

數值計算에 의한 非定常熱傳導 逆問題의 時間間隔의 限界에 關한 研究

金明煥 · 金春植 · 金喜澈 · 閔佑泓

A Study on the Time Spacing Limit for the Inverse Problem of Transient Heat Conduction by the Numerical Method

Kim, Myoung Hwan · Kim, Chun Sik · Kim, Hee Cheol · Min, Woo Hong

〈目 次〉

- 使用記號
第1章 序 論
第2章 一次元 非定常熱傳導에 關한 嚴密解
第3章 數值解析
3.1 一次元 正問題에 關한 數值解析
3.2 한面이 斷熱된 物體內 한點의 溫度를 알고 있을 境遇의 逆問題 數值解析
3.3 物體內 두點의 溫度를 알고 있을 境遇의 正問題와 逆問題 數值解析
3.4 週期성을 갖는 逆問題 數值解析
第4章 檢 討
第5章 結 論
參考文獻

Abstract

Most problems of transient heat conduction require the calculation of conditions at interior points when boundary conditions are given at the outside surface.

In contrast, there is another class of problems in which the temperature histo-

ry is known at some interior points, and it is desired to find the surface temperature and heat flux. Such a problem is called the inverse problem in transient heat conduction which is very important for quenching problems to be solved.

The calculation of inverse problem is demonstrated by a numerical method, and the caution of numerical calculation is required in selecting a time spacing for, if it is chosen too small in relation to the conditions, undesirable oscillation results.

The results of numerical calculations about time spacing show that a limit on the minimum size of the time increments is sometimes caused by the stability of the numerical procedure.

Further, we make a study of time spacing in a periodic oscillation of the surface temperature and heat flux. In this periodic problem, we find the upper and lower limit of time spacing which is required to satisfy with the accuracy and stability of solution.



c :	比熱	$\text{kcal} / \text{kg}^{\circ}\text{C}$
f :	加重因子	
k :	熱傳導率	$\text{kcal} / \text{m hr}^{\circ}\text{C}$
l :	平板의 두께	m
q :	熱流束	$\text{kcal} / \text{m}^2 \text{hr}$
q_w :	表面熱流束	$\text{kcal} / \text{m}^2 \text{hr}$
t :	時間	hr
x :	表面으로부터 測定된 距離	m
ρ :	密度	kg / m^3
α :	溫度傳導率 ($k/\rho c$)	m^2 / hr
θ :	溫度	$^{\circ}\text{C}$
θ_i° :	時間增分前의 i node에서의 溫度	$^{\circ}\text{C}$
θ_i^{\prime} :	時間增分後의 i node에서의 溫度	$^{\circ}\text{C}$
Δt :	時間增分 ($\alpha \Delta t / x^2$)	hr
Δx :	Control Volume 의 두께	m
$\Delta \tau$:	無次元時間間隔	
δx :	node 와 node 사이의 間隔	m

第 1 章 序 論

熱工學에서 傳熱面의 表面溫度를 直接 測定하는 것은 傳熱面 周圍 流體의 흐름과 傳熱 狀態에 影響을 주고 또한, 溫度의 測定值에 심한 誤差를 同伴하게 되므로 一般的으로 不可 能하며, 間接的인 表面溫度의 測定方法을 採用하고 있다. 이와 같이 傳熱面의 內部溫度를 測定하여 傳熱面 表面의 溫度나 熱流束을 計算하는 問題를 熱傳導 逆問題 (Inverse problem in heat conduction)라고 한다.

이와 같은 非定常 熱傳導 逆問題는, 롤러 또는 工具類와 같은 金屬의 非定常 加熱과 非定常 冷却으로 構成되는 表面熱處理, 傳熱面의 溫度變化가 時間의 函數로 되는 경우의 熱應力의 解析, 傳熱工學에 있어 沸騰曲線을 구하는 경우^{1), 2)}, 그리고 原子爐 또는 보일러의 사고시 傳熱面 溫度가 急上昇하거나 急冷却될 때의 研究^{3), 4), 5)}에서 접하게 된다.

