

# 이중수조용 퍼지제어기 설계

김병만\* · 강원룡\* · 박승수\* · 이현식\* · 진강규\*\*

## Design of a Fuzzy Controller for Two-Tank Systems

*B. M. Kim · W. L. Kang · S. S. Park · H. S. Lee · G. G. Jin*

### 〈 목 차 〉

- |                |         |
|----------------|---------|
| I. 서 론         | V. 모의실험 |
| II. 시스템의 모델링   | VI. 결 론 |
| III. 퍼지모델링     | * 참고문헌  |
| IV. 퍼지상태제어기 설계 |         |

### Abstract

This paper presents a scheme for designing a fuzzy model-based controller for two-tank systems. The fuzzy model is characterized by fuzzy "if-then" rules which represent local input-output relationships at several operating points whose consequence parts are called linear subsystems of a nonlinear system. The parameters of the fuzzy model are adjusted by a genetic algorithm. Then an optimal state feedback controller is obtained based on the fuzzy model. A simulation on a two-tank system illustrates the performance of the proposed controller.

### Keywords

fuzzy modeling(퍼지모델링), nonlinear systems(비선형시스템), state feedback controller(상태피관 제어), genetic algorithms(유전알고리즘)

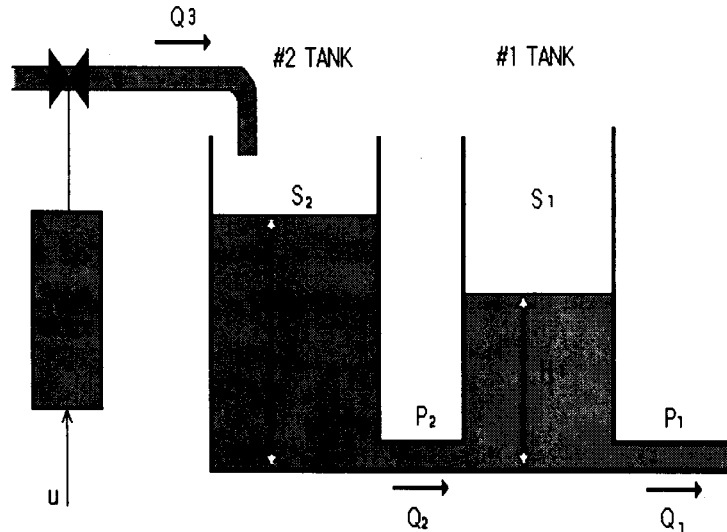
\* 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과  
\*\* 한국해양대학교 자동화·정보공학부 교수

## I. 서 론

최근 산업분야의 자동화가 가속됨에 따라 시스템들은 그 규모가 커지고 복잡해짐으로서 파라미터 변동, 모델링 오차, 비선형성, 외란 등 여러 불확실성을 내포하게 되고 이로 인해 시스템을 해석하고 제어하기가 대단히 어렵게 되었다. 이런 경우에 하나의 동작점에서 근사 선형모델을 얻고 이를 기반으로 설계한 고정 파라미터 제어기로는 넓은 범위의 동작영역에서 원하는 제어목적을 달성하기가 어렵다.

이러한 문제를 해결할 수 있도록 현재까지 여러 제어기법들이 제시되어 왔다[1-3]. 그 중에서 퍼지 제어는 불확실한 정보를 다룰 수 있고, 전문가의 제어지식을 직접 언어규칙으로 표현할 수 있고, 제어대상의 수학적 모델을 요구하지 않는 장점 때문에 복잡하고 불확실한 시스템의 제어에 많이 이용되어 왔다. 그러나 기존의 퍼지제어기 설계 방법은 입출력 공간의 퍼지분할, 소속함수와 제어규칙의 결정 등에 있어서 체계적인 해석방법이 부족하고, 안정성 증명이 매우 어렵다는 단점을 가지고 있다.

