = 0$ 인 系의 安定限界는 $|GH| = 1, \angle GH = -180^\circ$ 로 된다. 따라서 開 loop 傳達函數 GH 의 安定限界는 利得·位相圖上에서는 0 dB 및 -180° 인 點이다.

追從系統 開 loop 周波數傳達函數 및 그 크기는 式(1)로부터 다음과 같아진다.

$$G(j\omega)H(j\omega) = A_5 / \{A_1(j\omega)^4 + A_2(j\omega)^3 + A_3(j\omega)^2 + A_4(j\omega)\}$$

$$|GH| = A_5 / (A_1\omega^4 - A_3\omega^2) / \sqrt{1 + \{(A_4\omega - A_2\omega^3) / (A_1\omega^4 - A_3\omega^2)\}^2} \tag{8}$$

따라서 利得 GM 과 位相 ϕ_m 은 各各 다음과 같아진다.

$$GM = 20 \log_{10} |GH|$$

$$\phi_m = -57.3 \times \tan^{-1} \{ (A_4\omega - A_2\omega^3) / (A_1\omega^4 - A_3\omega^2) \} \tag{9}$$

K_a 및 ω (角周波數) 를 parameter 로 하여 位相과 利得을 計算하고 그 結果로부터 利得·位相圖를 作成하였다 (Fig. 2).

Fig. 2로부터 알 수 있듯이 K_a 가 增加하면 할수록 安定度가 나빠지는 傾向이 있음을 알 수 있다. 즉, K_a 가 0.1에서 1.2로 變動되면 利得餘裕는 165 dB에서 0 dB로, 位相餘裕는 78° 에서 0° 로 되며 $K_a=1.2$ 일 때가 安定限界임을 나타내고 있다.*

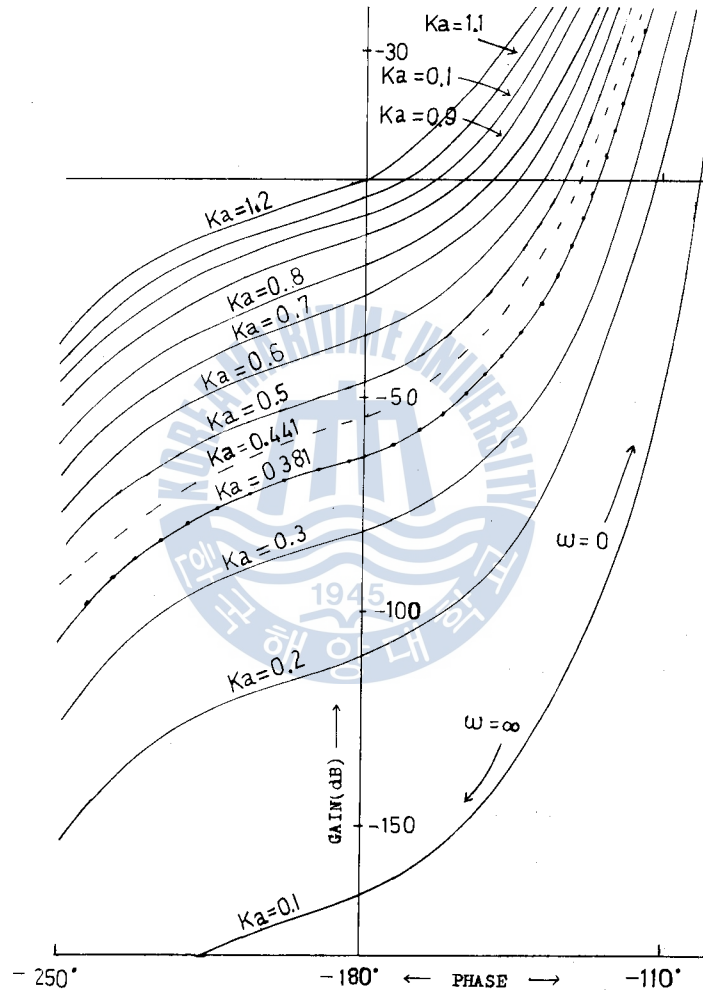


Fig. 2. Gain-phase diagram.

3) 安定度와 出力特性

閉 loop 傳達函數의 特性方程式(4)에서 K_a 를 parameter로 하여 區間 0.01~1.3에서 根을 計算하였다.

* 系統의 安定度를 確保하는 K_a 의 範圍는 $0 < K_a < 1.23$ 이나 以下에서는 $K_a=1.2$ 를 그 上限線으로 간주하며, $K_a < 0$ 에 對해서는 考察하지 않기로 한다.

한편, 開 loop 傳達函數의 特性方程式의 極點은

$$S^4 + A_{(4)}S^3 + A_{(3)}S^2 + A_{(2)}S = 0 \tag{10}$$

로부터 0, -8, -3.01 ± j12.4285 로 된다.

根軌跡推定의 基本原理에 依하면 軌跡의 出發點은 위 4 개의 根의 位置가 되며 漸近線이 이루는 角(ϕ_A)은 다음과 같고,

$$\begin{aligned} \phi_A &= (2n+1) \times 180^\circ / 4 \\ &= 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ \quad [但, n=0, 1, 2, 3] \end{aligned}$$

또 漸近線이 實軸과 交叉하는 點 P_A 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_A &= (0 - 8 - 6.02) / 4 \\ &= -3.5 \end{aligned}$$

以上の 結果로부터 Fig.3 와 같은 根軌跡圖를 作成하였다. Fig.3로부터 알 수 있듯이 K 가 零에서부터 增加함에 따라 두 쌍의 實重根, 두 쌍의 複素共軛根이 나타나며, 한 쌍의 複素共軛根은

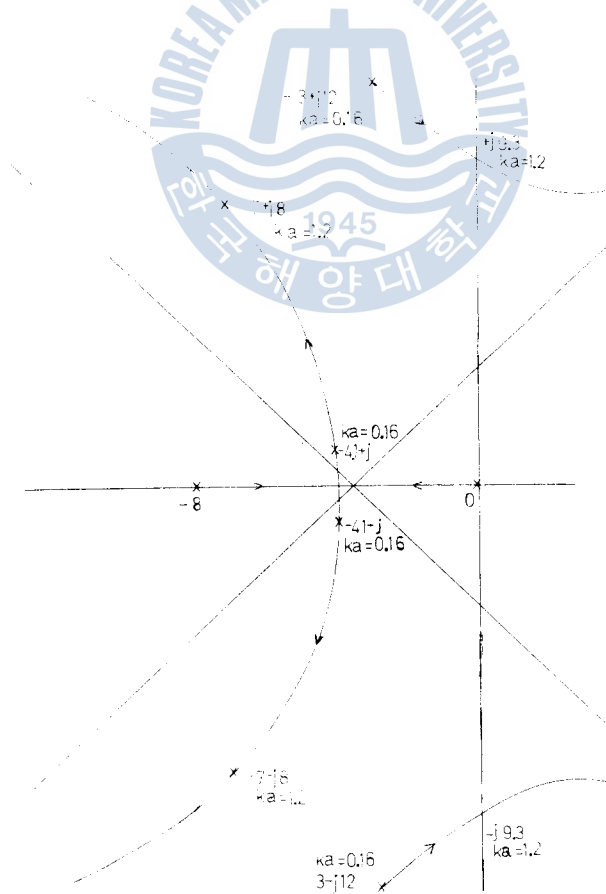


Fig. 3. Root loci of the characteristic equation.

