

# 씨이컨트公式의 近似的 解法에 關한 研究

閔 右 泓 · 王 之 錫

## A Study on the Approximate Solution of Secant Formula

Min, Woo Hong · Wang, Jee Seok

〈目 次〉	
記號說明	5. 씨이컨트公式과 그의 近似解
1. 序 論	6. 近似解의 誤差 및 考察
2. 變位增幅比	7. 結 論
3. 굽힘 모우멘트 增幅比	參考文獻
4. 應力 增幅比	

### Abstract

The use of secant formula for calculating the average compressive stress at which yielding first begins in the most stressed fiber of column is known as the most rational approach to the design of eccentrically loaded column. Because the load which such a column can safely carry is influenced by the initial imperfections of manufacture, the strength of materials, and the inherent aspect of instability, and because each of these factors is rationally considered in the secant formula. Besides, it is not necessary to classify the columns into short, medium, and long columns in secant formula.

The strongest objection to the secant formula is that it is transcendental equa-

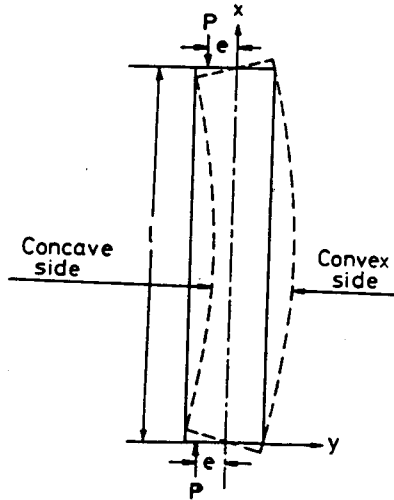


Fig. 1 Simple column.

과 같이 잡고 나타내면<sup>2)</sup>

$$y = \frac{Pel^2}{8EI} \frac{2}{u^2 \cos u} \left\{ \cos \left( u - \frac{2ux}{l} \right) - \cos u \right\} \quad (1)$$

$$\text{단, } u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

과 같이 된다. 여기서  $l$ 은 기둥의 길이이고  $E$ 는  
탄성係數이며  $I$ 는 斷面 二次모우멘트이다.

最大처짐  $\delta$ 는  $x = \frac{l}{2}$ 에서 發生하므로 式 (1)에  
 $x = \frac{l}{2}$ 을 代入하면 얻을 수 있다.

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{Pel^2}{8EI} \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u} \quad (2)$$

式 (2)에서  $\frac{Pel^2}{8EI}$ 은 기둥에 壓縮荷重  $P$ 가 作用하지 않고 兩端에서 모우멘트  $Pe$ 만  
作用하였을 때의 最大처짐을 나타낸다. 그러므로  $\frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}$ 는 壓縮荷重  $P$ 로 因하  
여 最大처짐이 增幅되는 比가 되므로 變位增幅比 (Displacement Amplification Factor)라  
한다. 따라서 이를  $A_D$ 라 하면

$$A_D = \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u} = \frac{8 \left\{ 1 - \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \right) \right\}}{\frac{Pl^2}{EI} \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \right)} \quad (3)$$

이 되고, 이것을 그래프로 나타내면 Fig. 2와 같다. 이 그림에서는 가로軸을  $\frac{Pl^2}{EI}$ 으로  
잡고 세로軸에 變位增幅比  $A_D$ 로 잡아 이들의 關係를 나타내었다.  $\frac{Pl^2}{EI}$ 의 값이  $\pi^2$ 이  
되면 臨界荷重에 達하기 때문에 曲線이  $\frac{Pl^2}{EI} = \pi^2$ 으로 表示되는 垂直線에 漸近하게 된다.  
또한  $\frac{Pl^2}{EI}$ 의 값이 零에 接近하게 되면  $A_D$ 의 값이 1이 된다는 것은 式 (3)으로 부터  
쉽게 證明된다.

