理論式과 經驗式에 依한 DIESEL機關 크랑크軸의 비틀림 剛性係數 比較에 關한 研究

宋　江　燮

A Study on the Comparison between the Theoretical and the Empirical Stiffness of the Diesel Engine Crankshafts

By
Song Kang-Sop

目　次

Abstract

Torsional vibration problems of the Diesel engine crankshafts have been studied since about 1920. Actual Diesel engine crankshafts are so different and complicated in shape and dimension, that some empirical formulas, not the theoretical ones, are used to calculate their torsional frequencies.

If their shapes and dimensions are very different from ordinary ones, these empirical formulas are unreliable. It will require a lot of time and measured records to derive their new reliable empirical formulas. In order to eliminate their inconvenience, a theoretical formula of any single crank throw is derived in this paper.

A table shows the influence numbers and their reciprocals for five different kinds of crank throws. The reciprocals mean the stiffnesses. The stiffnesses are calculated by general empirical formulas and author's theoretical one. Except the value of one kind of crank throw, the other theoretical values are rather nearer than any other empirical ones to manufacturer's calculated ones, which may be considered the most accurate values.

By means of applying this value to Holzer method, the calculation of natural frequencies for a real shaft system of the above-mentioned kind has been made. The result has shown that the theoretically calculated values are slightly nearer to the measured ones than the manufacturer's calculated ones.

1. 序　論

近來 船舶의 大形化에 따라 搭載하는 主機의 所要馬力도 增加하게 되어 大形 大馬力의 Diesel 機關이 出現하게 되었다. 이와같은 Diesel 機關의 大形化와 馬力의 增大는 機關의 部品構造나 全體構造에 있어서 剛性向上이 큰 問題點이 되고, 從來까지는 問題로 삼지 않았든 새로운 振動問題들이 登場하게 되었다.

Diesel 機關 크랑크軸의 비틀림振動에 關해서는 大略 1920年頃 부터 相當圓板, 相當軸의 置換에 依한 Holzer 解法等이 發達하고, Geiger 振動計 等으로 測定한 豊富한 資料에 依한 立證으로 共振狀態를 比較的 正確하게 推定할 수 있게 되었다.

크랑크軸의 形狀은 複雜함으로 大部分이 實驗結果를 加味한 經驗式을 使用하고 있다. 이들의 經驗式은 크랑크軸의 形狀이나 치수가 從來의 것과 顯著한 差異가 있을 때 信憑性이 稀薄해질 것이며, 이런 變化에 對處할 수 있는 信賴性있는 새로운 經驗式을 얻기 爲해서는 長時日의 實測結果를 必要로 할 것이다.

經驗式의 이러한 短點을 補完할 수 있도록 本論文에서는 軸系의 비틀림 固有振動數를 計算하는데 必要한 크랑크軸의 비틀림 剛性係數의 計算式을 理論的으로 求하고 이 理論式에 依한 軸系의 固有振動數와 經驗式에 依한 固有振動數와의 結果를 比較檢討하였다.

2. 크랑크軸系의 單純化

크랑크軸은 彈性과 質量이 連續分布하고 있는 自由度가 無限大인 複雜한 振動體이다. 더욱이 이것을 支持하고 있는 크랑크室도 變形을 일으키며, 直接 크랑크軸을 支持하는 베어링의 支持條件(拘束狀態)의 性質도 極히 複雜하다. 따라서 自由度가 적은 近似系로 置換하기 爲해서 크랑크軸系를 다음과 같이 單純化한다.

(1) 비틀림 振動에 있어서는 回轉軸方向의 變形(變位)은 極히 작으며 따라서 여기서는 無視한다.[(1)]*

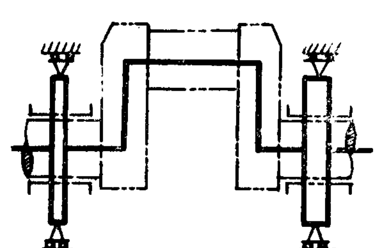


그림 1

* ( ) 안의 數字는 末尾의 參考文獻을 表示한다.

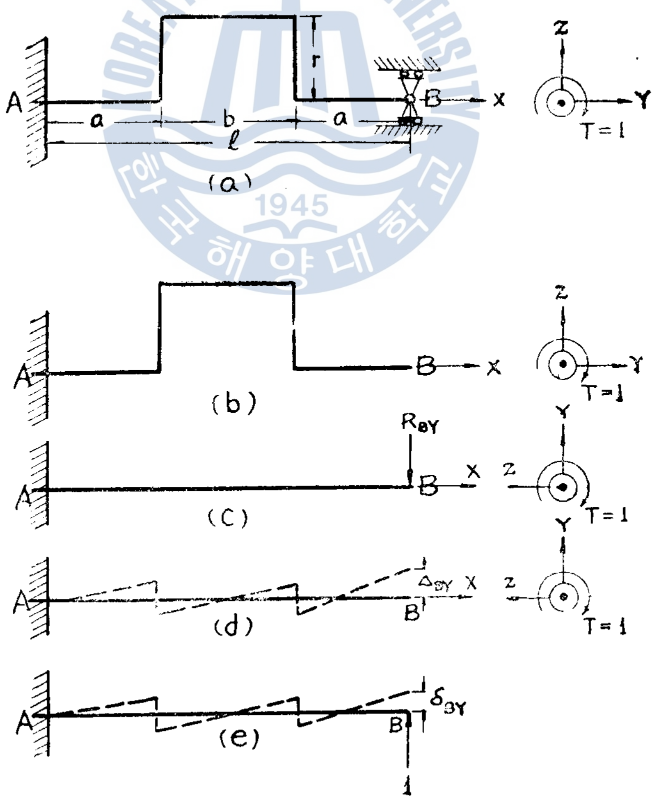
(2) 크랑크軸은 單純支持된 單一 크랑크 스로우가 結合된 것으로 假定한다(그림 1 參照).