K_a 가 매우 커질 경우에는 虛軸을 交叉하여 S-平面的 右半部으로 進入한다.

다음에는 特性根이 根軌跡上을 移動함에 따른 出力特性을 把握하기 위하여 階段入力에 對한 應答을 해석적으로 考察하고자 한다.

單位階段入力 $1/S$ 가 系統에 加해지면 그 應答 $Y(s)$ 는 다음과 같아진다.

$$Y(s) = \frac{1}{S} \cdot \frac{A_{(1)}}{S^4 + A_{(4)}S^3 + A_{(3)}S^2 + A_{(2)}S + A_{(1)}} \quad (11)$$

① 根軌跡이 實軸上에 있을 境遇

이 때의 K_a 는 $0.01 \leq K_a \leq 0.15$ 內에 存在하며, 特性方程式은 두 쌍의 陰의 實重根 r_1, r_2 를 가지므로 階段入力에 對한 出力方程式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A_{(1)}}{S(S+r_1)^2(S+r_2)^2} \\ &= \frac{K_0}{S} + \frac{K_1}{(S+r_1)^2} + \frac{K_2}{(S+r_1)} + \frac{K_3}{(S+r_2)^2} + \frac{K_4}{(S+r_2)} \end{aligned} \quad (12)$$

위의 式을 Laplace 逆變換하면 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left[\frac{K_0}{S}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_1}{(S+r_1)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_2}{S+r_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_3}{(S+r_2)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{K_4}{S+r_2}\right] \\ &= K_0 + K_2 e^{-r_1 t} + K_4 e^{-r_2 t} + t \cdot (K_1 e^{-r_1 t} + K_3 e^{-r_2 t}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{但, } K_0 &= S \cdot Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{A_{(1)}}{r_1^2 r_2^2} \\ K_1 &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{d^0}{ds^0} \left[\frac{A_{(1)}}{S(S+r_2)^2} \right] \Big|_{s=-r_1} = \frac{-A_{(1)}}{r_1(r_2-r_1)^2} \\ K_2 &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{A_{(1)}}{S(S+r_2)^2} \right] \Big|_{s=-r_1} = \frac{-A_{(1)}(r_2-3r_1)}{r_1^2(r_2-r_1)^3} \\ K_3 &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{d^0}{ds^0} \left[\frac{A_{(1)}}{S(S+r_1)^2} \right] \Big|_{s=-r_2} = \frac{-A_{(1)}}{r_2(r_1-r_2)^2} \\ K_4 &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[\frac{A_{(1)}}{S(S+r_1)^2} \right] \Big|_{s=-r_2} = \frac{-A_{(1)}(r_1-3r_2)}{r_2^2(r_1-r_2)^3} \end{aligned}$$

위의 式에는 振動要素가 包含되어 있지 않으며, $t \rightarrow \infty$ 이면 $y(t) \rightarrow K_0$ 가 되므로, 出力은 時間이 經過하면 振動없이 K_0 에 收斂한다. 한편,

$$\begin{aligned} &S^4 + 2(r_1+r_2)S^3 + (r_1^2 + 4r_1r_2 + r_2^2)S^2 + 2r_1r_2(r_1+r_2)S + r_1^2r_2^2 \\ &= S^4 + A_{(4)}S^3 + A_{(3)}S^2 + A_{(2)}S + A_{(1)} \end{aligned}$$

가 成立되므로 $r_1^2 r_2^2 = A_{(1)}$ 이 된다. 따라서 $K_0 = 1$ 이 된다. 이것은 系統이 定常誤差가 없는 狀態로 一定한 값에 收斂함을 보여주고 있다.

한편 根의 軌跡이 實軸을 離脫한 境遇에는 K_a 가 $K_a > 0.15$ 일 때이며, 特性方程式은 두 쌍의 複素共軛根 $\sigma_1 + j\omega_1, \sigma_1 - j\omega_1, \sigma_2 + j\omega_2, \sigma_2 - j\omega_2$ 를 가지므로 出力方程式은,

$$Y(s) = \frac{A_{(1)}}{S(S+\sigma_1+j\omega_1)(S+\sigma_1-j\omega_1)(S+\sigma_2+\omega_2)(S+\sigma_2-j\omega_2)}$$

$$= \frac{C_0}{S} + \frac{C_1}{(S+\sigma_1+j\omega_1)} + \frac{C_2}{(S+\sigma_1-j\omega_1)} + \frac{C_3}{(S+\sigma_2+j\omega_2)} + \frac{C_4}{(S+\sigma_2-j\omega_2)} \quad (14)$$

로 된다. 따라서 $y(t)$ 는

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{C_0}{S}\right] + L^{-1}\left[\frac{C_1}{(S+\sigma_1+j\omega_1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{C_2}{(S+\sigma_1-j\omega_1)}\right]$$

$$+ L^{-1}\left[\frac{C_3}{(S+\sigma_2+j\omega_2)}\right] + L^{-1}\left[\frac{C_4}{(S+\sigma_2-j\omega_2)}\right]$$

$$= C_0 + (a_1 - ja_2)e^{-(\sigma_1+j\omega_1)t} + (a_1 + ja_2)e^{-(\sigma_1-j\omega_1)t} + (b_1 - jb_2)e^{-(\sigma_2+j\omega_2)t} + (b_1 + jb_2)e^{-(\sigma_2-j\omega_2)t}$$

$$= C_0 + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot e^{-\sigma_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta_1) + 2\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot e^{-\sigma_2 t} \cdot \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (15)$$

$$\text{但, } \theta_1 = \tan^{-1} \frac{a_2}{a_1}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{b_2}{b_1}$$

여기서,

$$C_0 = S \cdot Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{A_{(1)}}{(\sigma_1^2 + \omega_1^2)(\sigma_2^2 + \omega_2^2)}$$

$$C_1 = (S + \sigma_1 + j\omega_1) \cdot Y(s) \Big|_{s=-\sigma_1-j\omega_1} = a_1 - ja_2$$

$$C_2 = (S + \sigma_1 - j\omega_1) \cdot Y(s) \Big|_{s=-\sigma_1+j\omega_1} = a_1 + ja_2$$

$$C_3 = (S + \sigma_2 + j\omega_2) \cdot Y(s) \Big|_{s=-\sigma_2-j\omega_2} = b_1 - jb_2$$

$$C_4 = (S + \sigma_2 - j\omega_2) \cdot Y(s) \Big|_{s=-\sigma_2+j\omega_2} = b_1 + jb_2$$