式 (3)으로 表示되는 變位增幅比  $A_D$ 의 近似式을 다음 式  $A_{D1}$ 와 같이 取하면

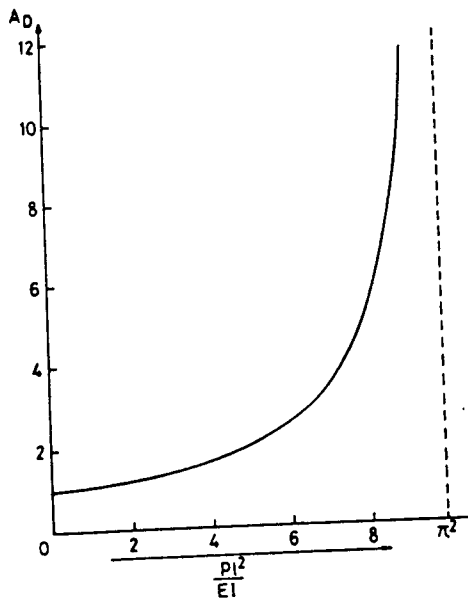


Fig. 2 Displacement amplification factor.

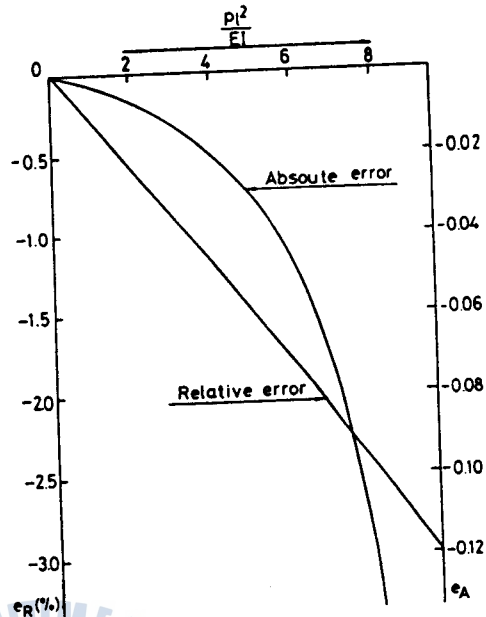


Fig. 3 Errors of first order approximate formula for displacement amplification factor.

$$A_{DA} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}} \quad (4)$$

相對誤差가 最大 3% 程度 밖에 안된다. 이것을 다음에 나오는 近似式과 區別하기 위하여, 一次近似式 (First Order Approximate Formula) 이라 한다.

近似式의 絕對誤差를  $e_A = A_{DA} - A_D$  라 하고 相對誤差를  $e_R = \frac{A_{DA} - A_D}{A_D}$  라 하여 그래프로 나타내면 Fig. 3 과 같다. 이들 그림에서도 가로軸을  $\frac{Pl^2}{EI}$  으로 잡고 나타내었다.

Fig. 3에서 보는 바와 같이 相對誤差  $e_R$  는 大略  $\frac{Pl^2}{EI}$  에 比例하고 그 比例常數는  $-\frac{\pi}{1000}$  程度된다. 이 事實을 利用하여 二次近似式 (Second Order Approximate Formula) 을 만들면 다음과 같다.

$$A'_{DA} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}\right) \left(1 - \frac{\pi}{1000} \frac{Pl^2}{EI}\right)} \quad (5)$$

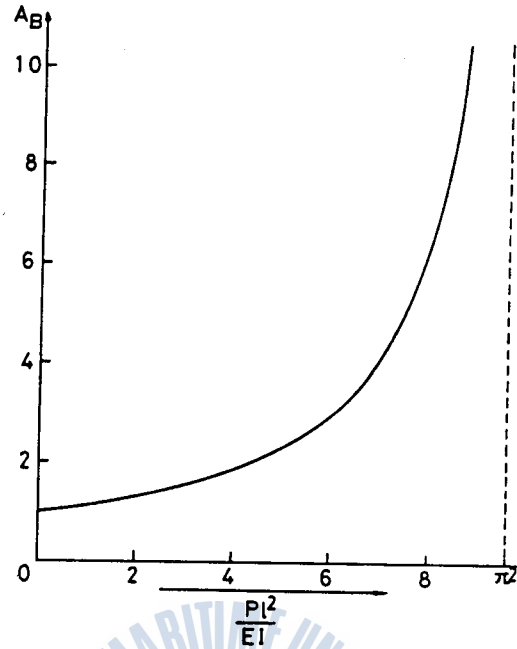


Fig. 5 Bending moment amplification factor.