비교적 간단한 形狀을 갖는 傳熱面에 대하여, 定常의 傳熱狀態 또는 여러가지의 初期條件과 境界條件下에서 熱傳導의 方程式을 解析의으로 구한 結果들은 Carslaw에 의하여 參考文獻⁶⁾에 體系的으로 整理되어 있다. 그렇지만서도 Carslaw의 結果는 구체적인 개개의 實驗에서의 結果解釋에 미흡하여, Merte¹⁾와 Veres²⁾는 高溫面의 非定常 冷却에 의한 冷却曲線을 얻기 위하여 熱傳導率인 큰 小型球의 中心에서 測定한 溫度에서 表面熱流束을 計算함에 있어서 非定常 熱量計法 (Transient calorimeter technique)을 近似的으로 採用하고 있다. 이와 같이 解析의 方法은 매우 복잡하여, 최근에는 計算機를 이용한 數值解析 方法에 關하여 많은 研究結果가 보고되어 있다. 熱流體分野에 있어서 數值計算을 할 경우, 座標軸의 決定方法, 數值計算用 式의 誘導過程, 式의 解析方法등에 關한 장단점등에 關하여는 Patankar에 의하여 參考文獻⁷⁾에 詳細히 報告되어 있다. 이 분야에 있어서 實驗에 의하지 않고 數值計算을 주된 研究手段으로 하는 것은, 경우에 따라서 많은 實驗經費, 研究期間의 短縮, 實驗結果의 事前豫測, 그리고 全的으로 實驗이 不可能할 경우에 代替手段으로서 今後 많은 進展이 豫想된다.

특히 熱傳導 逆問題를 解析할 경우 어떠한 數值解析의 方法에 의하더라도, 傳熱面內에 設置된 熱電對의 應答時間의 遲延, 解의 安定性和 精確性 問題는 그대로 남게되며, 대부분의 경우 嚴密한 解析解가 存在하지 않기 때문에 쉽사리 해결될 性質의 問題가 결코 아니다. 이 점은 逆問題가 갖고 있는 固有한 性質 즉, (1) 傳熱面 表面의 溫度變化는 內部로 갈수록 그 變化幅이 작아짐에도 불구하고 計算을 表面을 向하여 逆方向으로 進行되는 點과 (2) 內部에서 熱電對에 의하여 測定한 溫度는 어느 경우라도 必然的으로 大小間에 誤差를 同伴하는 점에 基因한다고 할 수 있다. 이러한 解의 安定性和 精確性의 問題는 구체적으로 數值計

算上の 샘플링間隔과 密接한 관계를 갖고 있다. 즉, 時間에 對한 溫度變化를 精確히 追跡하기 위하여는 샘플링 時間間隔을 작게 취할수록 좋겠지만, 解의 安定性和 만족할 정도의 解의 精確性を 確保하기 위하여는 反對로 어느 정도 以上の 時間間隔을 維持하지 않으면 안 된다. 이와 같은 時間間隔 (Time spacing)의 限界值에 관하여 無次元 時間間隔 ($\alpha \Delta t / l^2$)으로, Stoltz⁸⁾는 0.3을, Sparrow⁹⁾는 0.01을, Beck¹⁰⁾도 0.01을, Shouji¹¹⁾는 0.1 정도를 提示하고 있다. 이러한 時間間隔의 問題는 一見 逆問題의 解析方法에도 依存한다고도 생각되나, 그 보다는 逆問題의 固有한 性質에 依存하는 바가 크다고 생각된다.

偏微分方程式에서 數值計算에 필요한 式을 세우는 한 方法인 Control volume method는 熱流體分野에서 원래의 微分方程式이 의미하는 質量, 運動量, 에너지등의 保存法則이 離散化된 式上에서도 그대로 表現되므로 熱流體問題 解析의 有效한 方法으로 사용되고 있다. 본 研究에서는 Patankar¹²⁾에 의한 TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm) 方法에 의하여 數值計算을 함으로써, 表面의 熱流束과 表面의 溫度의 時間的 變化를 구하는 여러가지 경우의 熱傳導 逆問題를 體系的으로 解析하여, 解의 精確度에 밀접히 관계되는 샘플링 時間間隔의 限界值에 관하여 研究報告한 것이다.