(3) 各스로우의 質量은 저어널에 集中하고, 이 質量間은 無質量스프링으로 結合된 質點系로 假定한다.*

3. 影響係數

비틀림振動을 하는 軸系에 있어서는, 그 軸의 剛性係數와 軸周圍의 質量 慣性 모우먼트를 알면, 이系의 비틀림 固有振動數를 求할 수 있다. 비틀림 剛性係數란 單位角의 變位를 주는데 必要한 토오크를 말한다. 一般的으로 剛性係數를 直接 求하는 것보다 그의 逆數 즉 影響係數를 求한 다음 이로부터 剛性係數를 求하는 것이 容易하다.

앞 節에서 設定한 單一 크랑크 스로우는 그림 2(*a*)와 같은 不定靜問題임으로 Castigliano의 定理를 利用함으로써 *B*端에 單位 토오크를 加했을 때의 *X*-軸 둘레의 비틀림角 즉 影響係數 α_θ를 求할 수 있고, 이로부터 비틀림 剛性係數를 計算할 수 있다.



그 림 2

---

* 單一 크랑크 스로우系에 있어서는 質量을 크랑크 핀에 集中하는 것이 實系에 가깝다[2]. 그러나 多스로우系에 있어서는 質量을 크랑크 핀에 集中하는 代身에 兩편에 있는 저어널의 中心에 分割集中하는 것으로 看做하여도 큰 差異가 없다.

單純化한 크랑크軸의 左端을 固定하고 右端을 單純支持한 다음 그림 2(a)와 같이 各記號를 定한다.

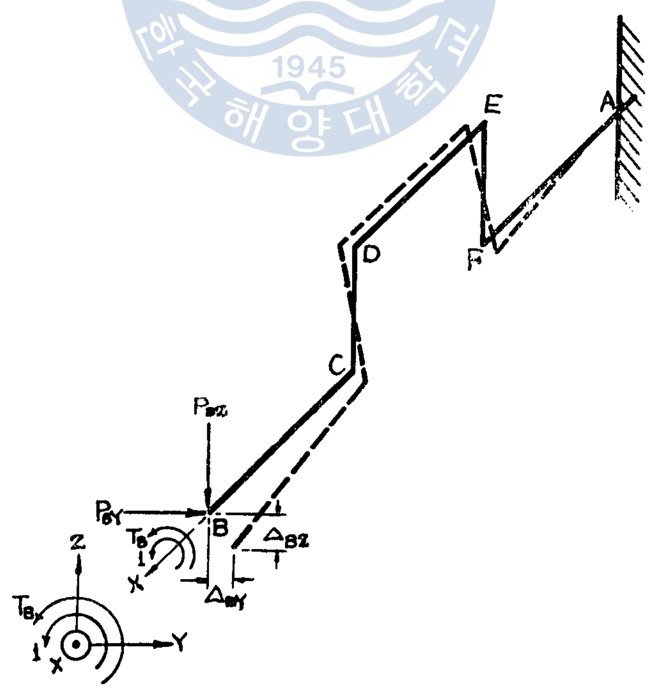
只今 $\alpha_{\theta\theta}$를 B端의 單純支持 拘束狀態를 除去한 다음 自由端 B에 單位 토오크를 加했을 때의 X-軸 둘레의 비틀림角〔그림 2(b)〕, $\alpha_{Y\theta}$를 自由端 B에 單位토오크를 加했을 때 B端을 單純支持했을 때와 같은 狀態로 復舊할 때, B端에 發生하는 Y-軸에 平行한 反力 R_{BY}로 因해서 生기는 비틀림角〔그림 2(a), (b), (c)〕이라고 하면, 拘束力으로 因하여 비틀림 剛性係數는 增加하고[3], 影響係數는 減少한다. B端에 單位토오크를 주었을때 Z−軸에 平行한 反力 R_{BZ}〔Appendix Ⅰ(b)參照〕는 없음으로 單純支持된 B端에 單位토오크를 加했을때 B端에 생기는 X-軸 둘레의 變位 α_{Θ}는

$$\alpha_{\Theta}=\alpha_{\theta\theta}-\alpha_{Y\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

4. 影響係數의 誘導

$\alpha_{\theta\theta}$, $\alpha_{Y\theta}$를 誘導하기 爲해서 그림 3과 같이 B端을 過剩拘束으로 取하고 이것을 除去한다.

Castigliano의 定理에 依하면, 힘(或은偶力,토오크)이 作用할때 作用點에서의 作用方向으로의 變位는 그 힘(偶力, 토오크)으로 因해서 發生하는 總內部變形 에너지를 作用하는 힘(偶力, 토오크)으로 一次遍微分을 함으로써 얻을 수 있음으로



그 림 3

$$\Delta=\frac{\partial W_i}{\partial P}$$

여기에서　W_i＝內部變形에너지

P＝힘

Δ＝變位

그런데

$$W_i=\int\frac{M^2dx}{2EI}$$

$$\therefore\quad \Delta=\frac{\partial}{\partial P}\int\frac{M^2dx}{2EI}=\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

같은 方法으로 그림 3의 B端의 X-軸 周圍에 單位 토오크와 假想토오크 T_B, 그리고 Y-軸에 平行한 假想힘 P_{BY}를 加하고, 單位 토오크로 因해서 生기는 X-軸 周圍의 비틀림角(α_{00})과 Y-軸에 平行한 變位(Δ_{BY})를 Castigliano의 定理를 適用하여 求하면 다음과 같다[1].

$$\alpha_{00}=\int T\left(\frac{\partial T}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{GJ}+\int M\left(\frac{\partial M}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{EI}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\Delta_{BY}=\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{EI}+\int T\left(\frac{\partial T}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{GJ}\quad\cdots\cdots(3)$$

Table 1은 自由端 B에 單位 토오크, 假想 토오크, 그리고 假想힘을 加했을 때의 各要素에서의 彎曲모우먼트와 토오크를 表示한다.