따라서 본 논문에서는 Takagi-Sugeno의 퍼지모델[4]에 기초하여 체계적으로 안정한 퍼지제어기를 설계하는 한 기법을 제안한다. 이중수조 시스템의 특성상 넓은 범위의 동작영역을 가질 때 발생하는 비선형성을 극복하기 위하여, 퍼지모델은 다수의 동작점에서 선형모델을 얻고 이를 "if-then" 형태의 문장으로 결합하여 제어규칙으로 표현된다. 다음 유전알고리즘을 사용하여 퍼지 모델의 파라미터들을 결정한 후 각 서브시스템에 대응하는 최적 상태제어치를 최적제어 기법으로 구하고, 이들을 결합하여 퍼지제어기를 얻는다. 제안된 방법을 이중수조 시스템의 수위제어 문제에 적용하고 시뮬레이션을 통해 그 유효성을 확인한다.



〈그림 1〉 이중수조 시스템의 구조

Fig 1. Structure of a two-tank system

## II. 시스템의 모델링

<그림 1>과 같은 이중수조 시스템을 고려하자. 제어대상 시스템은 2개의 탱크와 유량을 제어하기 위한 밸브와 서보모타로 구성된다. 그 동작 원리는 서보모타의 입력단에 전압이 가해지면 밸브가 개방되어 #2 탱크에 유체가 유입되고, 두 탱크의 수위 차에 의해 연결관을 통하여 #1 탱크쪽으로 유체가 흐르며 배출관을 통하여 외부로 배출된다

여기서

$S_1, S_2$  : 탱크 단면적 [ $m^2$ ]

$H_1, H_2$  : 탱크 수위 [m]

$P_1, P_2$  : 관의 단면적 [ $m^2$ ]

$Q_1, Q_2, Q_3$  : 유량 [ $m^3/sec$ ]

$u$  : 서보모타 입력 [V]

$K_v$  : 서보모타의 이득 [ $m^3/secV$ ]

$T_v$  : 서보모타의 시정수 [sec]

$g$  : 중력 가속도 [ $m/sec^2$ ]

<그림 1>의 시스템을 미분방정식으로 표시하면 다음과 같다.

$$S_1 \frac{dH_1}{dt} = P_2 \operatorname{sgn}(H_2 - H_1) \sqrt{2g|H_2 - H_1|} - P_1 \sqrt{2gH_1} \quad (1a)$$

$$S_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_3 - P_2 \operatorname{sgn}(H_2 - H_1) \sqrt{2g|H_2 - H_1|} \quad (1b)$$

$$T_v \frac{dQ_3}{dt} = -Q_3 + K_v u \quad (1c)$$

여기서  $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 은 부호함수이다. 상태변수로  $x_{p1} = H_1$ ,  $x_{p2} = H_2$ ,  $x_{p3} = Q_3$ 를 정의하면 (1)은 상태공간형으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p, u) \quad (2a)$$

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{x}_{p1} \quad (2b)$$

여기서  $\mathbf{x}_p = [x_{p1} \ x_{p2} \ x_{p3}]^T \in \mathbb{R}^3$ 는 시스템의 상태벡터,  $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^1$ 은 시스템의 출력,  $\mathbf{f}(\cdot)$ 은  $3 \times 1$  함수 벡터이고 그 요소는 다음과 같다.

$$f_1(\mathbf{x}_p, u) = \frac{1}{S_1} \left[ P_2 \operatorname{sgn}(x_{p2} - x_{p1}) \sqrt{2g|x_{p2} - x_{p1}|} - P_1 \sqrt{2gx_{p1}} \right] \quad (3a)$$

$$f_2(\mathbf{x}_p, u) = \frac{1}{S_2} \left[ x_{p3} - P_2 \operatorname{sgn}(x_{p2} - x_{p1}) \sqrt{2g|x_{p2} - x_{p1}|} \right] \quad (3b)$$

$$f_3(\mathbf{x}_p, u) = \frac{1}{T_v} \left[ -x_{p3} + K_v u \right] \quad (3c)$$

주어진 제어 목적을 달성하기 위하여 퍼지상태제어기를 설계하고 구현할 때, 상태벡터  $\mathbf{x}_p$ 의 피이드백이 요구된다. 기술적, 경제적인 이유로 모든 신호들을 계측하기가 어려울 때는 기존의 선형 상태관측기를 이용할 수 있겠으나, 최근 비선형 퍼지상태관측기를 설계하고 이를 이용하는 문제가 저자들에게 의해 검토되고 있다. 본 연구에서는  $\mathbf{x}_p$ 는 모두 계측할 수 있는 것으로 간주한다.