第2章 一次元 非定常熱傳導에 關한 嚴密解

數值計算에 의한 熱傳導 正問題 (Direct problem) 과 逆問題 (Inverse problem)에 있어서 時間間隔에 따른 解의 精確性を 알아보기 위하여, 基準이 되는 경우로서, 잘 알려진 다음과 같은 경우를 생각한다. 즉, 均一한 溫度 θ_0 로 加熱된 두께가 l 이고, 한면이 斷熱된 平板을 갑자기 다른 한 면을 $\theta = 0$ 가 되도록 하였을 때, 이에 관한 熱傳導 方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$\text{I. C. } \theta(x, 0) = \theta_0$$

$$\text{B. C. } \theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial [\theta(x, t)]}{\partial x} = 0$$

上式에서 平板內 溫度變化 θ 는 다음과 같이 t 와 距離 x 의 函數로서 變數分離를 할 수 있다.

$$\theta_{(x,t)} = T_{(t)} \cdot X_{(x)} \quad (2.2)$$

解는 다음 式(6)

$$\theta = \theta_0 \frac{4}{\pi} \left[e^{-\frac{\pi^2}{(2l')^2} \frac{\alpha t}{}} \cdot \sin \frac{\pi x}{(2l')} + \frac{1}{3} e^{-\frac{(3\pi)^2}{(2l')^2} \frac{\alpha t}{}} \cdot \sin \frac{3\pi x}{(2l')} + \frac{1}{5} e^{-\frac{(5\pi)^2}{(2l')^2} \frac{\alpha t}{}} \cdot \sin \frac{5\pi x}{(2l')} + \dots \right] \quad (2.3)$$

와 같으며, 그림 (2.1)은 이 結果를 圖式的으로 表現한 것이다. 또한, 外部와의 境界面과 平板內에서 單位時間, 單位面積當의 熱의 移動量 즉 熱流束 (Heat flux)는 다음 式으로 表現된다.

$$q_{\alpha, n} = k \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.4)$$

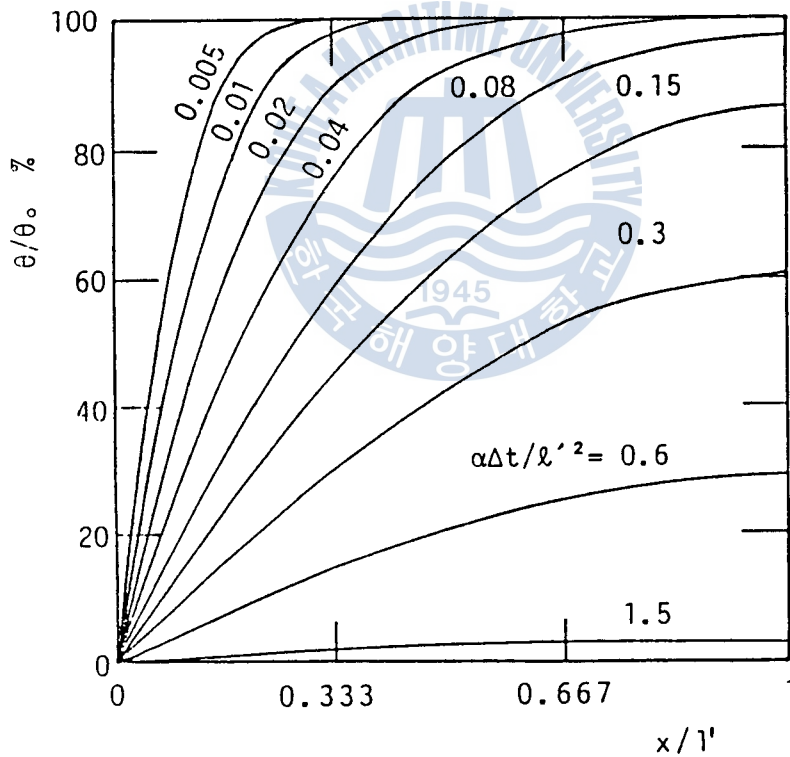


Fig. 2.1 Temperature variation at the various time in a half slab

第3章 數值解析

3.1 一次元 正問題 관한 數值解析

먼저, 嚴密解가 存在하는 위의 境遇의 結果와 本 數值解法에 의한 數值解析 結果를 檢討 하기로 한다. 이를 위하여, 式(2.1)로 表現되는 同一한 모델에 관하여 콘트롤 볼륨方法 으로, 그림(3.1)과 같이 평판을 分割시킨 다음, 式(2.1)을 이하에서 記述하는 바대로 離散化 시킨다. 式(2.1)을 i 번째 node에서 時間과 距離에 對하여 積分을 하면 一般式은 다음과 같이 表現된다.