Table 1

Section	$x=0$ at	x increasing	Moment(M) P_{BZ}	Moment(M) P_{BY}	Torque (T)	$\frac{\partial M}{\partial P_{BZ}}$	$\frac{\partial M}{\partial P_{BY}}$	$\frac{\partial T}{\partial P_{BZ}}$	$\frac{\partial T}{\partial P_{BY}}$	$\frac{\partial M}{\partial T_B}$	$\frac{\partial T}{\partial T_B}$
BC	B	$B\to C$	$P_{BZ}x$	$P_{BY}x$	T_B+1	x	x	0	0	0	1
CD	C	$C\to D$	$P_{BZ}a$	$P_{BY}r+(T_B+1)$	$P_{BY}a$	a	x	0	a	1	0
DE	D	$D\to E$	$P_{BZ}(a+x)$	$P_{BY}(a+x)$	$P_{BY}r+(T_B+1)$	$(a+x)$	$(a+x)$	0	r	0	1
EF	E	$E\to F$	$P_{BZ}(a+b)$	$-P_{BY}r-(T_B+1)$	$P_{BY}(a+b)$	$(a+b)$	$-r$	0	$(a+b)$	-1	0
FA	F	$F\to A$	$P_{BZ}(a+b+x)$	$P_{BY}(a+b+x)$	$P_{BY}r+(T_B+1)$	$(a+b+x)$	$(a+b+x)$	0	r	0	1

$P_{BZ}=0$, $P_{BY}=0$, $T_B=0$으로 놓고 式(2)에 依據하여 積分을 遂行하면 α_{00}를 얻는다 [Appendix I (a) 參照].

$$\alpha_{00}=\frac{2a}{GJ_1}+\frac{b}{GJ_2}+\frac{2r}{EI_a}\quad\cdots\cdots(4)$$

여기에서

E＝縱彈性係數

G = 橫彈性係數

J_1, J_2 = 저어널 및 핀의 極慣性모우먼트

I_a = 크랑크 암의 X-軸에 關한 慣性모우먼트

$J_1 = J_2 = J$ 일 경우에는 式(4)는 다음과 같이 簡單化된다.

$$\alpha_{\theta\theta} = \frac{l}{GJ} + \frac{2r}{EI_a} \quad \cdots\cdots (4')$$

Table 1 에서 B 端에 加한 假想힘 P_{BZ}, P_{BY}, 그리고 假想토오크 T_B 를 0 으로 놓고 式(3)에 依據하여 積分을 遂行하면, B 端에서의 Y-軸에 平行한 變位 Δ_{BY} 는 다음과 같다〔Appendix I(c) 參照〕.

$$\Delta_{BY} = \frac{3r^2}{2EI_a} + \frac{ar}{GJ_1} + \frac{br}{GJ_2} \quad \cdots\cdots (5)$$

$J_1 = J_2 = J$ 인 경우에는 式(5)는 다음과 같이 된다.

$$\Delta_{BY} = \frac{3r^2}{2EI_a} + \frac{r}{GJ}(l-a) \quad \cdots\cdots (5')$$

같은 方法으로 $P_{BY}=1$, $P_{BZ}=0$, $T_B+1=0$ 을 Table 1 에 代入하고 式(3)에 依據하여 積分을 遂行하면, B 端에서 Y-軸에 平行하게 單位힘을 加했을 때의 Y-軸에 平行한 變位 δ_{BY} 를 얻을수 있나〔Appendix-I(d) 參照〕.

$$\delta_{BY} = \frac{a}{3EI_1}[8a^2+3b(l+a)] + \frac{b}{3EI_2}[3a^2+b(l+a)] + \frac{4r^3}{3EI_a} + \frac{r}{GJ_a}(2a^2+bl) + \frac{ar^2}{GJ_1} + \frac{br^2}{GJ_2} \quad \cdots\cdots (6)$$

$I_1 = I_2 = I$, $J_1 = J_2 = J$ 일 경우에는 式(6)은 다음과 같이 된다.

$$\delta_{BY} = \frac{1}{3EI}(8a^3+6abl+b^3) + \frac{4r^3}{3EI_a} + \frac{r}{GJ_a}(2a^2+bl) + \frac{r^2}{GJ}(l-a) \quad \cdots\cdots (6')$$

여기에서

I_1, I_2 = 저어널 및 핀의 斷面의 慣性 모우먼트

$J_a = ct^3w$

t = 암의 軸方向의 두께

w = 암의 幅

$c = w/t$ 에 따라 定해지는 常數[1],[5]

그런데 $\Delta_{BY} + R_{BY}\ \delta_{BY} = 0$ 임으로 反力 R_{BY} 는 式(5)와 (6)으로부터 다음과 같이 求할 수 있다.

$$R_{BY} = \frac{\Delta_{BY}}{\delta_{BY}} \quad \cdots\cdots (7)$$

따라서 Table 1 에서 B 端에 加한 假想힘과 假想토오크에 $P_{BY} = R_{BY}$, $T_B+1=0$ 을 代入하고 式(2)에 依據하여 積分을 하면 B 端에 R_{BY} 를 加했을때 생기는 비틀림角 $\alpha_{Y\theta}$ 를 求할 수 있다.

