位相空間 사이의 關係에 대한 考察

金　章　郁

A Study on the Relation between the Topological Spaces

By

Kim Chang-Uk

<目　　次>

Abstract

It has already been a recognized fact that the real number space "R" is the topological space and at the same time the metric space. Therefore, the knowledge about "R" is of great importance in the abstructing process in the generalized topological space. In this paper the author intend to survey the property between the topolgical space and the metric space; the relation between one topological space and another; and according to present practical example in order to bring about intrest in mapping from one space to another

1. 序　論

實數空間 R은 位相空間이며 동시에 거리공간임은 周知의 사실이다. 따라서 R에 關한 지식은 一般空間(位相空間, 거리공간)에서의 抽象化 過程에서 大端히 중요한 일이다.

本論文에서는 이러한 위상공간 거리공간의 성질을 고찰하고 位相空間 사이의 關係를 생각해 보며 따라서 한 空間에서 딴 空間으로의 사상에 關心을 갖게하며 이를 實際 例를 들어 보는데 중점을 둔다.

2. 本　論

Example 1. 空間 S는 正則이나 Hausdorff 空間이 아니다.

S는 3점 P, Q, R로 되어있으며 位相은 다음과 같이 주어졌다면 $\phi, P, Q \cup R, S,$이 位相空間에서 한 집합이 開集合이 되는 完全條件은 그것이 閉集合이 되는 것임에 留意하면 S가 Hausdorff 空間이 아님을 알 수 있다. 即 $Q. R$은 서로素인 開集合으로써 Q, R를 各各 포함하는 것을 갖지 않음을 알 수 있다. 勿論이 空間이 regular 임은 自明한 事實이다.

Example 2. 位相空間이 Hausdorff 空間이지만 regular가 아님을 보여주는 경우를 알아보자;

集合 S로서 Cartesian 평면상의 $y\geq 0$인 $(x. y)$點 全體를 取하고 M은 S의 部分集合으로서 任意實數 x에 關한 $(x. o)$全部의 集合이다.

S의 各各 P와 實數 $r>0$에 대하여 集合 $Ur(\mathrm{P})$를 定義한다.

$P\epsilon S\text{-}M$이면 $Ur(\mathrm{P})=Sr(\mathrm{P})=Sr(\mathrm{P})\cap S.$

$P\epsilon M$이면 $Ur(\mathrm{P})=[Sr(\mathrm{P})\cap(\mathrm{S\text{-}M})]\cup P$

지금 任意 $P\epsilon S,$ 임의 $r>0$에 대한 $Ur(\mathrm{P})$ 모두로 이루어지는 집합족에 의해서 生成된 位相을 S에 넣어보자.

그러면 S가 位相空間이란 것은 明白한 일이다. 더우기 $p. q$가 두 相異點이라 하며 $\rho(\mathrm{p}. q)=2r$라 하면 $Ur(\mathrm{P})\cap Ur(q)=\phi$ 따라서 S는 Hausdorff 空間이다.

S가 正則이 아니라는 事實은 $P=(0.0)$와 $M\text{-}P$를 取하면 明白하다.

그러면 位相空間의 正則性을 判定하는데 더욱 효과적인 方法을 생각하면

Thl 空間 S가 regular인 完全條件은 S의 任意의 點 P와 P의 任意의 近傍 U에 대하여 $P\epsilon\overline{V}\subset U$를 만족하는 P의 近傍 V가 存在한다.

Proof: S가 regular이라 하면 그리고 S의 點 P와 P의 近傍 U가 任意로 주어졌다고 하면 $F=S-U$로서 F를 定義하면 F는 P를 포함하지 않은 閉集合이다. S는 regular이니 S의 두開集合 V, G로서 $P\epsilon V.$ $F\subset G.$ $V\cap G=\phi$를 만족한다.

따라서 $P\epsilon\overline{V}\subset U$

逆으로 생각하면 지금 P는 임의의 點, F는 P를 포함하지 않는 S의 閉集合이라하자. $U=S-F$라면 U는 P의 近傍이다. 따라서 P의 近傍 V로서 $P\epsilon\overline{V}\subset U$이다. 여기서 $P\epsilon V, F\subset S-\overline{V}, V\cap(S-\overline{V})=\phi.$ 따라서 S는 regular이다.

Th: 2. Hausdorff 空間 S의 모든 Compact 部分集合 A는 S의 閉集合이다.