로 된다.

$$\text{但, } a_1 = a'_1 \cdot A_{(1)} / (a'^1_1 + a'^2_1), \quad a_2 = a'_2 \cdot A_{(1)} / (a'^1_1 + a'^2_1)$$

$$b_1 = b'_1 \cdot A_{(1)} / (b'^1_1 + b'^2_1), \quad b_2 = b'_2 \cdot A_{(1)} / (b'^1_1 + b'^2_1)$$

여기서,

$$a'_1 = 2\omega_1^2 \{2\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2\}$$

$$a'_2 = 2\omega_1 \{\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \sigma_1(\omega_2^2 - \omega_1^2) + 2\omega_1^2(\sigma_2 - \sigma_1)\}$$

$$b'_1 = 2\omega_2^2 \{2\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2\}$$

$$b'_2 = 2\omega_2 \{\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) + 2\omega_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)\}$$

② 根軌跡이 左半部 平面內에 있을 境遇

K_a 가 $0.15 < K_a < 1.2$ 인 境遇, 各根은 虛部와 陰의 實部를 갖게 되어 出力은 不足制動을 하게 되며, 最後에는 C_0 에 收斂한다

한편,

$$S^4 + 2(\sigma_1 + \sigma_2)S^3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2)S^2 + \{\sigma_2^2 + 2(\sigma_1\omega_2^2 + \sigma_2\omega_1^2)\}S + (\sigma_1^2 + \omega_1^2)(\sigma_2^2 + \omega_2^2) \\ = S^4 + A_{(4)}S^3 + A_{(3)}S^2 + A_{(2)}S + A_{(1)}$$

가 成立하므로 $(\sigma_1^2 + \omega_1^2)(\sigma_2^2 + \omega_2^2) = A_{(1)}$ 이 된다. 따라서 $C_0 = 1$ 이 된다. 즉 이 경우에도 系統이 定常誤差가 없이 收斂한다.

③ 하나의 複素共軛根의 軌跡이 虛軸과 交叉할 境遇

K_a 가 1.2 인 境遇의 根軌跡은, 왼쪽으로 向하는 根은 陰의 實部를 가졌으나 오른쪽으로 向하는 나머지 한 쌍의 根은 實部가 零이다. 後者의 根의 位置는 前者의 그것에 比하여 原點에 가까운 虛軸上에 있는 代表根(dominant roots)이 되므로 出力特性은 거의 이 根에 依하여 決定된다. 따라서 이 때의 出力은 一定한 振幅을 가진 非制動形態가 되며 그 振幅의 크기 $2\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ 는, $\sigma_2 = 0$ 로 하여 계산하면,

$$2\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = A_{(1)} \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2 - \sigma_1^2)^2 + 4\omega_2^2\sigma_1^2} / \{\omega_2^2(\omega_2^2 - \omega_1^2 - \sigma_1^2)^2 + 4\omega_2^4\sigma_1^2\}$$

로 된다.

④ 代表根의 軌跡이 S-平面의 右半部로 進入한 境遇

K_a 가 $K_a > 1.2$ 인 境遇에는, 陽의 指數項이 包含되므로 系統이 不安定하게 되어 發散形態로 振動한다.

以上の 考察로부터 얻은 增幅部利得, 根軌跡, 相對安定度, 出力特性關係를 整理하여 Table 1 에 보이고 各境遇를 代表하는 出力特性을 Fig. 4 에 圖示하였다.

Table 1. Relationship between K_a and roots, relative stability and output characteristics of the system.

	K_a	roots	relative stability		output
			gain margin (dB)	phase margin (deg)	
①	$K_a \leq 0.15$	2 pairs of multiple roots with negative real parts	$GM > 135$	$\phi_m > 74$	overdamped
②	$0.15 < K_a < 1.2$	2 pairs of complex conjugate roots with negative real parts	$0 < GM < 135$	$0 < \phi_m < 74$	underdamped
③	$K_a = 1.2$	complex conjugate roots with zero real parts complex conjugate roots with negative real parts	$GM = 0$	$\phi_m = 0$	undamped
④	$K_a > 1.2$	complex conjugate roots with positive real parts complex conjugate roots with negative real parts	$GM < 0$	$\phi_m < 0$	negatively damped

追從系統을 構成하고 있는 要素中 增幅部利得 K_a 를 parameter 로 하여 이것의 變動에 따른 系統의 絶對安定性和 相對安定度 및 安定度에 따른 出力特性 등을 理論적으로 解析한 結果 다음과 같은 것을 알게 되었다.

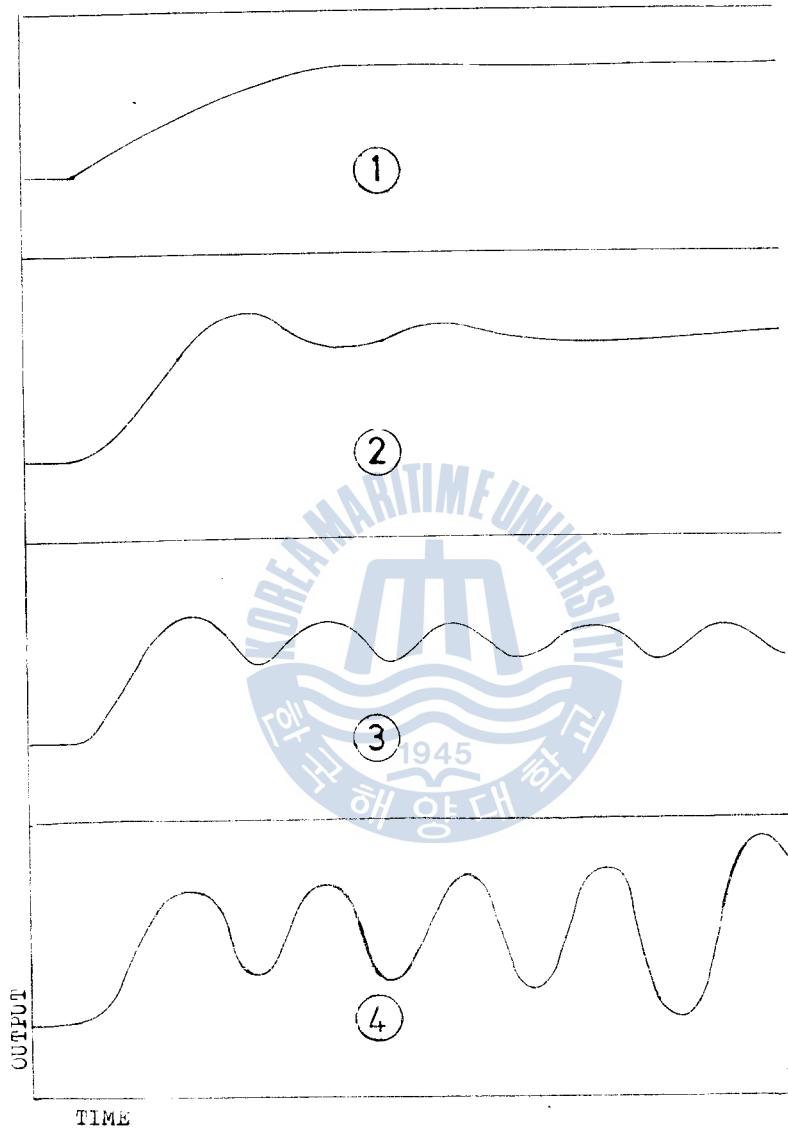


Fig. 4. Wave forms of indicial response for the various root locations.