$$M'_{mA} = Pe \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EI}}{\left(1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}\right) \left(1 - \frac{\pi}{1000} \frac{Pl^2}{EI}\right)} \right\} \quad (12)$$

이들 式을 式 (9)와 比較하여 굽힘 모멘트 增幅比의 近似式을 구하면 一次近似式  $A_{BA}$  는

$$A_{BA} = 1 + \frac{\frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EI}}{1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}} \quad (13)$$

이 되고 二次近似式은

$$A'_{BA} = 1 + \frac{\frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EI}}{\left(1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}\right) \left(1 - \frac{\pi}{1000} \frac{Pl^2}{EI}\right)} \quad (14)$$

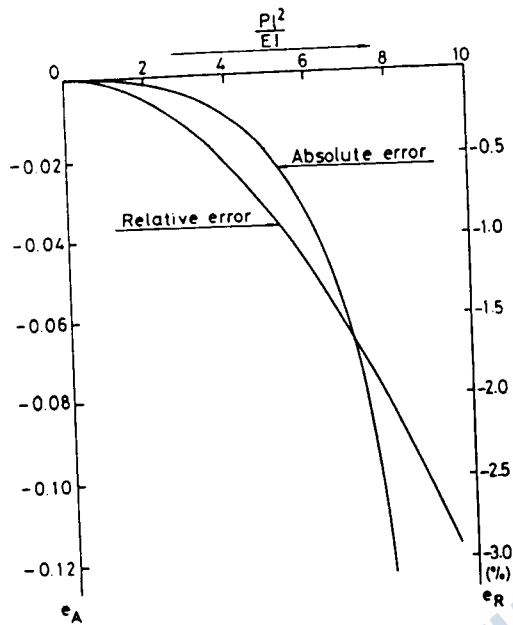


Fig. 6 Errors of first order approximate formula for bending moment amplification factor.

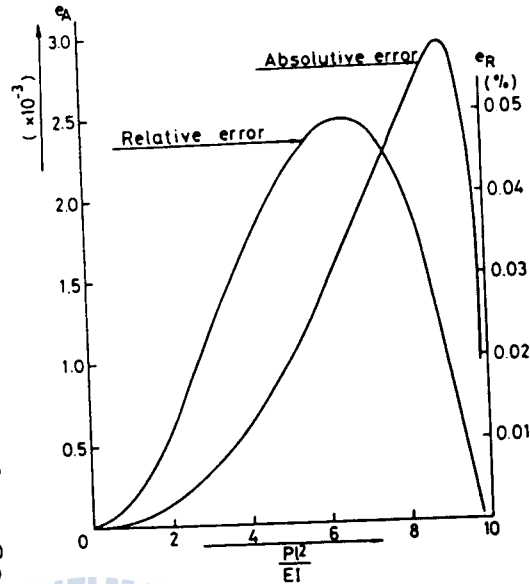


Fig. 7 Errors of second order approximate formula for bending moment amplification factor.

가 된다. 이 近似式들의 絕對誤差와 相對誤차를 各各 Fig. 6 및 Fig. 7에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 一次近似式의 相對誤차는 最大 3%, 二次近似式의 그것은 最大 0.05% 程度에 지나지 않아서 二次近似式이 훨씬 誤차가 적음을 알 수 있다. 또한 一次近似式의 相對誤차는 單純 增加하는데 反하여 二次近似式의 그것은  $\frac{Pl^2}{EI}$ 의 값이 臨界值의 2/3 程度에서 最大가 된다.

#### 4. 應力增幅比

前述한 바와 같이 最大壓縮應力  $\sigma_{max}$ 는 굽힘 모우멘트가 最大가 되는 斷面에서 기둥의 오목한 쪽 (Fig. 1에서 concave side) 表面에서 나타날 것이고 그의 크기는 다음 式으로 주어진다.

