

圓形境界를 가진 自由水面의 定常波에 關하여

俞 洪 善

On the fundamental normal mode of the free oscillation
of the water surface with a circular boundary

Yu Hong Sun

Abstract

The fundamental normal mode of the free oscillation of water in a circular basin is investigated exactly, in two cases;

1. when the basin has a uniform depth, and
2. when the basin has a paraboloidal base.

For the 2nd case, an approximate formula to estimate the frequency of the fundamental normal mode is derived also. All the investigation is restricted to the normal mode with a circular symmetry.

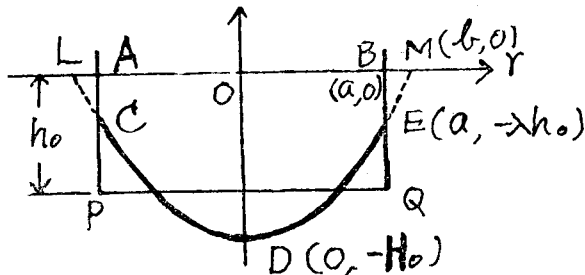
<目 次>

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. 緒 論 | 3-2. 진동수 계산을 위한 근사식 |
| 2. 균일한 水深의 경우 | 4. 결 론 |
| 3-1. 바닥이 회전포물면인 경우 | |

1. 緒 論

균일한 수심의 물통에서의 水面定常波에 관해서는 水面境界가 원형, 사각형, 타원형 등일 경우에 대해서 여러 사람의 결과가 나와 있다. 水深이 均一하지 않을 경우에 대해서는 그 解를 얻기가 쉽지 않다. 물통의 바닥이 中心에서 邊으로 가면서 서서히 漸變하는 경우에 대해서는 Lamb 교수의 결과가 있다.

이 論文은 Lamb 교수의 결과보다 더 포괄적이고 정확한 결과를 얻고자 한다. 우선 바닥의 변화에 더 일반성을 주기 위해 회전포물면의 바닥을 택했고, 곡률을 광범위하게 변화시킬 수 있는 Parameter를 도입했으며, 경계조건을 단순화하기 위해 경계면을 연직면으로 하였다. 그리고 이 논문에서는 수면의 주위경계가 원형일 경우를 우선 택했고 해에 대해서도 원형대칭인 경우만을 우선 취급했다.



여러가지 다른 경우에 대해서는 후일 다를 생각이다.

2. 균일한 水深의 경우

수면과의 파동방정식을 표현하기 위해 수면에 직교좌표계 (x, y) 혹은 (r, φ) 를 도입한다. 수면의 임의점에서의 수심을 h , 중력가속도를 g , 수면이 평형위치에서 교란되어 생기는 연직방향의 변위를 Z 라 하면 파동방정식은

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta t^2} = g \operatorname{div} (h \operatorname{grad} Z) \dots \dots \dots (1)$$

가 된다.

우선 수심이 균일한 원통형의 물통의 경우를 생각해 보자. 그림에서 사변형 APQB는 이 물통의 단면을 나타내고 수평축 r 은 교란되지 않은 자유수면을 나타낸다. 중심축 Z 가 자유수면과 교차하는 점 즉 원형수면의 중심을 원점으로 좌표계를 도입한다. 이 경우 파동방정식은 $h = h_0$ 로 상수이므로 다음과 같이 된다.

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta t^2} = gh_0 \nabla^2 Z \dots \dots \dots (2)$$

이 방정식은 흔히 볼 수있는 파동 방정식이므로 그 해를

$$Z(r, \varphi, t) = R(r, \phi) \cos(\omega t + \theta) \dots \dots \dots (3)$$

로 공간 종속부분과 시간 종속부분으로 분리할 수 있다. 그리고 R 에 대해서도 r 만의 함수 $R(r)$ 이라고 우선 가정하면 (2)와 (3)에서 다음 식을 얻는다.

$$\nabla^2 R(r) + \frac{\omega^2}{gh_0} R(r) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

여기서 ω 는 각진동수, $gh_0 = v^2$ 으로 v 는 전파속도 임은 자명하다. 이것을 극좌표형식으로 고쳐쓰면

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{h_0} R = 0 \dots \dots \dots (5)$$

이것은 바로 0th order의 Bessel's eq.이다.