- (1) K 가 $0 < K_a < 1.2$ 의 範圍內의 값을 取하면 系統의 安定性은 確保되려, 實驗에 使用된 gyrocompass의 增幅部利得 範圍와 거의 一致되고 있음을 알았다.
- (2) K_a 가 增加하면 相對安定度는 나빠지는 傾向을 보인다. 即, K_a 가 0.1~1.2로 變하면, 利得 餘裕는 165 dB에서 0 dB로, 位相餘裕는 78° 에서 0° 로 變한다.
- (3) 系統의 出力은 K_a 의 變動에 따라 過制動, 不足制動, 非制動, 發散振動의 形態로 된다.

Ⅳ. 系統의 定常特性

系統에 入力이 加해질 때 그 應答이 迅速히 收斂하고 良好한 過度特性이 確保되더라도 定常誤差가 許容值를 超過하면 compass card 方位에는 一定한 量의 誤差가 包含된다. 航海中 外力의 影響을 받아 船體가 運動하는 境遇 또는 操船者의 意向에 따라 針路를 變更하거나 操縱하는 境遇의 入力은 階段型으로 看做할 수 있으나, 以下에서는 ramp 型 parabola 型 및 이들의 合成型과 正弦波型까지를 對象으로 하여, 形態가 다른 이들 入力이 系統에 加해질 때 定常特性을 理論적으로 解析하고 數值計算으로 定量的인 分析을 하여 주어진 與件下에서 誤差를 最大限으로 減縮하는 方法에 對해 考察한다.

入力에 對한 出力의 誤差를 評價하는 方法에는 希望(基準)出力과 實際出力과의 差로서 定義되는 誤差函數 $E(s)$ 에 最終值定理를 適用하여 定常誤差를 決定하는 方法과 誤差傳達函數를 Maclaurin 級數로 展開된 誤差級數式에 依하여 評價하는 方法이 있다.

前者는 函數 $S \cdot E(s)$ 가 S 平面의 虛軸과 右半部에서 正則이어야 그 適用이 可能하며, 時間이 無限大일 때에 限하여 誤差의 크기를 決定할 수 있을 뿐 時間의 經過에 따른 誤差의 特性은 알 수가 없다. 한편, 後者는 誤差級數式이 成立되던 入力의 形態에 關係없이 定常誤差를 決定할 수 있고 時間經過에 따른 誤差變動도 把握할 수 있다. 여기서는 定常誤差와 任意時間에 對한 誤差(制御誤差 또는 control error 라 한다)를 把握할 目的으로 이들 두 方法을 並用하기로 한다.

系統의 入力과 出力의 次元이 같은 境遇, 誤差 $e(t)$ 는,

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (16)$$

但, $r(t)$: 入力

$y(t)$: 出力

로 定義되며 定常誤差 e_{ss} 는,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

로 定義된다.

本系統의 境遇, Laplace 變換된 誤差傳達函數 $W_e(s)$ 는 式(1)로부터

$$\begin{aligned} W_e(s) &= \frac{1}{1+G(s)} \\ &= \frac{A_1 S^4 + A_2 S^3 + A_3 S^2 + A_4 S}{A_1 S^4 + A_2 S^3 + A_3 S^2 + A_4 S + A_5} \end{aligned} \quad (17)$$

但, $G(s) = A_5 / (A_1 S^4 + A_2 S^3 + A_3 S^2 + A_4 S)$

이므로, Laplace 變換된 誤差函數 $E(s)$ 는 다음과 같아진다.

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} \quad (18)$$

但, $R(s)$: Laplace 變換된 入力

따라서, 式(18)에 最終值 整理를 適用하여 定常誤差를 求하면 다음과 같이 된다. 即,

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \cdot R(s)}{1 + G(s)} \end{aligned} \quad (19)$$

但, $S \cdot E(s)$ 는 S -平面的 右半部內와 虛軸上에서 正則

入力 $R(s)$ 가 階段型 $1/S$, ramp型 $1/S^2$, parabola型 $1/S^3$ 일 때 各境遇의 定常誤差는

$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$: 位置誤差定數 (positional error constant)

$\lim_{s \rightarrow 0} S \cdot G(s)$: 速度誤差定數 (velocity error constant)

$\lim_{s \rightarrow 0} S^2 \cdot G(s)$: 加速度誤差定數 (acceleration error constant)

等과 같은 誤差定數에 따라 決定된다(誤差定數法).

한편, 誤差級數法에 依하면, 誤差函數는 다음과 같이 된다^{9), 10)}.

式 (17)를 $S=0$ 근방에서 Maclaurin 級數로 展開하면 誤差傳達函數 $W_e(s)$ 는,

$$W_e(s) = C_0 + C_1 S + \frac{1}{2!} C_2 S^2 + \frac{1}{3!} C_3 S^3 + \frac{1}{4!} C_4 S^4 + \dots \quad (20)$$

$$\text{但, } C_i = \left[\frac{d^i}{ds^i} \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right) \right]_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i}{ds^i} \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right)$$

로 된다.

따라서, 誤差函數 $E(s)$ 및 誤差級數式 $e(t)$ 는 各各 다음과 같다.

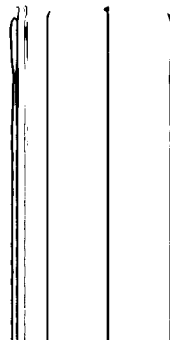
$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 S R(s) + \frac{1}{2!} C_2 S^2 R(s) + \frac{1}{3!} C_3 S^3 R(s) + \dots \quad (21)$$

$$e(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + \frac{1}{2!} C_2 r''(t) + \frac{1}{3!} C_3 r'''(t) + \dots \quad (22)$$

但, $e(t)$, $r(t)$ 는 각각 $E(s)$, $R(s)$ 의 Laplace 逆變換, C_i 는 誤差係數 (error coefficients).

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right) = 0$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{1 + G(s)} \right\} = A_1/A_2$$



따라서, 式(18)에 最終值 整理를 適用하여 定常誤差를 求하면 다음과 같이 된다. 即,

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S \cdot R(s)}{1 + G(s)} \end{aligned} \tag{19}$$

但, $S \cdot E(s)$ 는 S -平面的 右半部內와 虛軸上에서 正則

入力 $R(s)$ 가 階段型 $1/S$, ramp型 $1/S^2$, parabola型 $1/S^3$ 일 때 各境遇의 定常誤差는

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) : \text{位置誤差定數 (positional error constant)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} S \cdot G(s) : \text{速度誤差定數 (velocity error constant)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} S^2 \cdot G(s) : \text{加速度誤差定數 (acceleration error constant)}$$

等과 같은 誤差定數에 따라 決定된다(誤差定數法).