Proof: q를 $S-A$의 任意의點이라한다. q의 近傍으로서 A와 만나지 않는것이 存在함을 證明하자. S가 Hausdorff 空間이니 A의 各點 P에 대하여 P의 近傍 $U_P. q$의 近傍 V_q로서 $U_p\cap V_q=\phi$인 것이 있다.

그러면 $A\subset\bigcup_{P\epsilon A}U_P;$

따라서 $\{U_P\}$는 A의 開被覆族이다. A는 compact 이니 A는 有限部分被覆族을 가졌다. 이것을 $U_1, U_2, \cdots\cdots\cdots, U_n$이라 하자. $V_1, V_2, \cdots\cdots\cdots,$ V_n을 $U_1, U_2, \cdots\cdots\cdots, U_n$에 대응하는 q의 近傍으로서 $U_i\cap V_i=\phi$인 것이라 하며 $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i$라면 V는 또한 q의 한近傍이며 $V\cap(\bigcup_{i=1}^{n}U_i)=\phi$ 또는 $V\cap A=\phi$

따라서 A는 閉集合이다.

Th3: 空間 S의 compact 部分集合은 countably compact 이다.

Proof: A는 compact 集合이라하자, K는 A의 任意의 무한집합이라 하면 K는 무한집합이니 可算無限部分集合을 가졌으며 이것을 $H=\bigcup_{n\epsilon I}\{x_n\}$라 하자. 단 $i\neq j$이면 $x_i\neq x_j$라 한다.

H가 극한점을 갖지 않았다고 가정하면 각 $n\epsilon I$에 대하여 $V_n\cap H=x_n$인 x_n의 近傍 V_n가 存

(3)

在한다. $A-H$의 各點 P에 대하여 P의 近傍으로서 $P\epsilon V_p, V_p\cap H=\phi$인 것이 있다. 따라서 $U=\bigcup_{P\epsilon A-H} V_p$는 開集合이다.

開集合族 $\{V_n\}$은 開集合 U와 더불어 A의 開被覆族을 이룬다. 분명히 이 被覆族의 有限元으로는 A를 被覆할 수 없다.

이것은 A가 compact 라는 前提에 모순이다.

實數空間에서는 compact 性과 countably compact 性은 同一概念이지만 다음과 같은 두 概念에서는 全然다르다.

Example 3. i) countably compact 空間으로서 compact 아닌것.

ii) countably compact 空間으로서 이 空間은 可算開被覆族을 가졌지만 有限部分被覆族을 갖지 못한것

Th 4: 空間 S가 compact 일 完全條件은 S의 任意 閉部分集合族 $\{A_\alpha\}$가 有限 交叉性을 갖었다면 $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \phi$이 成立한다.

Proof: S는 compact 이며 $\{A_\alpha\}$는 有限交叉性을 가진 S의 任意 集合族으로서 $\bigcap_\alpha A_\alpha=\phi$이라한다. De Morgan의 定理를 利用하여 $\{S-A_\alpha\}$는 S의 開被覆族임을 알 수 있다. 따라서 S는 compact 이니 有限被覆族이 存在하며 이를 $S-A_{\alpha_1}$, $S-A_{\alpha_2}$, ……$S-A_{\alpha_k}$라 하자. $S=\bigcup_{i=1}^{k}(S-A_{\alpha i})$ $=S-\bigcap_{i=1}^{k}A_{\alpha i}$ 따라서 $\bigcap_{i=1}^{k} A_{\alpha i}=\phi$이다. 따라서 $\{A_\alpha\}$가 有限交叉性을 가졌다는 前提에 모순된다.

逆으로 $\{G_\alpha\}$를 S의 開被覆族이라하며 S에서 有限交叉性이 이루어진다고 가정하자 만일 $\{G_\alpha\}$의 有限部分族이 S를 被覆할 수 없다면 De Morgan의 定理를 利用하여 閉被覆族 $\{S-G_\alpha\}$는 有限交叉性을 가졌음을 알 수 있다. 따라서 $\bigcap_\alpha(S-G_\alpha)\neq\phi$. $\bigcup_\alpha G_\alpha=S$이니 이것은 不可能이다. 따라서 S는 compact 이다.

Th5: T_1空間이 countably compact 인 完全條件은 S의 모든 可算開被覆은 有限部分被覆族을 갖는다.