여기서 $r=0$ 일 때 유한한 해로서

$$R = AJ_0 \left(\frac{\omega r}{\sqrt{gh_0}} \right) \dots \dots \dots (6)$$

를 얻는데 여기서 A 는 상수, J_0 는 0th order의 Bessel 함수이다. 이 해가 만족해야 할 또 하나의 경계조건은

$$\left(\frac{\delta R}{\delta r} \right)_{r=a} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

그런데

$$\frac{dR}{dr} = A \frac{dJ_0}{dr} = -AJ_1 \dots \dots \dots (8)$$

여기서 J_1 은 1st order의 Bessel 함수.

따라서 (7)의 경계조건은 결국

$$J_1 \left(\frac{\omega a}{\sqrt{gh_0}} \right) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

의 방정식으로 바뀌었다. 이 방정식의 근에서 우리가 구하는 수면정상파의 진동수들을 얻을 수 있다. 이중 제1기본진동의 진동수는 방정식 (9)의 최소 正根 α_{11} 을 구함으로 얻을 수 있는데

$$\alpha_{11} = 3.832 \dots\dots\dots(10)$$

따라서 제1기본진동의 각 진동수 ω_1 은

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{gh_0}}{a} \alpha_{11} = 3.832 \frac{\sqrt{gh_0}}{a} \dots\dots\dots(11)$$

다음 節圓(nodal circle)의 반경을 구하자. 節에서는 $R=0$ 이므로 (6)에서 우변을 0으로 놓은 방정식을 풀어 그 根에서 節圓들의 반경을 구할 수 있다.

$$J_0\left(\frac{\omega r}{\sqrt{gh_0}}\right) = 0 \dots\dots\dots(12)$$

위 방정식의 최소正根 α_{01} 이 구해지면 제1기본진동의 節圓반경 a_1 은

$$a_{01} = 2.405 = \frac{\omega_1}{\sqrt{gh_0}} a_1 \dots\dots\dots(13)$$

의 관계식과 (11)에서 구해진다.

$$a_1 = \frac{2.405}{3.832} a = 0.628 a \dots\dots\dots(14)$$

이로써 우선 기본적인 균일수심의 경우에 대한 지식을 얻을 수 있는 원리적 방법을 구해냈다.

3-1. 바닥이 회전포물면인 경우

이번에는 바닥이 회전포물면인 경우에 원점을 중심으로 하는 원형정상파에 대해서 생각해 본다. 우선 底面의 기하학적 모형은 그림과 같다. 굵은 실선 ACDEB가 저면의 단면도인데 CDE 곡선부분이 포물선이다. 이것을 Z축 주위로 회전해서 생기는 회전체가 바로 물통의 체적을 나타낸다. 이 체적이 §2의 원통(APQB의 회전체)의 체적 $\pi a^2 h_0$ 와 같도록 BQ(혹은 AP)와 포물선의 교점 E(혹은 C)의 연직좌표 즉 BE의 깊이를 조정하자. $BE = \lambda h_0$ 로 놓고 λ 를 $0 \leq \lambda \leq 1$ 의 범위에서 변화시키면 동일체적의 조건으로 인해 λ 는 포물선의 곡률 즉 바닥의 경사를 결정하는 Parameter가 된다. $\lambda=0$ 일 때 가장 급한 경사, $\lambda=1$ 일 때는 §2의 경우가 된다.

다음 수면상 임의점 (r, θ) 에서 수심 h 는

$$h = H_0 \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \dots\dots\dots(15)$$

여기서 H_0 는 그림과 같이 원점에서 가장 깊은 수심, b 는 포물선의 r 축과의 교점의 r 좌표, 일정체적의 조건과 (15)를 이용하여

$$b = \sqrt{\frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}} a \dots\dots\dots(16)$$

$$H_0 = (2-\lambda) h_0 \dots\dots\dots(17)$$

의 관계식을 얻는다.