한편, 誤差級數法에 依하면, 誤差函數는 다음과 같이 된다^{9), 10)}.

式 (17)를 $S=0$ 근방에서 Maclaurin 級數로 展開하면 誤差傳達函數 $W_e(s)$ 는,

$$W_e(s) = C_0 + C_1 S + \frac{1}{2!} C_2 S^2 + \frac{1}{3!} C_3 S^3 + \frac{1}{4!} C_4 S^4 + \dots \tag{20}$$

$$\text{但, } C_i = \left[\frac{d^i}{ds^i} \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) \right]_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i}{ds^i} \left(\frac{1}{1+G(s)} \right)$$

로 된다.

따라서, 誤差函數 $E(s)$ 및 誤差級數式 $e(t)$ 는 各各 다음과 같다.

$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 S R(s) + \frac{1}{2!} C_2 S^2 R(s) + \frac{1}{3!} C_3 S^3 R(s) + \dots \tag{21}$$

$$e(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + \frac{1}{2!} C_2 r''(t) + \frac{1}{3!} C_3 r'''(t) + \dots \tag{22}$$

但, $e(t)$, $r(t)$ 는 각각 $E(s)$, $R(s)$ 의 Laplace 逆變換, C_i 는 誤差係數 (error coefficients).

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) = 0$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} = A_1/A_0$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} = 2(A_2 \cdot A_0 - A_1^2)/A_0^2$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^3}{ds^3} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} = 6(A_3 \cdot A_0^2 - 2 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot A_0 + A_1^3)/A_0^3$$

$$C_4 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^4}{ds^4} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\}$$

$$= 12(2 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot A_0^2 + 6 \cdot A_2 \cdot A_1^2 \cdot A_0 - 4 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot A_0^2 - 2 \cdot A_1^3 \cdot A_0 - 2 \cdot A_1^4)/A_0^4$$

$$= 24(A_1 \cdot A_3 \cdot A_0^3 + 3 \cdot A_2 \cdot A_1^2 \cdot A_0 - 2 \cdot A_2 \cdot A_1 \cdot A_0^2 - A_1^3 \cdot A_0 - A_1^4)/A_0^4$$

$$\begin{aligned}
C_5 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^5}{ds^5} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} \\
&= 120(3 \cdot A_2 \cdot A_4^2 \cdot A_5^2 + 3 \cdot A_3^2 \cdot A_4 \cdot A_5^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_4 \cdot A_5^2 - 4 \cdot A_3 \cdot A_4^3 \cdot A_5 - 2 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_5^3 + A_4^5) / A_5^4 \\
C_6 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^6}{ds^6} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} \\
&= 720 \{ -2 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot A_5^4 + 3 \cdot A_1 \cdot A_4 \cdot A_5^3 + 6 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5^3 - 4 \cdot A_2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^2 \\
&\quad + 5 \cdot A_3 \cdot A_4^4 \cdot A_5 + (A_3 \cdot A_5)^2 - 6 \cdot (A_3 \cdot A_4 \cdot A_5)^2 - A_2^2 \cdot A_5^4 - A_4^6 \} / A_5^6 \\
C_7 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^7}{ds^7} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} \\
&= 5040 \{ -2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_5^5 + 6 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5^4 - 4 \cdot A_1 \cdot (A_4 \cdot A_5)^3 + 3 \cdot A_2^2 \cdot A_4 \cdot A_5^4 \\
&\quad + 3 \cdot A_2 \cdot A_3^2 \cdot A_5^4 - 12 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4^2 \cdot A_5^3 + 5 \cdot A_2 \cdot A_4^4 \cdot A_5^2 - 4 \cdot A_3^3 \cdot A_4 \cdot A_5^3 \\
&\quad + 10 \cdot A_3^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 - 6 \cdot A_3 \cdot A_4^5 \cdot A_5 + A_4^7 \} / A_5^7 \\
C_8 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^8}{ds^8} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} \\
&= 40320 \{ -A_1^2 \cdot A_5^6 + 6 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot A_5^5 + 3 \cdot A_1 \cdot A_2^2 \cdot A_5^5 - 12 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot A_4^2 \cdot A_5^4 \\
&\quad + A_5 \cdot A_1 \cdot A_4^4 \cdot A_5^3 + 3 \cdot A_2^2 \cdot A_3 \cdot A_5^5 - 6 \cdot A_2^2 \cdot A_4^2 \cdot A_5^4 - 6 \cdot A_2 \cdot A_4^5 \cdot A_5^2 - (A_3 \cdot A_5)^4 \\
&\quad + 10 \cdot (A_3 \cdot A_5)^3 \cdot A_4^2 - 15 \cdot A_3^2 \cdot A_4^2 \cdot A_5^2 + 7 \cdot A_3 \cdot A_4^6 \cdot A_5 - A_4^8 \} / A_5^8 \\
C_9 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^9}{ds^9} \left\{ \frac{1}{1+G(s)} \right\} \\
&= 362880 \{ 3 \cdot A_1^2 \cdot A_4 \cdot A_5^5 + 6 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_5^6 - 18 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_4^2 \cdot A_5^5 - 9 \cdot A_1 \cdot A_3^2 \cdot A_4 \cdot A_5^5 \\
&\quad + 20 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 - 6 \cdot A_1 \cdot A_4^5 \cdot A_5^3 + 6 \cdot A_2^3 \cdot A_5^6 - 12 \cdot A_2^2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5^5 \\
&\quad + 10 \cdot A_2^2 \cdot A_4^3 \cdot A_5^4 + 30 \cdot A_2 \cdot A_3^2 \cdot A_4^2 \cdot A_5^4 - 4 \cdot A_2 \cdot A_3^3 \cdot A_5^5 - 30 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4^4 \cdot A_5^3 \\
&\quad + 7 \cdot A_2 \cdot A_4^6 \cdot A_5^2 + 5 \cdot A_3^4 \cdot A_4 \cdot A_5^4 - 20 \cdot (A_3 \cdot A_4 \cdot A_5)^3 \\
&\quad + 21 \cdot (A_3 \cdot A_5)^2 \cdot A_4^5 - 8 \cdot A_3 \cdot A_4^7 \cdot A_5 + A_4^9 \} / A_5^9
\end{aligned} \tag{23}$$

1) 階段入力が加해진 境遇

$r(t)=1$ (單位階段入力)이라 하면 $r'(t)=0$ 가 되어 本系統의 零次의 誤差係數 C_0 는 零이므로 誤差級數式을 構成할 수가 없다.