### Ⅲ. 퍼지모델링

#### 1. 퍼지모델

퍼지제어기를 설계하기 위해서는 우선 시스템의 퍼지모델을 얻는 작업이 요구된다. 대상 시스템은 강한 비선형성을 가지므로 다수의 동작점에서 선형화하고 “if-then” 규칙으로 결합하여 퍼지모델을 얻는다. 이는 Takagi-Sugeno 모델의 한 분류이나 결론부가 연속 상태방정식으로 표시되는 특징을 가진다[6].

선형모델을 얻기 위해  $l$ 개의 동작점이 가정되고,  $j \in [1, l]$ 번째 동작점에서의 모델의 상태벡터와 제어입력을 각각  $\mathbf{x}_0^j, u_0^j$ 로 표시한다. 만약  $j$ 번째 동작점 부근에서 운전된다면 모델의 상태벡터와 제어입력은 각각  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^j + \Delta \mathbf{x}^j, u = u_0^j + \Delta u^j$ 로 쓸 수 있다. 이때  $\Delta \mathbf{x}^j, \Delta u^j$ 는  $j$ 번째 동작점으로 부터의 오차를 의미한다. 이를 (2a)에 대입하고 선형화 과정을 거치면 다음 식을 얻는다.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}^j = \mathbf{A}^j \Delta \mathbf{x}^j + \mathbf{B}^j \Delta u^j \quad (4a)$$

여기서

$$\mathbf{A}^j = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^j \\ u = u_0^j}}, \quad \mathbf{B}^j = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^j \\ u = u_0^j}} \quad (4b)$$

(4a)의 서브시스템은 동작점 부근에서 원래 시스템의 입출력 관계를 묘사해준다. (4)를 퍼지규칙으로 결합한 퍼지모델은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{R}^j : \text{If } x_{pi} \text{ is } F^j, \text{ then } \Delta \dot{\mathbf{x}}^j = \mathbf{A}^j \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}^j \Delta u^j \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (5a)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (5b)$$

여기서  $\ell$  은 퍼지규칙의 수로서 모델의 개수와 일치하며,  $\Delta \mathbf{x}^j$ ,  $\Delta u^j$ 는 각각  $j$  번째 규칙의 오차상태벡터와 오차제어입력이고,  $\Delta \mathbf{x}$ 는 퍼지모델의 오차상태벡터이며,  $y$ 는 모델의 출력이고,  $F^j (1 \leq j \leq \ell)$ 는 퍼지집합,  $\mathbf{A}^j$ 와  $\mathbf{B}^j (1 \leq j \leq \ell)$ 는 (4b)로부터 얻어지는 행렬이고,  $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$ 이다.

입력변수 공간이 퍼지분할되고 이를 위해 “외부” 퍼지집합(입력공간의 양쪽 끝단에 정의된 퍼지집합)의 소속함수로는 시그모이드 형, “내부” 퍼지집합의 소속함수로는 가우시안 형의 함수가 이용된다. (6)은 이들을 표시한 것이다.

$$F^j(x) = \frac{1}{1 + e^{-\mu_j(x - o_j)}} \quad (j = 1 \text{ 또는 } \ell) \quad (6a)$$

$$F^j(x) = e^{-\frac{(x - m_j)^2}{2(\sigma_j)^2}} \quad (2 \leq j \leq \ell - 1) \quad (6b)$$

(5)의 퍼지시스템에  $x_{pi}$ ,  $u$ 가 입력되면  $\Delta u^j = u - u_0^j$  이므로 전체 규칙의 추론결과는 다음과 같게 된다.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{\ell} \xi^j (\mathbf{A}^j \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}^j \Delta u^j) \quad (7)$$