〔Appendix I(*e*) 參照〕.

$$\alpha_{Y0} = R_{BY}\left(\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{ar}{GJ_1}+\frac{br}{GJ_2}\right) = R_{BY}\ \Delta_{BY} = \frac{(\Delta_{BY})^2}{\delta_{BY}} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

式(1)에 式(4), (5), (6), (8)을 代入하면

$$\alpha_\Theta = \left(\frac{2a}{GJ_1}+\frac{b}{GJ_2}+\frac{2r}{EI_a}\right) - \frac{\left(\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{ar}{GJ_1}+\frac{br}{GJ_2}\right)^2}{\left\{\begin{array}{l}\frac{a}{3EI_1}[8a^2+3b(l+a)]+\frac{b}{3EI_2}[3a^2+b(l+a)] \\ +\frac{4r^3}{3EI_a}+\frac{r}{GJ_a}(2a^2+bl)+\frac{ar^2}{GJ_1}+\frac{br}{GJ_2}\end{array}\right\}} \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

$I_1=I_2=I,\ J_1=J_2=J$ 일 경우에는

$$\alpha_\Theta = \left(\frac{l}{GJ}+\frac{2r}{EI_a}\right) - \frac{\left[\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{r}{GJ}(l-a)\right]^2}{\frac{1}{3EI}(8a^3+6a\ bl+b^3)+\frac{4r^3}{3EI_a}+\frac{r}{GJ_a}(2a^2+bl)+\frac{r^2}{GJ}(l-a)} \quad \cdots\cdots\cdots(9')$$

5. 數值計算

그림 4(A), (B), (C), (D), (E)와 Table 2는 各種 機關의 크랑크 스로우를 表示한다. 이들 크랑크 스로우의 剛性係數의 값을 4節에서 誘導한 理論式으로 求하고(Appendix Ⅱ 參照), 이것을 從來의 經驗式[6],[7]으로 얻은 값과 比較하기 爲해서 Table 3에 表示하였다.

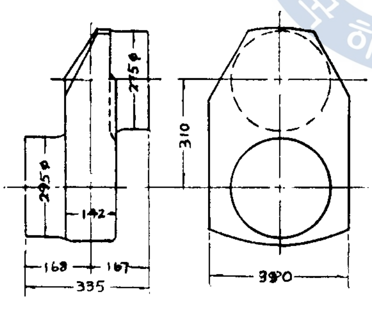


그림 4(A)

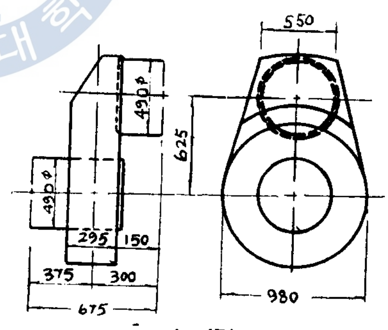


그림 4(B)

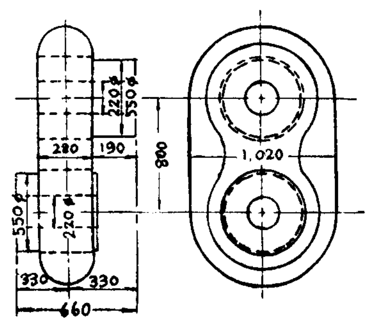


그림 4(C)

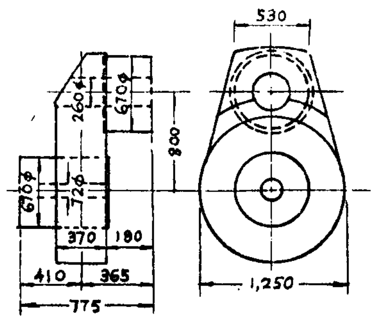


그림 4(D)

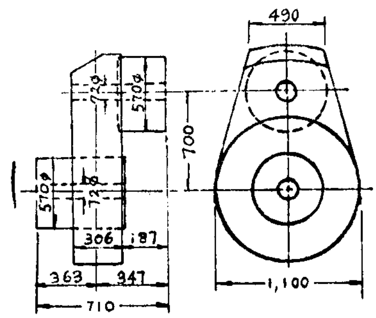


그림 4(E)

크랑크 스로우의 剛性係數는 實測한 資料가 없기 때문에 比較的 信頼할 수 있는 機關의 製作者가 使用한 振動計算時의 값[8]을 標準値로 使用하였다.

Table 2

Type of Engine	P. S. ×rpm	l mm	b mm	a mm	r mm	d_1 mm outer	d_1 mm inner	d_2 mm outer	d_2 mm inner	w mm	t mm
A	1,600×275	670	334	168	310	295		275		390	142
B	6,100×137	1,350	600	375	625	490		490		765	295
C	8,000×110.5	1,350	600	375	800	550	220	550	220	1,000	295
D	12,000×118	1,420	695	362.5	700	570	72	570	72	890	306
E	23,000×115	1,550	730	410	800	670	72	670	260	890	370

Table 3에 依하면 理論式으로 計算한 影響係數는 E機關을 除外하고는 他經驗式 보다 比較的 製作者의 計算値에 接近하고 있음을 알 수 있다.