Proof: S가 countably compact 임을 假定하고 $\{G_n\}$은 S를 被覆하는 可算開集合族이라하면 어떤 $\{G_n\}$의 有限部分族도 S를 被覆하지 못한다고 가정해보자. 그러면 整數 n에 대해서 $K_n=S-\bigcup_{i=1}^{n} G_i$는 空아닌 閉集合이다.

k_n의 임의점을 P_n라 하며 $H=\bigcup_{n\epsilon I}\{P_n\}$라 하자 처음 H가 무한집합이라 가정해보자. 그러면 S는 countably compact 이니 S의 點 P로서 H의 극한점인 것이 있다. S는 T_1空間이니 P의 모든 近傍은 무한히 많은 H의 점을 가졌다. 고로 P는 $H_n=\bigcup_{i\epsilon I}\{P_i\}$의 극한점이다.

그러나 H_n은 閉集合 K_n의 部分集合이다. 따라서 모든 n에 대해서 $P\epsilon H_n$이다. 따라서 모든 $n\epsilon I$에 대해서 $P\epsilon G_n$ 이것은 $\{G_n\}$이 S의 被覆族이라는 前提에 모순 따라서 H는 有限集合임을 알 수 있다. H가 有限集合이란 사실에서 주어진 任意整數 N에 대해서 $n>N$인 整數 n가 存在하며 $P_n=P\epsilon H$되는 P가 있다. 따라서 모든 n에 대해서 $P\epsilon k_n$ 이것은 $\{G_n\}$이 S의 被覆族이라는 가정에 모순이다.

다음 例題는 $Th\,4$. $Th\,5$의 證明方法을 참조하여 쉽게 얻어진다.

Example 4 T_1空間 S가 countably compact 일 完全條件은 有限交叉性을 가진 S의 可算閉集合族의 元全部의 共通部分이 空아닌것이다.

Th 6 S, T는 空間이고 $f:S\to T$는 사상이라 하면 이때 f가 S위에서 연속이될 完全條件는 T의 모든 開部分集合 G에 대하여 $f^{-1}(G)$가 S의 開部分集合이 된다.

Proof: 최초에 f는 S위에서 連續이라 하면 $f^{-1}(G)$의 各點 A에 대하여 $f^{-1}(G)$에 포함되는 A의 近傍 V_A가 存在한다. 따라서 $f^{-1}(G)$는 $f^{-1}(G)$의 각점 A의 이와 같은 近傍의 合으로 나타난다. 고로 S의 開集合이다. 한편 條件이 成立한다고 가정하자. A를 S의 任意點 G를 $f(A)$를 포함하는 T의 開集合이라하자, $V=f^{-1}(G)$로 정의하면 V는 $A\epsilon V\subset f^{-1}(G)$를 만족하는 S의 開集合이다. 따라서 f는 A에서 連續이다. A는 S의 任意元이니 f는 S위에서 連續이다.

Th 7: S, T는 位相空間이며 $f:S\to T$는 사상이라하면 f가 連續이면 아래와 같은 두條件이 成立하며 逆으로 그두條件中 하나가 成立하면 f는 連續이다.

ⓐ T의 모든 閉集合 H에 대하여 $f^{-1}(H)$는 S의 閉集合이다.

ⓑ S의 모든 部分集合 A에 대하여 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

Proof: 최초에 f가 連續일 必要充分條件은 ⓐ가 成立하는 것임을 證明하자, G를 T의 任意開集合이라하면 $T-G$는 T의 閉集合이다. 고로 $a)$에 의하여 $f^{-1}(T-G)$는 S의 閉集合이다. 고로 $f^{-1}(G)=S-f^{-1}(T-G)$이므로 $f^{-1}(G)$는 開集合이다. 卽 f는 連續이다. 반면 f가 연속이라하자 H를 T의 任意閉集合이라 하면 $G=T-H$는 開集合이고 $f^{-1}(G)=S-f^{-1}(T-G)=S-f^{-1}(H)$도 S의 開集合이다. 따라서 $f^{-1}(H)$는 閉集合이다.

계속해서 b)와 f의 연속성이 同値임을 밝혀보자.

b) 가成立한다고 가정하자 H를 T의 임의 閉集合, $K=H\cap f(S)$라면 $f^{-1}(H)=f^{-1}(K)$이다. P를 $f^{-1}(K)$의 極限點이라하자. 그러면 $P\epsilon\overline{f^{-1}(K)}$이다. 條件 b)에 依하면 $f(P)\epsilon\overline{f(f^{-1}(K))}=\overline{K}\subset H$, $f(P)\epsilon f(S)$이니 $f(P)\epsilon H\cap f(S)=K$ 따라서 $P\epsilon f^{-1}(K)=f^{-1}(H)$; $f^{-1}(H)$는 閉集合이다.