한편, 誤差定數法을 適用하면 入力 $r(t)$ 의 Laplace 變換은 $1/S$ 이므로 定常誤差는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s) \cdot \frac{1}{S} \\
&= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = 0
\end{aligned}$$

即, 系統의 loop 傳達函數 $G(s)$ 가 I型이므로 位置定數가 ∞ 로 되어 定常誤差가 零이 된다.

階段入력에 對한 誤差의 時間經過에 따른 變動特性은 이미 앞에서 究明된 바가 있는 出力特性으로 부터 (Table 1 參照)

$K_a \leq 0.15$ 이면 過制動, $0.15 < K_a < 1.2$ 이면 不足制動,

$K_a = 1.2$ 이면 非制動

形態로 얻을 수 있다.

또한, 階段入力에 對한 simulation 出力 特性으로부터 定常狀態를 살펴보면, 系統의 安定性이 確保되는 限 制御誤차가 無視될 수 있는 微小한 값으로 整定되는 데 要하는 時間은 K_a 에 따라 一義的으로 決定됨을 알 수 있다. Fig. 5는 이 때의 整定時間과 K_a 의 關係를 나타낸 것으로, 船舶의 動搖週期를 考慮하여 整定 時間을 制限하고자 할 때 有用한 尺度가 될 것이다.

2) ramp 入力이 加해진 境遇

$r(t) = t$ 라 두면 $r'(t) = 1, r''(t) = 0$ 이므로 이 때의 誤差級數法에 依한 $e(t)$ 는 다음과 같다.

$$e(t) = A_1/A \tag{24}$$

但, $A_1 = 12.4285$, A 는 K_a 의 函數

式(24)은 時間의 經過에 對한 入力の 變動이 없는 限 주어진 K_a 에 對한 誤차는 時間에 關係없이 一定함을 보여주고 있다.

한편 誤差定數法에 依하던 入力 t 의 Laplace 變換은 $1/S^2$ 이므로 定常誤차는 다음과 같다.

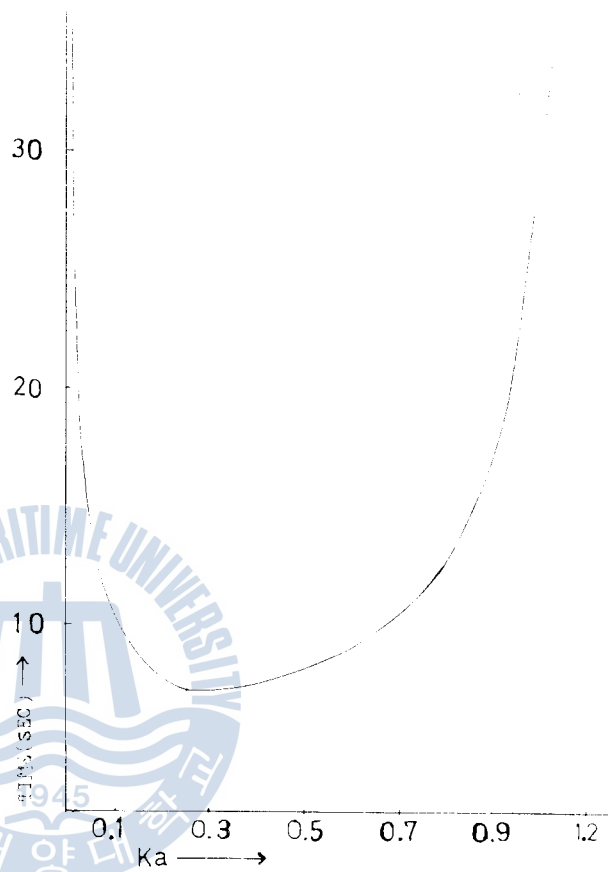


Fig. 5. Settling time vs. K_a for the indicial responses

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s) \cdot \frac{1}{S^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{S^2} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} S \cdot G(s)} = \frac{1}{A/A_1} \end{aligned} \tag{25}$$

式(25)은 定常誤차가 速度誤差定數의 逆數임을 보여준다.

式(25)에 있어서 K_a 를 微小한 增分으로 變化시켜 計算한 結果를 Fig. 6에 보인다.

3) parabola 入力이 加해진 境遇

$r(t) = \frac{t^2}{2}$ 라 두면, $r' = t, r'' = 1, r''' = 0$ 이므로 이 때의 誤差級數法에 依한 $e(t)$ 는 다음과 같다.

$$e(t) = (A_1/A)t + (A_2 \cdot A - A_1^2)/A \tag{26}$$

이는 誤차가 時間에 對한 一次函數로 增加하며 定常誤차는 無限大임을 보여준다.

한편, 最終值定理에 依하면

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s) \cdot \frac{1}{S^3} &= \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \cdot \frac{1}{S^2} \\ &= \frac{1}{S^2 + \lim_{s \rightarrow 0} S^2 \cdot G(s)} \\ &= \infty \end{aligned} \quad (27)$$

로 된다. 即, 加速度誤差定數가 零이 되어 最終值가 無限大로 된다.

加速力이 系統에 作用한 時間을 5秒, 10秒 20秒로 하고 K_a 의 增分을 微小하게 하여 誤差를 計算한 結果를 Fig. 7에 보인다.

4) 多項式으로 表示된 入力이 加해진 境遇

$r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$ 라 두면 $r'(t) = 1 + t$, $r''(t) = 1$, $r'''(t) = 0$ 이므로 誤差級數法에 依한 $e(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(t) &= (A_4/A_5)t + (A_4 \cdot A_5 \\ &\quad + A_3 \cdot A_5 - A_4^2)/A_5^2 \end{aligned} \quad (28)$$

이것은 常數項의 크기가 다를 뿐 時間에 比例하는 項은 3)의 境遇와 같다.

5) 正弦波入力이 加해진 境遇

三角函數의 導函數는 그 次數를 아무리 높히더라도 零이 되지 않으므로 正弦波入力에 對한 誤差는 無限級數로 表示된다. 여기서는 入力信號函數($\sin \omega t$)와 系統의 誤差傳達函數 $W_e(s)$ 를 9次까지 微分하여 誤差級數式을 構成하였다.*

* 系統에 正弦波入力을 加했을 때 實際出力은 다음과 같이 表示된다. (29)

$$|W(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

但, $W(j\omega)$: 系統의 閉 loop 傳達函數의 周波數傳達函數의 크기
 ϕ : 位相差

따라서 이 때의 入出力의 差는,

$$\sin \omega t - |W(j\omega)| \sin(j\omega + \phi) \quad (30)$$

이므로 그 振幅인 誤差 AF 는 다음과 같다.

$$AF = \sqrt{\{1 - |W(j\omega)| \cdot \cos \phi\}^2 + \{|W(j\omega)| \cdot \sin \phi\}^2} \quad (31)$$

$\sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ 와 AF 를 K_a 와 ω 를 微小增分으로 變化시켜 計算한 結果, 兩者의 크기가 一致하게 되는 ω 의 帶域은 K_a 가 增加함에 따라 넓어지는 傾向을 보였다. ω 가 0~1.4인 값을 取하는 限 兩者의 振幅은 K_a 에 關係없이 거의 一致하였다(Fig. 9 參照).