이제는 파동방정식 (1)을 이용, 해를 구해보자. 이번 경우는 h 가 상수가 아니고 r 의 함수이다. 자유수면이 정상파를 이루고 진동할 때 그 파동식은

$$Z(r, \varphi, t) = R(r, \varphi) \cos(\omega t + \theta_0) \dots\dots\dots(18)$$

의 꼴을 가질 것이다. 여기서도 R 이 $R(r)$ 인 경우만을 다룬다. 이것을 방정식에 대입해서 정리하면

$$\operatorname{div}(h \operatorname{grad} R) + \frac{\omega^2}{g} R = 0 \dots\dots\dots(19)$$

극좌표로 표현하면

$$H_0 \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr}\right) - H_0 \frac{2r}{b^2} \frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{g} R = 0 \dots\dots\dots(20)$$

이 방정식의 해는 Power Series method로 풀 수 있는데 원점에서 유한해야 한다는 조건을 고려에 넣고 풀어 다음 식을 얻는다.

$$R = A \left\{ 1 - \frac{k}{2^2} \frac{r^2}{b^2} + \frac{k(k-8)}{2^2 \cdot 4^2} \frac{r^4}{b^4} - \frac{k(k-8)(k-24)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \frac{r^6}{b^6} + \frac{k(k-8)(k-24)(k-48)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \frac{r^8}{b^8} \right. \\ \left. - \dots\dots\dots \right\} \dots\dots\dots(21)$$

여기서

$$k = \frac{\omega b}{\sqrt{gH_0}} \dots\dots\dots(22)$$

위 급수는 $r < b$ 인 한 수렴함을 알 수 있다. 또 하나의 경계조건은 수면주위 벽이 연직면이므로

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(23)$$

(21)에 적용하면

$$1 - \frac{k-8}{8} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{(k-8)(k-24)}{8 \cdot 24} \left(\frac{a}{b}\right)^4 - \frac{(k-8)(k-24)(k-48)}{8 \cdot 24 \cdot 48} \left(\frac{a}{b}\right)^6 \\ + \frac{(k-8)(k-24)(k-48)(k-80)}{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80} \left(\frac{a}{b}\right)^8 - \dots\dots\dots = 0 \dots\dots\dots(24)$$

a/b 는 (16)으로 주어지니까 위 식에서 k 를 구하면 (22)에서 ω 즉 각 진동수를 계산할 수 있는데 (24)의 최소정근에서는 정상파의 제1 기본진동수를 구할 수 있다. 또 절원의 반경은 (24)에서 구한 k 를 (21)에 대입하고 그 우변을 0으로 놓아 만든 방정식을 풀면 그 근에서 절원들의 반경을 구할 수 있다. 두 방정식의 해법은 Graph method 등을 쓰면 된다. 이로써 원리적으로는 회전포물면 바닥에 대한 문제의 정확한 해를 얻은 셈이다.

3-2. 진동수 계산을 위한 근사식

위 두 결과식을 푸는 것이 복잡하다는데서 근사식 도출의 필요를 느낀다. 이하 양자역학에서 흔히 쓰이는 攝動論(Perturbation theory)을 이용, 근사식을 얻어보자.

임의점에서의 깊이 h 를 평균깊이 h_0 로 다음과 같이 표현해 보자.

$$h = h_0(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| < 1 \dots\dots\dots(25)$$

그리고

$$\iint \varepsilon dx dy = 0 \dots\dots\dots(26)$$

S 는 자유수면 전면에 대한 적분임을 나타낸다. 이 h 를 (19)에 代入하면

$$\nabla^2 R + \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} R) + \mu R = 0 \dots\dots\dots(27)$$

여기서

$$\mu = \frac{\omega^2}{gh_0} \dots\dots\dots(28)$$

경계조건은

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

여기서 d/dr 은 경계면의 법선방향의 Gradient 성분을 뜻한다.

$|\mathcal{E}|$ 이 작을 경우에는 R 와 μ 를

$$R = R_0 + R_1 \dots\dots\dots(30)$$

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \dots\dots\dots(31)$$

로 표시할 수 있다. 여기서 R_0 와 μ_0 는 $\mathcal{E}=0$ 일 때 (균일한 깊이일 때) R 과 μ 를 나타내고, R_1 과 μ_1 은 $\mathcal{E} \neq 0$ 일 때 R_0 와 μ_0 에 가해 주어야 할 수정항이다. 그의 order 는 \mathcal{E} 와 같다고 생각하자. (27)에 (30)과 (31)을 대입해서 \mathcal{E} 의 0th order 와 1st order 를 따로따로 정리하면

$$\nabla^2 R_0 + \mu_0 R_0 = 0 \dots\dots\dots(32)$$

$$\nabla^2 R_1 + \mu_0 R_1 = -\mu_1 R_0 - \text{div}(\mathcal{E} \text{ grad } R_0) \dots\dots\dots(33)$$

의 두 식을 얻는다. 첫식은 깊이가 일정한 경우 즉 §2의 경우의 방정식이다.