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_m c}{I} \quad (15)$$

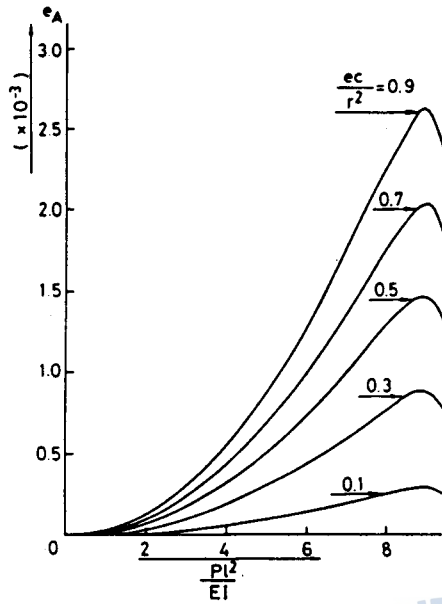


Fig. 11 Absolute error of second order approximate formula for stress amplification factor.

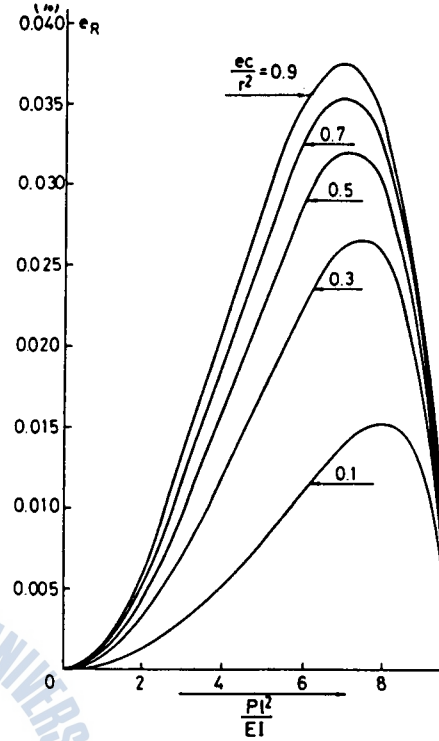


Fig. 12 Relative error of second order approximate formula for stress amplification factor.

이 式으로부터 應力增幅比의 一次近似式  $A_{SA}$ 를 나타내면

$$A_{SA} = 1 + \frac{ec}{r^2} \left( 1 + \frac{\frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EI}}{1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}} \right) \quad (19)$$

가 되고, 같은 方法으로 應力增幅比의 二次近似式  $A'_{SA}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$A'_{SA} = 1 + \frac{ec}{r^2} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{8} \frac{Pl^2}{EI}}{\left(1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{Pl^2}{EI}\right) \left(1 - \frac{\pi}{1000} \frac{Pl^2}{EI}\right)} \right\} \quad (20)$$

應力增幅比 一次近似式の 絕對誤差를 Fig. 9에 相對誤差를 Fig. 10에, 二次近似式の 그 것들을 各各 Fig. 11 및 Fig. 12에, 偏心比  $\frac{ec}{r^2}$ 를 參數로 하여 나타내었다.

### 5. 씨이컨트公式과 그의 近似解

기둥을 設計할 때는 보통 降伏應力을 最大強度로 잡는다. 따라서 式 (16)으로 表示되는 最大應力이 降伏應力  $\sigma_{YP}$ 에 達하였을 때의 壓縮荷重을  $P_{YP}$ 라 하고 그 때의 斷面平均應力  $\frac{P_{YP}}{A}$ 는 式 (16)을  $\sigma_{YP}$ 와 等置시키므로서 구할 수 있다.

$$\frac{P_{YP}}{A} = \frac{\sigma_{YP}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P_{YP}}{AE}}\right)} \quad (21)$$

斷面平均應力이 式 (21)의 값에 達하면 最大應力이 發生하는 點은 降伏하기 始作하므로 그 때의 荷重  $P_{YP}$ 를 極限荷重이라 看做하고 여기에 安全率을 考慮하여 許容荷重을 定한다.