$$\rho c \iint \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta x \Delta t = \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta x \Delta t \quad (3.1)$$

여기서,

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta x \Delta t = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\delta x_i} - \frac{k(\theta_i - \theta_{i-1})}{\delta x_{i-1}} \right] \Delta t \quad (3.2)$$

上式에서 時間에 대한 積分에 관하여는, 時刻 t 에서의 i node의 溫度를 θ_i 라고 時刻 $t + \Delta t$ 에서 θ'_i 라고 하여 加重因子(Weighting factor) f 를 導入하여 다음 式과 같이 表現 한다.

$$\int_t^{t+\Delta t} \theta_i dt = [f \cdot \theta'_i + (1-f) \cdot \theta_i] \Delta t \quad (3.3)$$

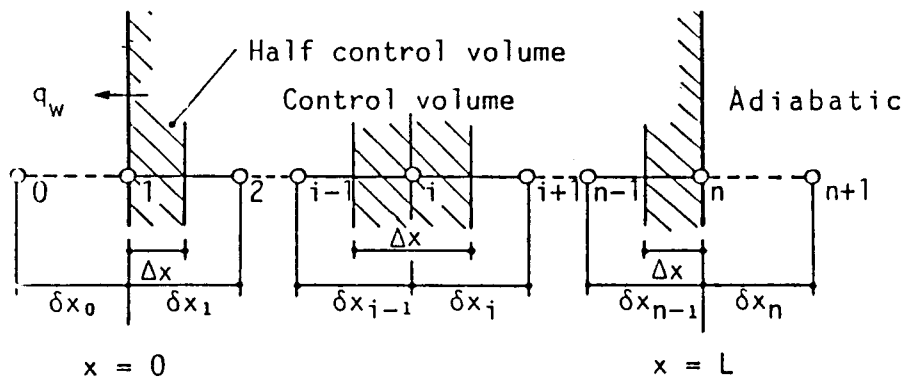


Fig. 3.1 Control volumes in a plate

加重因子 f 에 관하여는 $f = 1.0$ 이라고 한 陰解法 (Fully implicit scheme)을 採用하기로 한다. 이렇게 하면 數值計算의 一般의 四原則의 拘束을 받지않게 되어 切點의 間隔에서 비롯되는 샘플링 時間間隔의 制約을 받지 않게 되고, 計算 그 자체에 그다지 影響도 미치지 않기 때문이다.¹²⁾ 위의 結果를 利用하면, 式(3.1)의 右邊은

$$\int_i^{t+\Delta t} \left[\frac{k(\theta_{i+1}-\theta_i)}{\delta x_i} - \frac{k(\theta_i-\theta_{i-1})}{\delta x_{i-1}} \right] dt = \left[\frac{k(\theta'_{i+1}-\theta'_i)}{\delta x_i} - \frac{k(\theta'_i-\theta'_{i-1})}{\delta x_{i-1}} \right] \Delta t \quad (3.4)$$

左邊은

$$\rho c \iint \frac{\partial \theta}{\partial t} dx dt = \rho c \Delta x (\theta'_i - \theta_i^\circ) \quad (3.5)$$

가 된다. 式(3.4), (3.5)를 原式에 代入하면, 콘트롤볼륨법에 의한 i 번째 切點 주위에서의 離散化方程式 (Discretization equation)은 다음과 같이 整理된다.

$$\left(\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} + \frac{k}{\delta x_{i-1}} + \frac{k}{\delta x_i} \right) \theta'_i = \frac{k}{\delta x_i} \theta'_{i+1} + \frac{k}{\delta x_{i-1}} \theta'_{i-1} + \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_i^\circ \quad (3.6)$$

上式으로부터, $i = 1$ ($x = 0$)의 境界面에서의 離散化方程式은 上式에 $i = 1$ 을 代入하여 다음 式을 얻는다.

$$\left(\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} - \frac{k}{\delta x_i} \right) \theta'_1 = \frac{k}{\delta x_1} \theta'_2 + 0 \cdot \theta'_0 + \left[\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_1^\circ - \frac{k}{\delta x_0} (\theta'_1 - \theta'_0) \right] \quad (3.7)$$