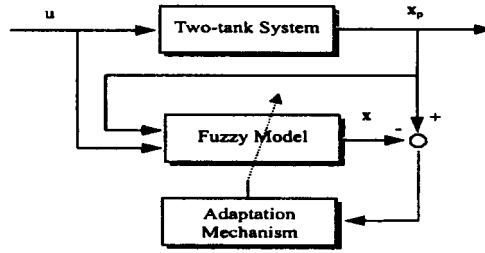
여기서  $\xi^j = \rho^j / \sum_{k=1}^{\ell} \rho^k$  이며,  $\rho^j = F^j(x_{pi})$  이고 항상  $\sum_{k=1}^{\ell} \rho^k > 0$  의 관계가 성립하는 것으로 가정한다

## 2. 퍼지모델의 파라미터 추정

(5)의 결론부 서브시스템은 (4)에 의해 일의적으로 결정되기 때문에 미지의 매개변수는 퍼지집합  $F^j$ 의 소속함수 모양을 결정짓는  $\mu_j, o_j, \sigma_j, m_j$ 이며, 이들은 다음 목적함수를 최소로 하도록 결정된다.

$$J = \int_0^{t_f} \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}\| \quad (8)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는 벡터 노름이고  $t_f$ 는 최종적분 시간으로서 이 이후의 적분값이 무시되어도 좋을 정도로 충분히 큰 값이다. 여기서 일어나는 최적화 문제는 유전알고리즘(Genetic algorithms: GAs)[7]으로 해결한다. <그림 2>는 퍼지모델의 파라미터를 추정하는 구성도를 보여주고 있다.



〈그림 2〉 유전알고리즘을 이용한 파라미터 추정 구성도  
 Fig 2. Parameter estimation of the fuzzy model using a

#### IV. 퍼지상태제어기 설계

이중수조 시스템의 제어목적은 #1 탱크의 수위가 희망하는 값에 정상편차없이 잘 추종하게 하는 것이므로 이를 위해 다음과 같이 새로운 상태 변수  $z$ 를 도입한다.

$$z = \int (y - y_r) dt \quad (9)$$

여기서  $y_r$ 은 설정치를 뜻한다. 이를 (4)와 결합하면 확장시스템은 다음과 같이 표시된다.

$$\hat{R}^j : \text{If } x_{p1} \text{ is } F^j, \text{ then } \Delta \hat{x}^j = \hat{A}^j \Delta \hat{x} + \hat{B}^j \Delta u^j \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (10)$$

여기서

$$\Delta \hat{x}^j = \begin{bmatrix} \Delta x^j \\ z \end{bmatrix}, \hat{A}^j = \begin{bmatrix} A^j & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}^j = \begin{bmatrix} B^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

최적제어 기법으로 각 서브시스템에 대한 상태제어기를 설계할 때 사용된 목적함수는 다음과 같다.

$$J^j = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ (\Delta \hat{x}^j)^T Q^j \Delta \hat{x}^j + r^j (\Delta u^j)^2 \right] dt \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (11)$$

여기서 하중행렬  $Q^j$ 와 계수  $r^j$ 은 응답특성이 충족되도록 사용자에게 의해 결정된다. (11)의 평가함수를 최소로 하는 최적제어칙을 결합한 퍼지제어기는 다음 식으로 주어진다.

$$L^j : \text{If } x_{p1} \text{ is } F^j, \text{ then } \Delta u^j = -K^j \Delta \hat{x}^j = -K_1^j \Delta x^j + k_2^j \int (y_r - y) dt \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{K}^j = [\mathbf{K}_1^j \ k_2^j]$ 는 케환이득 행렬이다. (12)를 다시 쓰면

$$L^j : \text{If } x_{pl} \text{ is } F^j, \text{ then } u^j = u_0^j - \mathbf{K}_1^j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^j) + k_2^j \int (y_r - y) dt \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (13)$$

원래 시스템에서 제어를 수행하면  $\mathbf{x}$ ,  $y$ 대신에  $\mathbf{x}_p$ ,  $y_p$ 를 피이드백하게 되므로 (13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