6. 實軸系에의 適用

Plate Ⅰ은 E機關의 實軸系를 나타내며, Plate Ⅱ는 이 實軸系의 相當軸系와 彈性曲線을 나타낸다. 理論式으로 計算한 값과 製作者가 計算한 값 사이에 가장 差異가 많은 이 E機關의 軸系에 對한 1,2節 비틀림 固有振動數를 Holzer 法으로 計算하고(Appendix Ⅲ 參照), 이 理論式에 依한 計算値와 實測値를 Table 4에 表示하였다. 實測値는 (8)에 있는 資料를 引用하였다.

Table 3

	A				B				C				D				E			
	Influence Number	Spring Constant	Ratio	Difference %	I.N.	S.C.	Ratio	Diff. %	I.N.	S.C.	Ratio	Diff %	I.N.	S.C.	Ratio	Diff. %	I.N.	S.C.	Ratio	Diff. %
Manufacturer's Values	$\times 10^{10}$ 13.98		1.00	0	$\times 10^{10}$ 2.89		1.00	0	$\times 10^{10}$ 1.81		1.00	0	$\times 10^{10}$ 1.65		1.00	0	$\times 10^{10}$ 0.95		1.00	0
Timoshenko	14.34	6.97	1.03	+3	2.71	$\times 10^{10}$ 0.369	0.94	−6	1.76	$\times 10^{10}$ 0.568	0.98	−2	1.75	$\times 10^{10}$ 0.571	1.06	+6	0.93	$\times 10^{10}$ 1.075	0.97	−3
Tuplin	13.36	7.50	0.96	−4	2.32	0.432	0.80	−20	1.57	0.637	0.88	−12	1.56	0.641	0.95	−5	0.89	1.124	0.93	−7
Carter	14.81	6.75	1.06	+6	2.61	0.383	0.90	−10	1.73	0.578	0.96	−4	1.72	0.582	1.04	+4	1.010	0.990	1.06	+6
Geiger	13.42	7.45	0.96	−4	2.51	0.398	0.87	−13	1.65	0.606	0.92	−8	1.61	0.621	0.98	−2	0.913	1.095	0.96	−4
Ker Wilson	14.51	6.90	1.04	+4	2.81	0.356	0.97	−3	1.93	0.518	1.08	+8	1.77	0.565	1.07	+7	0.849	1.179	0.89	−11
三菱・長崎	13.57	7.47	0.97	−3	2.65	0.377	0.92	−8	1.90	0.527	1.06	+6	1.68	0.595	1.02	+2	1.041	0.960	1.10	+10
Theoretical Value	14.25	7.02	1.02	+2	2.81	0.356	0.97	−3	1.71	0.585	0.95	−5	1.67	0.598	1.01	+1	1.063	0.940	1.12	+12

I. N. = Influence Number

S. C. = Spring Constant

Diff. = Difference

Table 4

	One Node Vibration		Two Node Vibration	
	Frequency(cpm)	Difference %	Frequency(cpm)	Difference %
Measured Values	376	0	1,017	0
Manufacturer's Values	388.3	+3	1,053.4	+4
Theoretical Values	378	+1	696	—2

Table 4는 理論式에 依해서 計算된 振動數가 製作者에 依해서 計算된 振動數 보다는 實測値에 가깝다는 것을 보여준다.

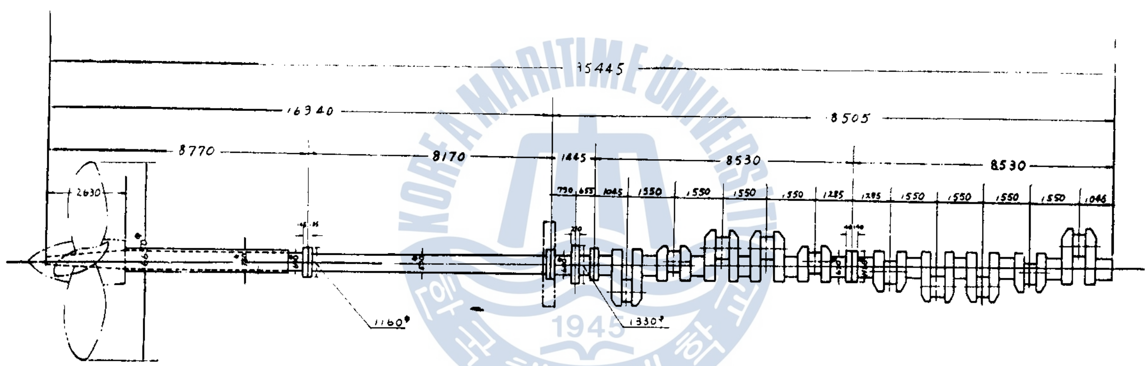


Plate I　*E* 機關의 軸系

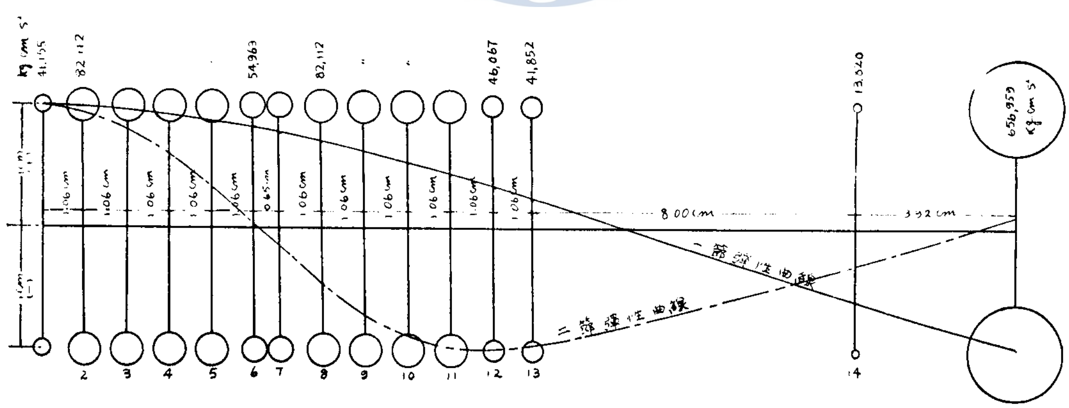


Plate II　*E* 機關軸系의 相當軸系($GJ=10^{10}$ kg-cm², r=1cm)