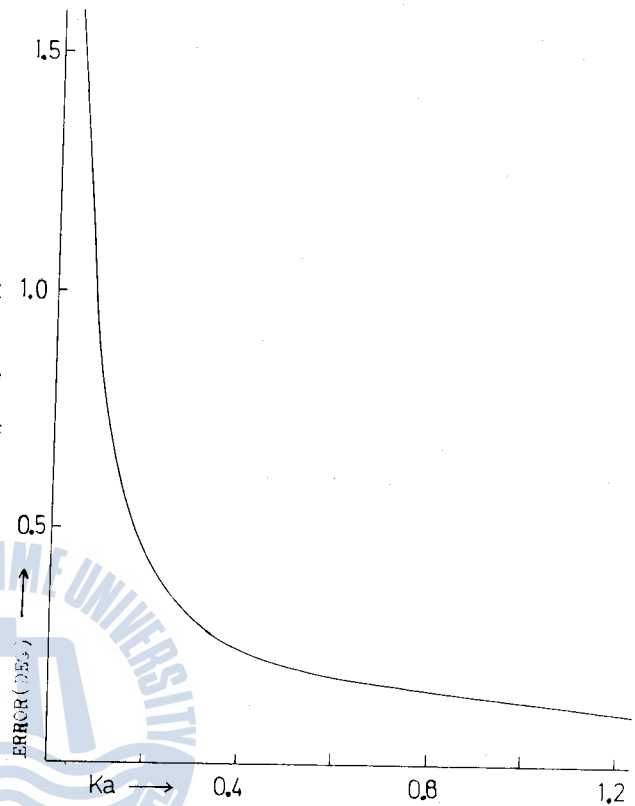


Fig. 6. Steady state error due to a ramp input vs. for the various values of K_a .

則,

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \sin \omega t \\
 r'(t) &= \omega \cos \omega t \\
 r''(t) &= -\omega^2 \sin \omega t \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

와 前項에서 計算된 誤差係數로부터 誤差 $e(t)$ 는 다음과 같이 된다.

$$e(t) = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad (32)$$

$$\text{但, } F_1 = C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega^2 + \frac{C_4}{4!} \omega^4$$

$$- \frac{C_6}{6!} \omega^6 + \frac{C_8}{8!} \omega^8$$

$$F_2 = C_1 \omega - \frac{C_3}{3!} \omega^3 + \frac{C_5}{5!} \omega^5$$

$$- \frac{C_7}{7!} \omega^7 + \frac{C_9}{9!} \omega^9$$

$$\varphi = \tan^{-1}[F_1/F_2]$$

K_a 와 ω 를 微小増分으로 變化시켜 誤差의 振幅을 計算한 結果는 Fig. 8 과 같다.

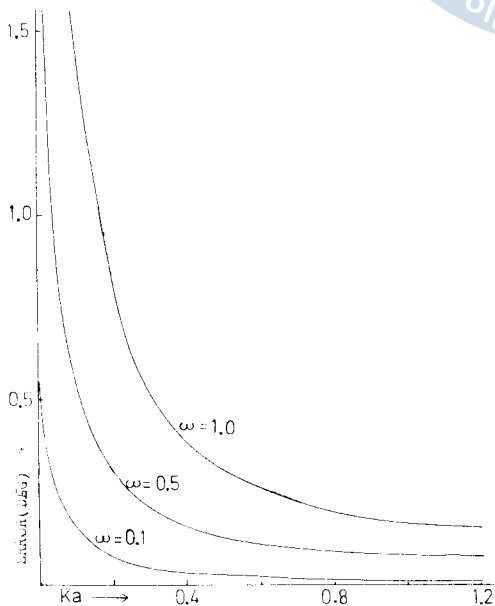


Fig. 8. Steady state error due to a sinusoidal input vs. K_a for the various values of ω .

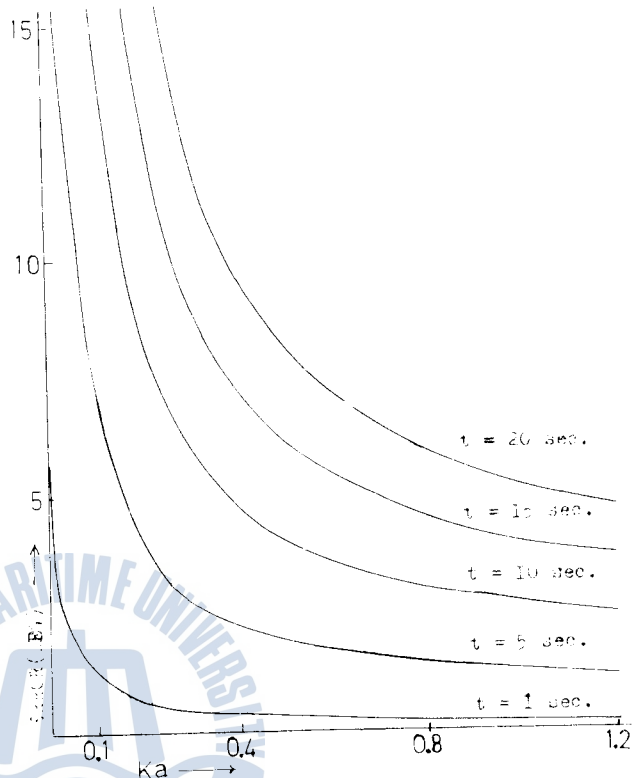


Fig. 7. Error due to a parabolic input vs. K_a for the various time elapses.

한편, $L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{S^2 + \omega^2}$ 이므로 이 境遇의 誤差 傳達函數 $E(s)$ 는,

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{\omega}{S^2 + \omega^2} \quad (33)$$

로 되나 $S \cdot E(s)$ 가 S 平面의 虛軸上에서 正則이 아니므로 最終值定理를 適用할 수 없다. 即, 誤差定數法에 依한 解析은 不可함이 立證된다.

위에서는 航海中 gyrocompass 의 追從系統에 加해지는 入力를 階段, ramp, parabola, 正弦波 形態로 假定하고 이들 入力에 對한 制御誤差 및 定常誤差를 理論적으로 解析하고 數值計算을 行하였다. 그 結果를 入力別, 增幅部利得別, 入力의 持續時間 t 別, 角周波數 ω 別로 區分·整理하면 다음 Table 2 와 같다.