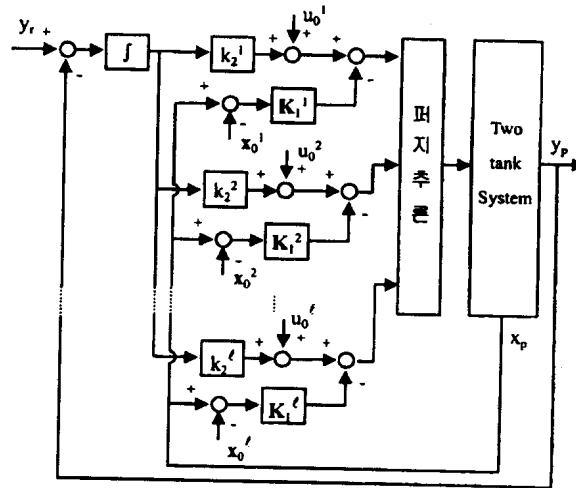
$$L^j : \text{If } x_{pl} \text{ is } F^j, \text{ then } u^j = u_0^j - \mathbf{K}_1^j(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_0^j) + k_2^j \int (y_r - y_p) dt \quad (1 \leq j \leq \ell) \quad (14)$$

전체 규칙의 추론 결과 퍼지제어기의 출력  $u$ 는 결국 다음과 같게 된다.

$$u = \sum_{j=1}^{\ell} \xi^j u^j \quad (15)$$

여기서  $\xi^j$ 는 (7)에서 사용된 것과 같다.

<그림 3> 은 본연구에서 제안한 퍼지제어기의 구조를 나타낸 것으로서 각 동작점에 대한 제어입력을 퍼지결합하여 최종적인 출력  $u$ 를 구하게 된다.



<그림 3> 퍼지제어기의 구조

Fig 3. Structure of the fuzzy controller

## V. 모의실험

본 연구의 유효성을 검증하기 위하여 모의실험을 실시하였다. 모의실험에 사용된 이중수조 시스템의 파라미터는 <표 1>과 같다.  $H_1$ 을 기점으로 하여 세 동작점이 선택되었고 이 때의 정상상태 값은  $(x_0^1, u_0^1) = ([0.3 \ 0.6 \ 0.0017]^T, 1.732)$ ,  $(x_0^2, u_0^2) = ([0.6 \ 1.2 \ 0.0024]^T, 2.4495)$ ,  $(x_0^3, u_0^3) = ([0.9 \ 1.8 \ 0.003]^T, 3.0)$  이고, 각각의 행렬은 다음과 같다.

〈표 1〉 이중수조 시스템의 파라미터.

Table 1. Parameters of the two-tank system.

파라미터	값	단 위
$P_1$	0.7069	$m^3$
$P_2$	0.7069	$m^3$
$S_1$	20.1062	$m^3$
$S_2$	11.3097	$m^3$
$K_v$	0.9896	$m^3/sec \cdot V$
$T_v$	1.0	sec

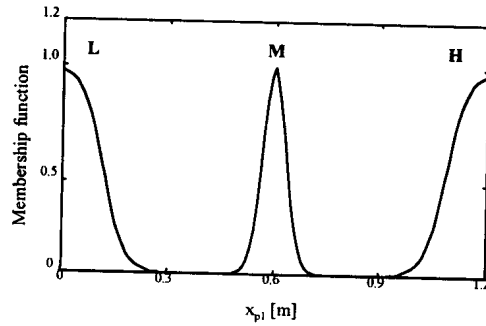
$$A^1 = \begin{bmatrix} -0.2842 & 0.1421 & 0.0 \\ 0.2526 & -0.2526 & 88.4194 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B^1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -0.2009 & 0.1005 & 0.0 \\ 0.1786 & -0.1786 & 88.4194 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -0.1640 & 0.082 & 0.0 \\ 0.1458 & -0.1458 & 88.4194 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