2차원에서의 Green 의 정리를 R_0, R_1 의 두 함수에 적용하면

$$\int \int_s (R_0 \nabla^2 R_1 - R_1 \nabla^2 R_0) ds = \int_l \left(R_0 \frac{dR_1}{dr} - R_1 \frac{dR_0}{dr} \right) dl \dots\dots\dots(34)$$

여기서 l 은 경계선 전 길이에 대한 선적분을 뜻한다. 경계조건 (29)는 R_0, R_1 에 다 같이 적용되어야 하므로 (34)의 우변은 0 이 된다. 다시 (34)에 (32)를 대입하면

$$\int \int_s R_0 (\nabla^2 R_1 + \mu_0 R_1) ds = 0 \dots\dots\dots(35)$$

(33)을 (35)에 代入하고 Green의 제1공식을 써서 정리하면

$$\mu_1 = - \frac{\int \int_s R_0 \text{ div}(\mathcal{E} \text{ grad } R_0) ds}{\int \int_s R_0^2 ds} = \frac{\int \int_s \mathcal{E} (\text{grad } R_0)^2 ds}{\int \int_s R_0^2 ds} \dots\dots\dots(36)$$

이 결과를 본제에 적용하자. (16)과 (17)을 (15)에 대입해서 정리하면

$$h = h_0 \left\{ 1 + (1-\lambda) \left(1 - \frac{2r^2}{a^2} \right) \right\} \dots\dots\dots(37)$$

여기서 λ 가 1에 가까우면 h 는 h_0 에 근사해지므로

$$\mathcal{E} = (1-\lambda) \left(1 - \frac{2r^2}{a^2} \right) \dots\dots\dots(38)$$

라 놓아도 무방하겠다. §2의 결과로부터 제1 기본진동에 대해서 R_0 와 μ_0 는

$$R_0 = J_0(\sqrt{\mu_0} r) = J_0\left(\frac{\alpha_{11}}{a} r\right) \dots\dots\dots(39)$$

$$\mu_0 = \frac{\alpha_{11}^2}{a^2} \dots\dots\dots(40)$$

여기서 α_{11} 은 방정식

$$J_1(x) = 0 \dots\dots\dots(41)$$

의 최소정근으로 3.832임을 §2에서 이미 밝혔다. (38)과 (39)을 (36)에 대입하고 $r/a = \rho$ 라 놓으면

$$\mu_1 = (1-\lambda) \left\{ \frac{\int_0^1 (\rho - 2\rho^3) [J_1(\alpha_{11}\rho)]^2 d\rho}{\int_0^1 \rho [J_0(\alpha_{11}\rho)]^2 d\rho} \frac{\alpha_{11}^2}{a^2} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

그런데

$$\int x J_0^2(x) dx = \frac{1}{2} x^2 [J_0^2(x) + J_1^2(x)] \dots\dots\dots (43)$$

$$\int x J_1^2(x) dx = \frac{1}{2} x^2 [J_0^2(x) + J_1^2(x)] - x J_0(x) J_1(x) \dots\dots\dots (44)$$

그리고

$$3 \int x^3 J_1^2(x) dx = \frac{1}{2} x^4 [J_0^2(x) + J_1^2(x)] - 2x^3 J_0(x) J_1(x) + 2x^2 J_1^2(x) \dots\dots\dots (45)$$

의 관계식을 이용해서 (42)의 각 적분을 구하면

$$\int_0^1 [J_1(\alpha_{11}\rho)]^2 \rho d\rho = 0.0811 \dots\dots\dots (46)$$

$$\int_0^1 [J_0(\alpha_{11}\rho)]^2 \rho d\rho = 0.0811 \dots\dots\dots (47)$$

$$\int_0^1 [J_1(\alpha_{11}\rho)]^2 \rho d\rho = 0.02705 \dots\dots\dots (48)$$

이 결과들을 (42)에 대입해서

$$\mu_1 = \frac{0.0270}{0.0811} \left\{ (1-\lambda) \frac{\alpha_{11}^2}{a^2} \right\} \div \frac{1}{3} (1-\lambda) \frac{\alpha_{11}^2}{a^2} \dots\dots\dots (49)$$

를 얻는다. 따라서 (31)에서

$$\frac{\sigma a}{\sqrt{gh_0}} = \alpha_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{3} (1-\lambda) \right\}^{1/2} \div \alpha_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{6} (1-\lambda) \right\} = 3.832 \left\{ 1 + \frac{1}{6} (1-\lambda) \right\} \dots\dots (50)$$

결국 진동수를 구하는 근사식을 얻었다. 단 이 식은 λ 가 1에 가까울수록 잘 들어맞는 근사식이다.