7. 結　論

Table 3이 보여주듯 理論式으로 計算한 數値는 他經驗式에 比해 가장 信賴할 수 있는 製作者의 計算値에 보다 가까움을 알수 있다. 또한 製作者의 計算値와 가장 差率이 많은 機關에 있

여서도 實軸系의 固有振動數計算에 있어서는 製作者의 固有振動數計算値 보다는 理論式에 依해서 計算된 固有振動數가 오히려 實測値에 가깝다는 것을 보여준다.

以上으로 本論文에서 誘導한 理論式은 經驗式에 比해 損色이 없음을 알수 있으며, 2節에서의 크랑크軸系의 單純化假定은 合理的이며 實系에 가깝다고 判斷할 수 있다.

이미 指摘한 바와 같이 經驗式의 短點은 크랑크軸의 形狀이나 치수가 從來의 것과 顯著한 差異가 있을때 信頼性이 없으며, 이런 急變에 對應하는 信頼性있는 새로운 經驗式을 얻기 爲해서는 많은 時間과 費用이 必要하게 되는 實測結果에 期待를 하여야 한다. 그러나 理論式은 이런 短點이 除去됨과 同時에 새로운 機關의 設計段階에서도 利用할 수 있음으로 本論文에서 誘導한 理論式의 利用은 効果的이라 生覺할 수 있다.

參考文献

(1) 八田桂三, 淺沼强, "內燃機關 ハンド ブツク," 朝倉書店, 1963, 3版, p—311
(2) 津田公一, "機械力學", 山海堂, 1958, 初版, p—43
(3) Den Hartog, "Mechanical Vibration", McGraw-Hill, 1956, 4th Ed., p—185
(4) J. S. Kinney, "Indeterminate Structure Analysis", Addison-Wesley, 1957, Abridged Ed., Chap. 4
(5) Timoshenko, MacCullough, "Elements of Strength of Materials", D. Van Nostrand, 1949, 3rd Ed., Chap. IX.
(6) 富山 修, "內燃機關の ねじり 振動と 疲れ强さ", コロナ, 1956, 初版, Chap 1.
(7) 赤堀昇, "舶用主機關の ねじり振動", 海文堂, 1961, Chap. 4
(8) 全孝重, "舶用內燃機關 主機 クランク軸系 縱ねじり 連成振動の マトリツクス 解法に 關する 研究" 東大機工學文論集, 第5輯, 1971

Appendix I

理論式의 誘導

(a) 單位 토오크로 因한 비틀림角($\alpha_{\theta\theta}$)

Table 1에서 自由端 B에 加한 假想힘 P_{BY}, P_{BZ}, 그리고 假想 토오크 T_B를 0으로 놓고 式(2)에 依據하여 積分을 하면

$$\begin{aligned}\alpha_{\theta\theta} &= \int T\left(\frac{\partial T}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{GJ} + \int M\left(\frac{\partial M}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{EI}\\ &= \int_B^C \frac{dx}{GJ} + \int_D^E \frac{dx}{GJ} + \int_F^A \frac{dx}{GJ} + \int_C^D \frac{dx}{EI} + \int_E^F \frac{dx}{EI}\\ &= \frac{1}{GJ_1}\Big[x\Big]_o^a + \frac{1}{GJ_2}\Big[x\Big]_o^b + \frac{1}{GJ_1}\Big[x\Big]_o^a + \frac{1}{EI_a}\Big[x\Big]_o^r + \frac{1}{EI_a}\Big[x\Big]_o^r\\ &= \frac{2a}{GJ_1} + \frac{b}{GJ_2} + \frac{2r}{EI_a} \quad\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

(b) Z-軸에 平行한 反力(R_{BZ})

Table 1에서 B端에 加한 假想힘 P_{BY}, P_{BZ}, 그리고 假想토오크 T_B를 0으로 놓고 式(3)에 依據하여 積分을 하면, 自由端 B에 單位토오크를 加했을 때의 Z軸에 平行한 變位 Δ_{BZ}를 求할 수 있다.

$$\Delta_{BZ}=\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P_{BZ}}\right)\frac{dx}{EI}+\int T\left(\frac{\partial T}{\partial P_{BZ}}\right)\frac{dx}{GJ}=0$$

그런데

$\Delta_{BZ}+R_{BZ}\delta_{BZ}=0$ 임으로

$R_{BZ}=0$

(C) 單位토오크로 因해서 생기는 Y-軸方向의 變位(Δ_{BY})

Table 1에서 自由端 B에 加한 假想힘 P_{BY}, P_{BZ}와 假想토오크 T_B를 0으로 놓고 式(3)에 依據하여 積分을 하면, 自由端 B에 單位토오크를 加했을 때의 Y-軸에 平行한 變位 Δ_{BY}를 求할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta_{BY}&=\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{EI}+\int T\left(\frac{\partial T}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{GJ}\\&=\int_C^D x\frac{dx}{EI}+r\int_E^F\frac{dx}{EI}+r\int_D^E\frac{dx}{GJ}+r\int_F^A\frac{dx}{GJ}\\&=\frac{1}{EI_a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^r+\frac{r}{EI_a}\left[x\right]_o^r+\frac{r}{GJ_a}\left[x\right]_o^b+\frac{r}{GJ_1}\left[x\right]_o^a\\&=\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{ar}{GJ_1}+\frac{br}{GJ_2}\quad\cdots\cdots(5)\end{aligned}$$