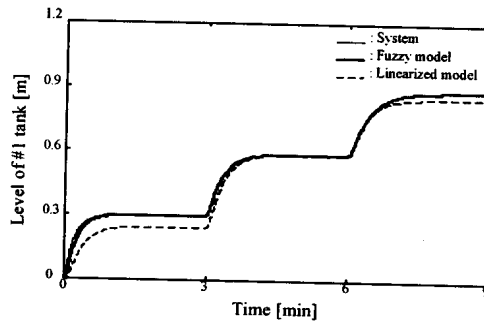
퍼지분할에는  $F^1, F^2, F^3$ 가 이용되었다. 이들은 각각 L(ow), M(edium), H(igh)의 의미를 가진다. 미지의 파라미터를 최적 조정하기 위한 유전알고리즘의 제어 파라미터로는 집단 크기  $N=10$ , 재생산계수  $\eta=1.7$ , 교배확률  $P_c=0.9$ , 돌연변이확률  $P_m=0.05$ 를 사용하였고[7], 그 결과  $\mu^1=-34.2148$ ,  $\sigma^1=0.116$ ,  $m^2=0.6$ ,  $\sigma^2=0.034$ ,  $\mu^3=34.2148$ ,  $\sigma^3=1.084$ 을 얻었다. <그림 4>은 조정된 퍼지집합을 보여 준다.





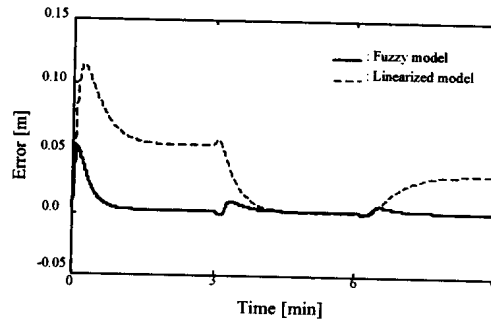
〈그림 4〉 조정된 퍼지집합의 소속함수

Fig 4. Membership functions of the tuned fuzzy sets.



〈그림 5〉 시스템, 퍼지모델과 선형모델의 계단응답

Fig 5. Step responses of the original system, the fuzzy model and the linearized m



〈그림 6〉 시스템과 두 모델간의 오차

Fig 6. Errors between the system and the two models.

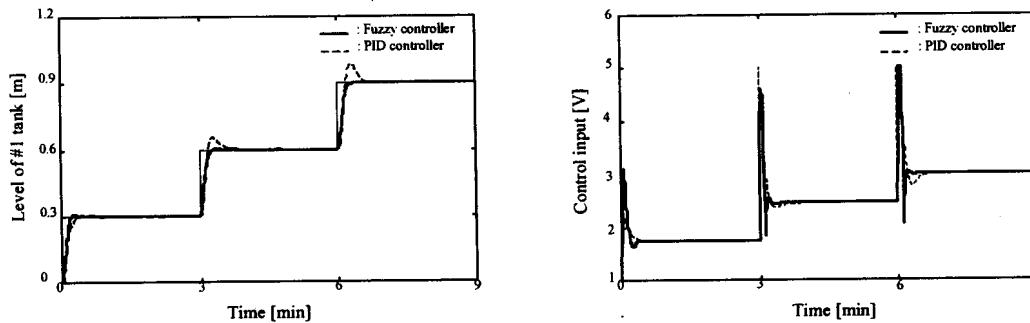
〈그림 5〉는 퍼지모델을 검증하기 위해 이중수조 시스템, 퍼지모델, 동작점( $x_0^2, u_0^2$ )에서 얻어진 선형 모델의 계단상 입력의 변화에 대한 출력을 그린 것이다. 퍼지모델은 전 범위에서 시스템과 비슷한

동특성을 보이지만, 선형모델은 동작점 부근에서만 만족스럽고 그 외 범위에서는 만족스럽지 못하다. 시스템과 두 모델과의 오차를 나타낸 <그림 6>은 퍼지모델이 더 우수함을 분명하게 보여준다.