階段入力에 對한 御制 誤差는 K_a 에 따라 過制動, 不足制動, 非制動形態로 變動하며, 制御誤差가

Table 2. Steady state error and control error for the different types of input functions.

input	steady state error	control error		
		K_a ; increase (t and ω ; fixed)	t ; increase (K_a and ω ; fixed)	ω ; increase (K_a and t ; fixed)
step input	zero	overdamped under-damped undamped	no relation	no relation
ramp input	fixed	decrease	fixed	no relation
parabolic input	infinite	decrease	increase	no relation
sinusoidal input	fixed	decrease	no relation	increase($\omega < 2$)

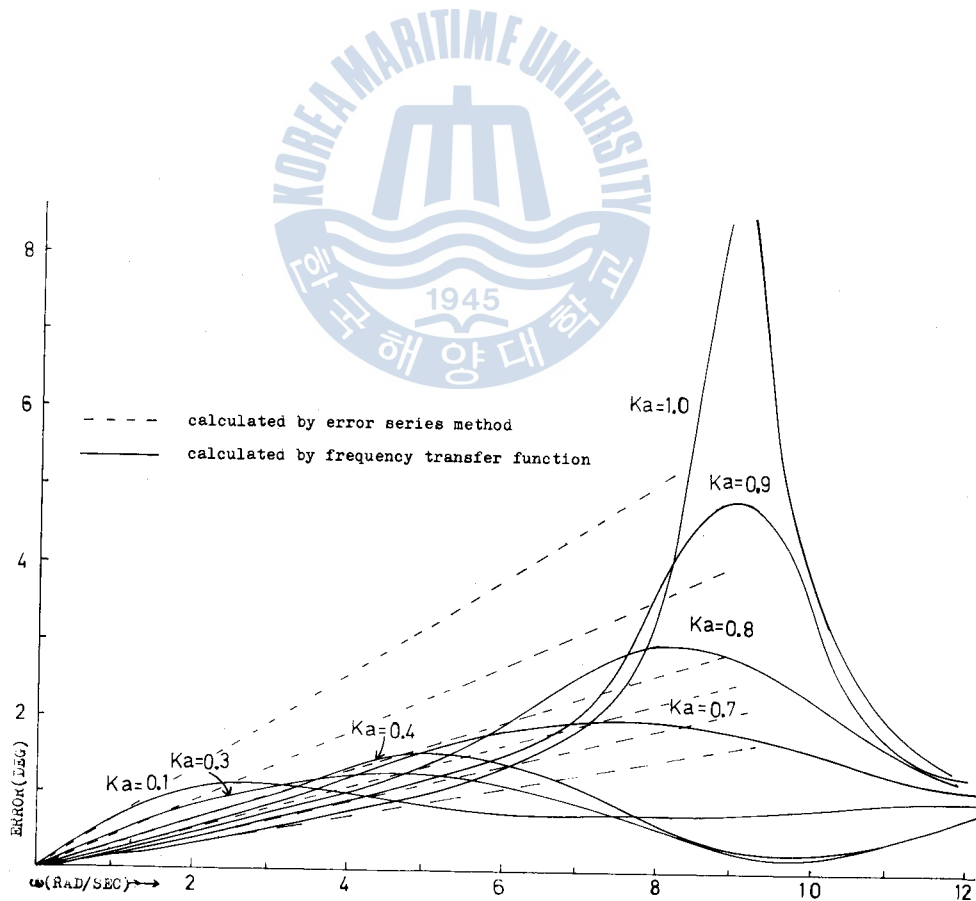


Fig. 9. Sinusoidal error characteristics calculated by both the error series and frequency transfer function for the various values of K_a .

零으로 整定되는 데 要하는 時間은 理論的으로는 無限大일 때이다. 그러나 數值計算 出力特性에 依하면 이 誤差가 微小한 값으로 整定되는 時間은 有限하여 K_a 에 對하여 一般的으로 決定된다. 한편 ramp 入力에 對한 것은 K_a 의 函數, parabola 入力에 對한 것은 K_a 와 t 의 函數, 正弦波 入力에 對한 것은 K_a 및 ω 의 函數로 된다. 즉, 階段 入力 以外의 入力에 對한 制御 誤差는 K_a , t , ω 에 依하여 決定된다. t 와 ω 는 外的인 要因에 依한 것이므로, t , ω 가 一定한 값으로 주어질 때 K_a 에 對한 制御 誤差의 特性을 살펴보면, ① 一般的으로 K_a 가 增加하면 制御 誤差는 減少하나 安定한 系統에서는 消滅되지 않으며, ② K_a 가 0.3 以上이 되면 誤差의 크기가 微小하고 K_a 의 增加에 對한 減少率도 작아지는 共通的인 特徵이 있음을 알 수 있다.

V. 結 言

gyrocompass의 方向指示機能 向上을 위한 基礎研究의 一環으로 追從部 制御系統의 安定성과 應答特性 및 定常特性을 理論的으로 解析하고 數值計算으로 定量的인 檢討를 하였다.

그 結果, 系統의 可變 parameter K_a (電力增幅部 利得)가 $0 < K_a < 1.2$ 의 範圍內의 값을 取하면 絶對安定성이 確保되고, 이 範圍內에서 K_a 가 增加할수록 相對安定度는 나빠지며, 入力에 對한 出力 應答의 整定時間의 短縮과 制御 誤差의 減縮에 比重을 두고 良好한 定常特性이 維持되도록 하려면 K_a 를 $0.3 < K_a < 0.7$ 로 하여야 한다는 것 등이 究明되었다.

한편, 階段 入力과 ramp 入力에 對한 定常 誤差는 誤差定數法으로 評價할 수 있으며 餘他の 入力에 對한 制御 誤差는 誤差級數法으로 評價할 수 있음이 밝혀졌다.

REFERENCES

- 1) P. Christoph und G. Chodinski (1978): Durch Fahrtmanöver verursachte Anzeigfehler beim Nichtschuler-abgestimmten Einkreiselkompass mit Ballistik, Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Heft 4.
- 2) P. Christoph (1972): Der Zweikreiselkompass unter Einwirkung Ostwestlicher Eahrmnöver, Dutche Gesellschaft fur Ortung und Navigation, Symposium über Kreiselkompass.
- 3) J.P. Tjardts (1972): Neuer Kreiselkompass für die Marine Truppen-praxis, Heft 5.
- 4) N. Kliemann (1974): Rechnergestutzer Kreiselkompass, Fabrik Nautischer Institut, p. 14.
- 5) P. Christoph (1974): Verfahren zur Rechnerischen Korrektur Systematischen Anzeigefehler Konvention-aller Zweikreiselkompass, Symposium über Kreiseltechnik, Nr. 3.
- 6) J. Klinkert (1974): The Correction of Speed Error, Safety at Sea International, pp. 21~26.
- 7) L. Sangjib (1980): System Representation for the Control System of the Follow-up Mechanism on the Marine Gyro Compass, The Korean Institute of Navigation, Vol. 4, No. 1, pp. 31~50.
- 8) V. Krishmanurthi (1972): Correlation Between Rouths Stability Criterion and Relative Stability of Linear System, IRE Trans. Automatic Control, Feb, pp. 144~145.
- 9) Ha Joo-Shik (1976): Automatic Control Engineering, pp. 91~97, Hae Yang Pub. Co. (in Korean).
- 10) Benjamine Kuo (1975): Automatic Control Systems 3rd ed, pp. 268~271.