(d) 單位힘으로 因한 變位(δ_{BY})

自由端 B에 Y軸에 平行한 單位힘을 加했을 때의 Y-軸에 平行한 變位(δ_{BY})는 Table 1의 假想힘과 假想토오크에 $P_{BY}=1$, $T_B+1=0$을 代入하고 式(3)에 依據하여 積分을 하면 求할수 있다.

$$\begin{aligned}\delta_{BY}&=\int M\left(\frac{\partial M}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{EI}+\int T\left(\frac{\partial T}{\partial P_{BY}}\right)\frac{dx}{GJ}\\&=\int_B^C x^2\frac{dx}{EI}+\int_C^D x^2\frac{dx}{EI}+\int_D^E(a+x)^2\frac{dx}{EI}+r^2\int_E^F\frac{dx}{EI}+\int_F^A(a+b+x)^2\frac{dx}{EI}\\&\quad+a^2\int_C^D\frac{dx}{GJ}+r^2\int_D^E\frac{dx}{GJ}+(a+b)^2\int_E^F\frac{dx}{GJ}+r^2\int_F^A\frac{dx}{GJ}\\&=\frac{1}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^a+\frac{1}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^r+\frac{1}{EI_2}\left[a^2x+ax^2+\frac{x^3}{3}\right]_o^b+\frac{r^2}{EI_a}\left[x\right]_o^r\\&\quad+\frac{1}{EI}\left[(a+b)^2x+(a+b)x^2+\frac{x^3}{3}\right]_o^a+\frac{a^2}{GJ_a}\left[x\right]_o^r+\frac{r^2}{GJ_2}\left[x\right]_o^b\\&\quad+\frac{1}{GJ_a}(a+b)^2\left[x\right]_o^r+\frac{r^2}{GJ_1}\left[x\right]_o^a\\&=\frac{a}{3EI_1}(8a^2+9ab+3b^2)+\frac{4r^3}{3EI_a}+\frac{b}{3EI_2}(3a^2+3ab+b^2)\\&\quad+\frac{r}{GJ_a}(2a^2+2ab+b^2)+\frac{ar^2}{GJ_1}+\frac{br^2}{GJ_2}\\&=\frac{a}{3EI_1}\left[8a^2+3b(l+a)\right]+\frac{b}{3EI_2}\left[3a^2+b(l+a)\right]+\frac{4r^3}{3EI_a}\\&\quad+\frac{r}{GJ_a}(2a^2+bl)+\frac{ar^2}{GJ_1}+\frac{br^2}{GJ^2}\quad\cdots\cdots(6)\end{aligned}$$

(e) 反力 R_{BY}로 因한 비틀림角(α_{Y0})

같은 方法으로 Table 1 에서 B 端에 加한 假想힘과 假想토오크에 $P_{BY}=R_{BY}$, $T_B+1=0$을 代入하고 式(2)에 依據 積分을 하면 B 端에 R_{BY}를 加했을때 生기는 비틀림角 α_{Y0}를 求할수 있다.

$$\alpha_{Y0}=\int T\left(\frac{\partial T}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{GJ}+\int M\left(\frac{\partial M}{\partial T_B}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$=R_{BY}\ r\int_D^E\frac{dx}{GJ}+R_{BY}\ r\int_F^A\frac{dx}{GJ}+R_{BY}\int_C^D x\frac{dx}{EI}+R_{BY}r\int_E^F\frac{dx}{EI}$$

$$=R_{BY}\left\{\frac{r}{GJ_2}\Big[\ x\ \Big]_0^b+\frac{r}{GJ_1}\Big[\ x\ \Big]_0^a+\frac{1}{EI_a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r+\frac{r}{EI_a}\Big[\ x\ \Big]_0^r\right\}$$

$$=R_{BY}\left(\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{ar}{GJ_1}+\frac{br}{GJ_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

上式의 括弧안은 B 端에서 Y-軸方向으로 單位힘을 加했을 때의 B 端에서의 비틀림角임으로 Maxwell-Betti 의 相反定理에 依據, 이 量은 B 端에서 X-軸周圍에 單位 토오크를 加했을때의 Y-軸方向의 變位인 式(5)의 Δ_{BY}와 같아야 함으로, 여기에서도 Maxwell-Betti 의 相反定理가 立證된다.[4]

Appendix II

C機關의 크랑크 스로우에 對한 剛性係數의 計算例

$a=33.0\ cm$ $\qquad t=28.0\ cm$

$b=66.0\ cm$ $\qquad w=105.0\ cm$

$r=80.0\ cm$ $\qquad G=8.3\times10^5\ kg/cm^2$

$l=132.0\ cm$ $\qquad E=2.1\times10^6\ kg/cm^2$

$$J=\frac{\pi\{(55)^4-(22)^4\}}{32}=0.87\times10^6\ cm^4$$

$$I=\frac{J}{2}=0.44\times10^6\ cm^4$$

$$I_a=\frac{tw^3}{12}=\frac{28\times(105)^3}{12}=2.71\times10^6\ cm^4$$

$$J_a=ct^3w=0.277\times(28)^3\times105=0.64\times10^6\ cm^4$$

$$\alpha_{Y0}=\frac{l}{GJ}+\frac{2r}{EI_a}=\frac{135}{8.3\times10^5\times0.87\times10^6}+\frac{2\times80}{2.1\times10^6\times2.46\times10^6}$$