따라서 條件 a)에서 f는 연속사상이다. 끝으로 f가 연속이면 條件 b)가 成立함을 證明하자 A를 S의 任意部分集合이라하자 $f(\overline{A})=f(A\cup A')=f(A)\cup f(A')$. 한편 P를 $f(\overline{A})$의 任意點이라 하자. $P\epsilon\overline{f(A)}$임을 證明키로 하겠다.

$P\epsilon f(A)$이면 自明이다.

따라서 P를 $f(A)$에 속하지 않은 $f(A')$의 點이라 가정하면 $A'-A$의 點 q로서 $f(q)=P$인것이있다. U를 P를 포함하는 開集合이라면 $f^{-1}(U)$는 q의 近傍임을 알 수 있다. 그러나 q는 A의 極限點이므로 따라서 $f^{-1}(U)$에 속하는 A의 點, x가 存在한다. 點 $f(x)$는 $U\cap f(A)$에 속하고 $f(x)\neq P$. P가 $f(A)$의 極限點임을 의미하고 고로 $P\epsilon\overline{f(A)}$이다.

Example 5 S_1을 세점 a, b, c로 된 集合이라하며 그 位相을 ϕ, $a\cup b$, $a\cup c$, S_1이라하자 한편 S_2는 d, e, f 세점으로 된 集合이고 그 位相을 $\phi, d, e\cup f, S_2$라 한다. f : $S_1\to S_2$를 다음과 같이

정의한다. S_1의 임의점 x에 대하여 $f(x)=e$라 하자. S_2의 任意部分集合의 原像은 ϕ 또는 S_1이니 f는 연속사상이다. $(b\cup c)$는 S_1의 閉集合이지만 $f(b\cup c)=e$는 S_2의 閉集合은 아니다. 同時에 a는 S_1의 開集合이나, $f(a)=e$는 S_2의 開集合은 아니다.

Th 8 : S, T는 空間이고, 특히 S는 compact이고 $f:S\to T$는 연속사상이라면 이때 $f(S)$도 compact이다.

Proof : $\{U_\alpha\}$를 $f(S)$의 任意被覆族이라 하며 특히 U_α는 T의 開集合이라 한다. f가 연속이니 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$는 S의 開被覆族이며 특히 S가 compact이니 그중 有限族 $\{f^{-1}(U\alpha_1), f^{-1}(U\alpha_2) \cdots\cdots, f^{-1}(U\alpha_n)\}$으로서 S의 被覆族인 것이 있다.

$f(S)\subset f(f^{-1}(U\alpha_1)\cup\cdots\cdots\cup f^{-1}(U\alpha_n))=f(f^{-1}(U\alpha_1)\cup\cdots\cdots\cup f(f^{-1}(U\alpha_n))$

$=U\alpha_1\cup U\alpha_2\cdots\cdots\cup U\alpha_n$, 따라서 $f(S)$는 compact이다.

Example 6 : countably compact T_1空間의 연속사상에 의한 사상은 또한 countably compact임을 證明하겠지만 任意의 countably compact 空間의 연속사상에 의한 像이 countably compact 아닌 경우를 하나 들어 보게 한다.

S는 Example 3에서 定義된 空間이라 하고 空間 T를 다음과 같이 정의하자. T는 陽의 整數全部의 集合이며 T의 位相은 discrete topology이라하자. 여기서 그 任意 무한부분집합은 極限點을 갖지 않으므로 T는 countably compact는 아니다. 분명히 모든 陽의 整數 n에 대하여 $f(2n)=n$, $f(2n-1)=n$로 定義된 사상 $f:S\to T$는 S에서 T위로의 연속사상이다. 따라서 이 예제는 countably compact 空間이 연속사상에 依하여 countably compact 아닌 空間으로 사상되는 것이라 하겠다.

다음 경우는 원래 Kuratowski에 依한 것인데 한 空間에서 딴 空間위로의 1對 1 연속사상이 同位相사상이라 할 수는 없음을 보여주는 경우이다.