앞에서도 잠깐 言及하였지만 기둥이 充分한 時間동안 安全하게 받을 수 있는 荷重은 기둥의 缺陷程度, 材料의 強度 및 安定性의 特性에 지배되는데 式 (21)로 表示되는 씨이컨트 公式에서는 이들이 가장 合理的으로 考慮되고 있다. 卽 기둥의 缺陷程度는 이것과 等價인 偏心比  $\frac{ec}{r}$ 로써 代置되어 考慮되고 材料의 強度는 降伏應力  $\sigma_{YP}$ 로써 考慮되며 安定性의 特性은 씨이컨트項에  $\frac{P_{YP}}{A}$ 가 들어 있음으로 해서 考慮되고 있다. 또한 이 公式는 短柱이건 長柱이건 두루 利用할 수 있는 式이기는 하나 이 式에서 보는 바와 같이 超越方程式으로 되어 있어 주어진 降伏應力  $\sigma_{YP}$ , 偏心比  $\frac{ec}{r}$ , 細長比  $\frac{l}{r}$ 에 대하여  $\frac{P_{YP}}{A}$ (最大應力이 降伏應力에 達하였을 때의 斷面平均應力)를 구하려면 試行誤差法으로 풀어야 하는 難點이 있다. 그러므로 本 論文에서는 最大應力의 近似式을 利用하여  $\frac{P_{YP}}{A}$ 를 計算하므로서 이의 陽函數形態(Explicit Form)를 구하려고 한다. 따라서 試行誤差法이 아니더라도 降伏應力, 偏心比 및 細長比가 주어지면 이들을 單純히 代入하는 것만으로  $\frac{P_{YP}}{A}$ 를 구하게 된다.

式 (18)로 表示되는 最大應力의 一次近似式  $\sigma_{maxA}$ 를 降伏應力  $\sigma_{YP}$ 와 等置시켜 整理하면  $\frac{P_{YP}}{A}$ 에 대하여 二次方程式을 얻을 수 있다. 이를 풀면  $\frac{P_{YP}}{A}$ 의 近似式을 얻을 수 있다.

$$\frac{P_{YP}}{A} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} \quad (22)$$

$$\text{단, } \alpha = \frac{\left(1 + \frac{ec}{r^2}\right) \frac{\pi^2 E r^2}{l^2} + \sigma_{YP}}{2 - 0.4674 \frac{ec}{r^2}}, \quad \beta = \frac{\pi^2 E \sigma_{YP}}{\left(1 - 0.2337 \frac{ec}{r^2}\right) \frac{l^2}{r^2}}$$

는 프로그램을 作成하였다. 兩邊의 差의 絕對值이  $10^{-7}$  以下가 되면 反復을 中止하도록 하였다. 이렇게 하여 卍 사이컨트 公式의 解와 本 論文에서 提示한 그의 近似解인 式(22)를 比較하여 보았다.

Fig. 13은 降伏應力  $\sigma_{YP} = 2800 \text{ kg/cm}^2$  彈性係數  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  인 構造用 鋼에 대하여, 近似解 式(22)를 그래프로 나타낸 것이다. 가로軸을 細長比  $\frac{L}{r}$ 로 잡고 세로軸을  $\frac{P_{YP}}{A}$ 로 잡아서 偏心比  $\frac{eC}{r^2}$ 를 파라미터로 하여 나타내었다. 사이컨트公式 (21)을 풀어서 같은 스케일의 그래프로 作成하여 포개어 보면 完全히 겹치게 된다. Fig. 14와 Fig. 15는 近似解의 絕對誤差와 相對誤차를 Fig. 13과 같은 要領으로 나타내었다. 絕對誤差의 最大值는 約  $5 \text{ kg/cm}^2$ 이고 相對誤차의 그것은 約 0.42% 정도임을 알 수 있다.

Fig. 16은 降伏應力  $\sigma_{YP} = 900 \text{ kg/cm}^2$ , 彈性係數  $E = 0.7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 인 알미늄 合金에 대하여, 近似解를 그래프로 나타낸 것이다. 이 境遇도 사이컨트公式의 解와 거의 一致함을 確認하였다. Fig. 17 및 Fig. 18은 近似解의 絕對誤差와 相對誤차를 各各 나타낸다. 絕對誤差의 最大值는 約  $1.7 \text{ kg/cm}^2$ 이고 相對誤차의 그것은 約 0.42%임을 알 수 있다.