$$=2.175\times10^{-10}\ rad/kg\text{-}cm.$$

$$\Delta_{BY}=\frac{3r^2}{2EI_a}+\frac{r}{GJ}(l-a)$$

$$=\frac{3\times(80)^2}{2\times2.1\times10^6\times2.46\times10^6}+\frac{80}{8.3\times10^5\times0.87\times10^6}(135\text{-}37.5)$$

$$=1.266\times10^{-8}\ cm/kg\text{-}cm$$

$$(\Delta_{BY})^2=1.6\times10^{-16}$$

$$\delta_{BY}=\frac{1}{3EI_1}[8a^3+6abl+b^3]+\frac{4r^3}{3EI_a}+\frac{r}{GJ_a}[2a^2+bl]+\frac{r^2}{GJ}[l-a]$$

$$= \frac{1}{3\times 2.1\times 10^6\times 0.44\times 10^6}[8\times(37.5)^3+6\times 37.5\times 60\times 135+(60)^3]$$

$$+\frac{4\times(80)^3}{3\times 2.1\times 10^6\times 2.46\times 10^6}+\frac{80}{8.3\times 10^5\times 0.69\times 10^6}[2\times(37.5)^2+60\times 135]$$

$$+\frac{(80)^2}{8.3\times 10^5\times 0.87\times 10^6}\ (135-37.5)=3.40\times 10^{-6}\ cm/kg$$

$$\alpha_{Y\theta}=\frac{(\Delta_{BZ})^2}{\delta_{BZ}}=\frac{1.6\times 10^{-16}}{3.40\times 10^{-6}}=0.47\times 10^{-10}\ \text{rad/kg-cm}$$

$$\alpha_{\Theta}=\alpha_{\theta\theta}-\alpha_{Y\theta}=(2.175-0.47)\times 10^{-10}=1.71\times 10^{-10}\ \text{rad/kg}\cdot\text{cm}$$

$$\kappa=\frac{1}{\alpha_\theta}=0.585\times 10^{10}\ \text{kg-cm/rad}$$

Appendix III

Holzer 法에 依한 비틀림 固有振動數計算例

a) 1 節 振 動

$N=378$ cpm, $\omega=\frac{N}{9.55}=\frac{3.78}{9.55}=39.6$

$q^2=r^2\omega^2=1,570$ $r=1$cm, $GJ=10^{10}$ kg-cm^2

No. of Mass	m	$mq^2\theta$	θ	$mq^2\theta$	$\Sigma mq^2\theta$	l	$\frac{l\Sigma mq^2\theta}{GJ}$
1	41,155	$\times 10^7$ 6.45	1.0000	$\times 10^7$ 6.45	$\times 10^7$ 6.45	1.06	0.0063
2	82,112	12.90	0.9932	12.80	19.25	1.06	0.0204
3	82,112	12.90	0.9728	12.54	31.79	1.06	0.0337
4	82,112	12.90	0.9391	12.10	43.89	1.06	0.0466
5	82,112	12.90	0.8925	11.50	55.39	1.06	0.0588
6	54,963	8.63	0.8337	7.20	62.59	0.65	0.0407
7	54,963	8.63	0.7930	6.86	69.45	1.06	0.0736
8	82,112	12.90	0.7194	9.28	78.73	1.06	0.0835
9	82,112	12.90	0.6359	8.20	86.93	1.06	0.0921
10	82,112	12.90	0.5438	7.02	93.95	1.06	0.0995
11	82,112	12.90	0.4443	5.74	99.69	1.06	0.1057
12	46,067	7.23	0.3386	2.45	102.14	0.95	0.0972
13	41,852	6.58	0.2414	1.59	103.73	8.00	0.8300
14	13,820	2.17	−0.5886	−1.28	102.45	3.92	0.4030
15	656,959	103.00	−0.9916	−102.00	0.45		

b) 2 節 振動

$N = 996$ cpm, $\omega = \dfrac{N}{9.55} = \dfrac{996}{9.55} = 104.3$

$q^2 = r^2\omega^2 = 10,900$, $r = 1$ cm, $GJ = 10^{10}$ kg-cm^2

No. of Mass	m	mq^2	θ	$mq^2\theta$	$\Sigma mq^2\theta$	l	$\dfrac{l\Sigma mq^2\theta}{GJ}$
1	41,155	$\times 10^8$ 4.48	1.0000	$\times 10^8$ 4.48	$\times 10^8$ 4.48	1.06	0.0475
2	82,112	8.95	0.9525	8.52	13.00	1.06	0.1377
3	82,112	8.95	0.8148	7.28	20.28	1.06	0.2150
4	82,112	8.95	0.5998	5.37	25.65	1.06	0.2720
5	82,112	8.95	0.3278	2.93	28.58	1.06	0.3025
6	54,963	5.99	0.0253	0.15	28.73	0.65	0.1870
7	54,963	5.99	−0.1617	−0.97	27.76	1.06	0.2940
8	82,112	8.95	−0.4557	−4.07	23.69	1.06	0.2510
9	82,112	8.95	−0.7067	−6.32	17.37	1.06	0.1840
10	82,112	8.95	−0.8907	−7.97	9.40	1.06	0.0998
11	82,112	8.95	−0.9905	−8.87	0.53	1.06	0.0056
12	46,067	5.02	−0.9961	−5.00	−4.47	0.95	−0.0425
13	41,852	4.57	−0.9536	−4.35	−8.82	8.00	−0.7050
14	13,820	1.51	−0.2486	−0.38	−9.20	3.92	−0.3610
15	656,959	71.60	+0.1124	8.06	−1.14		