Example 7 : R을 實數空間이라하자. R의 部分空間 S로서는 $S=\{3n+2|;n=1,2,\cdots\}\cup[\bigcup_{n=1}^{\infty}(3n,3n+1)]$으로 定義되며 $T=(S-\{2\})\cup\{1\}$라 하자, 그러면 다음 세사상을 定義하자 即 사상 $f:S\to T$, 사상 $g:T\to S$와 사상 $h:S\to S$. 사상 f는 $x\neq 2$면 $f(x)=x$, $f(2)=1$로 定義하고 사상 g는 $x\leq 1$면 $g(x)=\frac{x}{2}$, $3<x<4$에 대해서는 $g(x)=\frac{x}{2}-1$, $x\geq 5$에 대해서는 $g(x)=x-3$으로 定義된다. 사상 h는 f와 g의 合成사상으로 정의한다. 即 $h(x)=g[f(x)]$ 여기서 f, g, h는 各各 1對1 連續사상이며 $f(S)=T$, $g(T)=S$이다. f는 同位相사상은 아니다. $\{2\}$는 S에서 開集合이지만 $f(2)$는 T의 開集合이 아닌 것이다. 마찬가지로 $O<x\leq 1$은 T의 開集合이나 g에 의한 이 區間의 像은 S에서 開集合이 아니다. 따라서 g 또한 同位相사상은 아니다. h는 S에서 S위로의 1對1 연속사상이다. 그러나 $\{2\}$는 S에서 開集合이나 $h(2)$는 S의 開集合이 아니니 同位相사상은 못된다.

Th 9. S, T는 空間, $f:S\to T$는 사상이며 F는 f의 graph($S\times T$의 部分集合)이라 하자. 이때 $h(a)=(a, f(a))$로 定義된 사상 $h:S\to F$가 同位상사상일 完全條件은 f가 연속이라는 것이다.

Proof : f가 連續이라하자. 모든 $a\epsilon S$에 대하여 $h(a)=(a, f(a))$로 定義된 사상 $h:S\rightarrow F$를 생각해보자. f는 모든 $a\epsilon S$에서 연속이니 주어진 F의 任意開集合 $W=F\cap G$에 대하여 $S\times T$의 開集合 $U\times V$로서 $(a. f(a))\epsilon U\times V\subset G$인 것이 있다. 단 U는 S의 開集合 V는 T의 開集合이라한다. $f^{-1}(V)$는 開集合이며 $a\epsilon f^{-1}(V)$이니 $U\cap f^{-1}(V)$는 S에서 a의 近傍이다. 더우기 $h(U\cap f^{-1}(V))\subset(V\times V)\cap F\subset(G\cap F)=W$. 따라서 h는 a에서 연속이다. h가 분명히 1對1이며 $h(s)=F$이니 h가 開사상인 것만 證明하면 充分하다. 따라서 h^{-1}가 연속인것을 證明하면 充分하다. h^{-1}는 사상 $g:S\times T\rightarrow S$의 F로의 縮小사상이라 생각할 수 있다. 단, g는 모든 $(P. q)\epsilon S\times T$에 대하여 $g(P. q)=P$로 定義한 것이다.

g는 分明히 연속사상이다. 逆으로 h가 同位相사상이라하자. 주어진 F의 任意 開集合 G에 대하여 $h^{-1}(G)$는 S의 開集合이다. 따라서 T의 任意開集合 V에 대하여 $(S\times V)\cap F$는 F의 開集合이니 $h^{-1}[(S\times V)\cap F]$ 또한 S의 開集合이다. $h^{-1}[(S\times V)\cap F]=f^{-1}(V)$임에 유의하면 f가 連續인것은 명백하다.

3. 結　　論

한 空間에서 딴 空間으로의 사상에 대하여 實際 문제를 들어 특히 連續사상은 閉集合도 開集合도 아님을 보았으며 countably compact T_1 空間의 連續사상에 의한 사상은 또한 countably compact 임을 證明하겠지만 任意의 countably compact 空間의 연속사상에 依한 像이 countably compact 아닌 것을 보았으며 한 空間에서 딴 空間위로 1對1 連續사상이 同位相사상이라 할 수 없는 것등을 보았다.

참고문헌

① J. L. Kelley, General Topology Newyork, 1955.
② N.Bourbaki, Elements of Mathematics, General Topology Addison-Wesley 1966.
③ 河田敬義, 三村征雄, 現代數學概說 Ⅱ, 岩波, 1965