만족스러운 응답특성을 얻도록 시행착오적으로 반복실험을 실시한 결과 모든 규칙에 대해 같은  $Q^j = \text{diag}(10, 5, 5, 50)$ 과  $r^j = 1$ 을 선정하였다. 이 때 계산된  $K^j$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K^1 &= [22.5844 \quad 7.2249 \quad 509.1872 \quad 7.0711] \\ K^2 &= [27.1227 \quad 7.2744 \quad 512.0841 \quad 7.0711] \\ K^3 &= [30.1064 \quad 7.2182 \quad 508.7979 \quad 7.0711] \end{aligned} \quad (16)$$

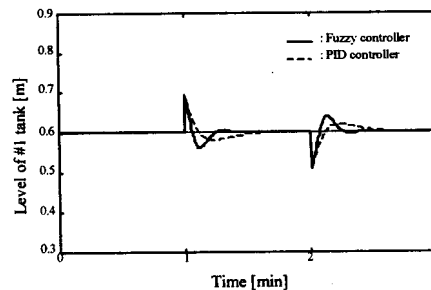
이들이 전체 시스템에 끼치는 안정성은 선행된 연구[5, 6]에 의해 쉽게 확인될 수 있었다. 설계한 퍼지제어기능에 성능을 PID 제어기와 비교하기 위해 두 제어시스템의 출력 응답을 그린 것이 <그림 7>이다. 이 때 PID 제어기의 파라미터는  $(x_0^2, u_0^2)$  부근에서 Ziegler-Nichols법으로 동조되었다. 그림에서 퍼지제어기의 성능이 우수함을 확인할 수 있다.



(a) 출력 (b) 제어입력

<그림 7> 퍼지제어기와 PID 제어기의 성능 비교.

Fig 7. Comparison of the fuzzy controller and the PID controller.



<그림 8> 외란의 변화에 따른 제안된 시스템과 PID제어시스템의 응답.

Fig 8. Responses of the proposed system and the PID control system to disturbance c

외란에 대한 퍼지제어기의 강인성을 확인하기 위하여 시스템이  $(x_0^2, u_0^2)$ 에서 정상운전 중일 때 1분이 경과한 후  $H_1$ 에  $+0.1[m]$ , 2분이 경과한 후 반대로  $-0.1[m]$ 의 계단상의 외란을 부과하고 응답을 그렸다. 비교목적으로 PID제어기의 응답과 동시에 그린 것이 <그림 8>이다.

## VI. 결 론

본 연구에서는 퍼지와 유전알고리즘 기법을 최적제어 이론과 결합하여 이중수조 시스템이 가지는 비선형성을 극복하고 성능이 우수한 제어기를 설계하는 문제를 다루었다. 먼저 다수개의 동작점에서 시스템의 선형모델을 얻고 이를 퍼지규칙으로 결합하여 퍼지모델을 구축하였다. 이 때 퍼지모델의 조건부 파라미터들은 유전알고리즘을 이용하여 최적 조정되었다. 다음 선형모델에 기초한 최적 상태 제어기를 설계하고 이들을 결합하여 안정하면서도 효과적으로 제어할 수 있는 퍼지제어기를 설계할 수 있었다. 모의실험을 통하여 제안된 방법의 성능을 PID제어기와 비교한 결과 유효성이 확인되었다.

## 참고문헌

1. IEEE Press, The Control Handbook, Vol. I, II, W. S. Levine(Ed.), CRC Press, Inc., 1996
2. C. T. Lin and C. S. Lee, Neural Fuzzy Systems, Prentice Hall International, Inc., 1996
3. K. M. Passino and S. Yurkovich, Fuzzy Control, Addison-Wesley, 1998
4. T. Tagaki and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modeling and Control", IEEE Trans. on SMC, Vol. SMC-15. No. 1, pp. 116~132, 1985
5. 이현식, 진강규, 김종화, 최형식, "모델에 기초한 비선형시스템의 퍼지제어", 한국퍼지 및 지능 시스템학회 논문지, Vol. 9. No. 2, pp. 170~178, 1999
6. 이현식, 주상래, 진강규, "상태공간형의 결론부를 가지는 퍼지모델", 한국박용기관학회 1999년도 춘계학술대회 논문집, pp. 13~18, 1999
7. 주상래, 진강규, "실수코딩 유전알고리즘과 제어기 동조에 응용", 제13회 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 342~345, 1998