以外에 降伏應力과 彈性係數를 여러 가지로 바꾸어 가면서 計算하여 本 結果, 如何한 境遇에도 相對誤차가 0.45%를 넘지 않음을 確認하였다. 이로써 本 研究에서 提示한 近似式 (22)의 有用性이 立證되었다. 그 뿐만 아니라 偏心比가 零일 때 사이컨트公式 (21)를 풀려면 기둥이 短柱인가 長柱인가에 따라서, 즉 細長比가 臨界細長比  $(\frac{L}{r})_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{YP}}}$ 를 超過하지 않는가 超過하는가에 따라서 解法이 전혀 달라지는데 反하여 本 近似式을 쓰면 偏心比가 零이더라도 그러한 區別이 必要치 않고 短柱이든 長柱이든 같은 方法으로 計算할 수 있다. 勿論 偏心比가 零일 때, 細長比가 臨界細長比보다 크면, 式(22)는 오일러의 式이 되고, 細長比가 臨界細長比보다 작으면 이 式은  $\frac{P_{YP}}{A} = \sigma_{YP}$ 가 됨이 證明된다.

## 7. 結 論

偏心荷重을 받는 기둥이나, 重心荷重을 받더라도 製作上 缺陷을 等價인 偏心比로 代置한 기둥에 있어서 最大應力이 降伏應力에 達하였을 때의 壓縮荷重  $P_{YP}$ 와 그 때의 平均應力  $\frac{P_{YP}}{A}$ 를 구하는 사이컨트公式은 超越方程式으로 되어있기 때문에 풀기가 번거롭다. 따라서 이의 간단한 計算法을 研究한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

- (1) 偏心荷重을 받는 기둥의 最大처짐에 관한 變位增幅比의 近似式을 利用하므로써, 굽힘



모우멘트 增幅比, 應力增幅比의 近似式들을 誘導해 낼 수 있고 이들은 實用上 充分한 精度가 保障된다.

(2) 上記 增幅比의 近似式들을 利用하므로써, 씨이컨트公式의 解를 구하는 陽函數形態 (Explicit Form)의 式을 誘導해 낼 수 있다.

(3) 씨이컨트 公式의 近似解는 다음과 같고

$$\frac{P_{YP}}{A} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$$\text{단, } \alpha = \frac{\left(1 + \frac{ec}{r^2}\right) \frac{\pi^2 E r^2}{l^2} + \sigma_{YP}}{2 - 0.4674 \frac{ec}{r^2}}, \quad \beta = \frac{\pi^2 E \sigma_{YP}}{\left(1 - 0.2337 \frac{ec}{r^2}\right) \frac{l^2}{r^2}}$$

이 式의 相對誤差는 如何한 境遇에도 0.5%를 넘지 않는다.

本 研究에서 提示한 近似式을 利用하면 試行誤差法이 아니더라도 細長比와 偏心比 및 材料의 物性值를 單純히 代入만 하므로써, 最大應力이 降伏應力에 達하였을 때의 平均應力을 구할 수 있으므로 기둥이나 其他 壓縮荷重을 받는 部材의 安定性 評價에 利用할 수 있어 이들의 設計에 도움이 될 것으로 생각된다. 또한 近似式이라고는 하나 相對誤差가 0.5%미만이므로 實用上 充分한 精度가 있다고 보아진다.

씨이컨트公式과 本 近似式에서 取扱한 偏心荷重은 上部의 偏心距離와 下部의 그것이 같은 境遇에만 다루었는데 上部 및 下部의 偏心距離가 다른 境遇의 近似解에 대해서도 研究가 必要할 것이다.

### 參 考 文 獻

- 1) R. L. Ketter, G. C. Lee, S. P. Prawel, "Structural Analysis and Design", McGraw-Hill, 1979.
- 2) S. P. Timoshenko, J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability", 2nd edition, McGraw-Hill, 1961.
- 3) S. P. Timoshenko, D. H. Young, "Elements of Strength of Materials", 5th edition, Tower Press, 1968.
- 4) A. P. Boresi, O. M. Sidebottom, F. B. Seeley, J. O. Smith, "Advanced Mechanics of Materials", 3rd edition, John Wiley, 1978.