4. 결 론

저면이 회전포물체이고 수면주위가 원형인 물통에서의 정상파 중 원형대칭인 기본진동파를 다루어서 §3-1의 결과를 얻었다. 이것으로 기본진동정상파에 대한 지식을 정확히 얻는 것이 원리적으로 가능해 졌다. 다만 계산의 어려움이 있으나 이것은 여러가지 수학적인 방법으로 해결할 수 있다. 또 이 난점을 부분적으로 해결한 진동수 계산의 근사식을 도출했다. 또 바닥의 경사완급을 나타내는 Parameter λ 를 도입하므로써 결과식의 적용범위를 넓혔다. §2는 §3의 $\lambda=1$ 의 경우로 §3에 포함된다. 또 바닥의 경사가 완만한 경우에 대해서 $\omega a / \sqrt{gh_0} = 4$ 를 얻은 Lamb 교수의 결과와도 비교해 보자. §3의 (50)에서 λ 가 1에서 점점 작아지면 $\omega a / \sqrt{gh_0}$ 는 3.832 보다 커질 것이므로 Lamb 교수의 결과도 역시 §3의 결과 포함됨을 알 수 있다.

그리고 이 결과를 항만 혹은 호수의 수면파에 적용하기 위해서는 $R(r, \varphi)$ 의 경우, 수면주위가 원형이 아닌 경우, 그리고 정상파 외에 외부로부터 들어오는 파동에 의한 강제진동에 대해서도 논의할 필요를 느낀다.

References

- ① Lamb, H. : Hydrodynamics; p. 291—292.
- ② Bowman, F. : Introduction to Bessel Functions. (In Japanese translation.) Tables 1 and 2. p. 5—9, 26—28.
- ③ Magenau and Murphy: The mathematics of physics and chemistry. p. 59—65. 161. 242. 387—392.
- ④ Powell and Crasemann: Quantum mechanics. p. 364—370.



臨海工業地域을 中心으로한 避難碇泊地에 관하여

—第 1 報—

釜山外港 및 近接水域에 있어서 避難碇泊地의 面積에 관하여

朴 容 燮

The Anchorage of the Seaside Industrial Belt -Part 1-

(The Anchorage Areas of the Pusan Outer Harbour & the Approaches
in the Typhoon & the Local Strong Wind)

Park Yong-Sub

Abstract

The basical anchorage area of the Pusan Outer Harbours and the Approaches are not enough for merchant vessels and deep sea fishing vessels to avoid the marine casualties in the typhoon and the local strong winds.

1. Northern Outer Harbour-14 large merchant vessels' anchoring.
2. Southern Outer Harbour-15 large deep sea fishing vessels' anchoring.
3. The approaches-7 medium merchant vessels' anchoring. We consider that the anchorage area of one vessel is a circle having a radius of $2 \times \text{Loa} + 8$ shackles of chain cables, this paper indicate 21 merchant vessels and 15 deep sea fishing vessels (or 15 small coastal merchant vessels) are able to anchor in these areas.

Since the anchorage area in Pusan harbour must be insufficient in typhoon or local strong winds, we will have to research and develop the Pusan Harbour and Approaches against a violent weather condition.

〈目 次〉

- | | |
|------------------|----------------|
| 1. 序 論 | 4. 避泊可能面積과 避泊圖 |
| 2. 避難碇泊地의 限界 | (1) 避泊可能面積 |
| 3. 避難碇泊地의 面積과 水深 | (2) 避泊圖 |
| (1) 釜山北外港 | 5. 結論과 將來對策 |
| (2) 釜山南外港 | 6. 參考文獻 |
| (3) 近接水域 | |

1. 序 論

港灣施設의 개발과 확장은 海上輸送을 용이하게 할 뿐 아니라, 船舶의 操船과 保安上 매우 중요한 일이다. 근래에 와서 우리나라의 臨海工業地域(Seaside Industrial Belt)의 형성은 對外貿易圈을 확장시키게 되고 따라서 出入하는 각종선박—화물선, 원양어선—의 船腹量을 크게 증가시