式(3.7)에서 θ° 라 함은 그림(3.1)과 같이 $i = 0$ 라는 切點을 境界面 밖에 假想한 結果가 되며 따라서 右邊 중괄호안의 $\frac{k}{\delta x_0} (\theta'_0 - \theta'_1)$ 는 表面의 熱流束 q_w 를 의미하게 된다. 마찬가지로 $i = n$ ($x = L$)의 斷熱된 境界面에서의 離散化方程式은 式(3.6)에 $i = n$ 을 代入하여 얻는다.

$$\left(\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} + \frac{k}{\delta x_{n-1}} \right) \theta'_n = 0 \cdot \theta'_{n+1} + \frac{k}{\delta x_{n-1}} \theta'_{n+1} + \left[\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_n^\circ + \frac{k}{\delta x_n} (\theta'_{n+1} - \theta'_n) \right] \quad (3.8)$$

여기서도 θ'_{n+1} 은 境界밖의 假想的 $n+1$ 切點에서 시각 $t+\Delta t$ 에서의 溫度를 의미하며, 따라서 右邊 중괄호안의 $\frac{k}{\delta x} (\theta'_{n+1} - \theta'_n)$ 은 境界밖에서 流入하는 熱流束을 의미하나, 여기서는 斷熱이므로 이 값은 零이 된다.

式(3.6)을 더욱 簡略히 表現하면 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$a_i \theta'_i = b_i \theta'_{i+1} + c_i \theta'_{i-1} + d_i$$

$$a_i = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} + \frac{k}{\delta x_{i-1}} + \frac{k}{\delta x_i}, \quad b_i = \frac{k}{\delta x_i}, \quad c_i = \frac{k}{\delta x_{i-1}}, \quad d_i = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_i^{\circ} \quad (3.9)$$

上式이 의미하는 바는 i 번째 切點에서 時刻이 t 에서 Δt 만큼 經過되어 $t + \Delta t$ 에서의 새로운 溫度는 주위 $i-1$, $i+1$ 切點의 새로운 溫度를 알면 求할 수 있음을 의미한다. 그러나, TDMA 를 써서, i 번째 切點에서의 새로운 溫度가 $i-1$ 에서의 새로운 溫度만에 의하여 決定된다고 하여,

$$\theta'_i = P_i \theta'_{i-1} + Q_i \quad (3.10)$$

式(3.9)에서 θ'_{i+1} 항에는 上式에 $i+1$ 을 代入한 結果로 置換시킨다. 결국, 式(3.9)에서 各 係數는

$$P_i = \frac{c_i}{a_i - b_i P_{i+1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + b_i Q_{i+1}}{a_i - b_i P_{i+1}} \quad (3.11)$$

式(3.6), (3.7)의 境界面에 있어서, 式(3.11)로 表現되는 係數의 값은 구체적으로 다음과 같다.

$$\text{at } i=1; P_1=0, \quad Q_1=\theta'_1 \quad (3.12)$$

$$\text{at } i=n; P_n = \frac{c_n}{a_n}, \quad Q_n = \frac{d_n}{a_n} \quad (3.13)$$

그러므로 非定常 熱傳導 正問題에서 上述한 方法에 의하여 數值計算을 하는 順序는, 먼저 式(3.13)에서 P_n, Q_n 을 求한 다음 n 에서 $i=1$ 쪽을 向하여 順次的으로 式(3.11)에 의해 P_i, Q_i 를 求하고서, 式(3.10)에서 $i=1$ 에서 $i=n$ 쪽 正方向으로 各 切點의 溫度를 求하면 되고, 反復計算은 不必要하다.

그림(3.2)와 그림(3.3)은 強制對流發熱系의 實驗에서 發熱體로 자주 쓰이는 溫度傳導率 $\alpha = 0.0165 \text{ m}^2/\text{hr}$ 인 SUS304의 全두께 $L = 30 \text{ mm}$ 에 대한 正問題 數值解析 結果와 第二章의 嚴密解를 比較한 것이다. 여기서 全두께 L 은 第二章에서의 平版두께 l' 에 相當한다. 計算에서 切點數는 $n = 301$ 즉, 切點間의 0.1 mm 의 等間隔으로 하였다. 그림(3.2)는 外表面에서 1 mm 의 위치 즉, $x = L/30$ 에서 그림(3.3)은 外表面에서 10 mm 의 위치 즉 $x = L/30$ 에서 샘플링 時間間隔을 바꾸었을 때 嚴密解와 數值解를 比較하였다. 時間間隔

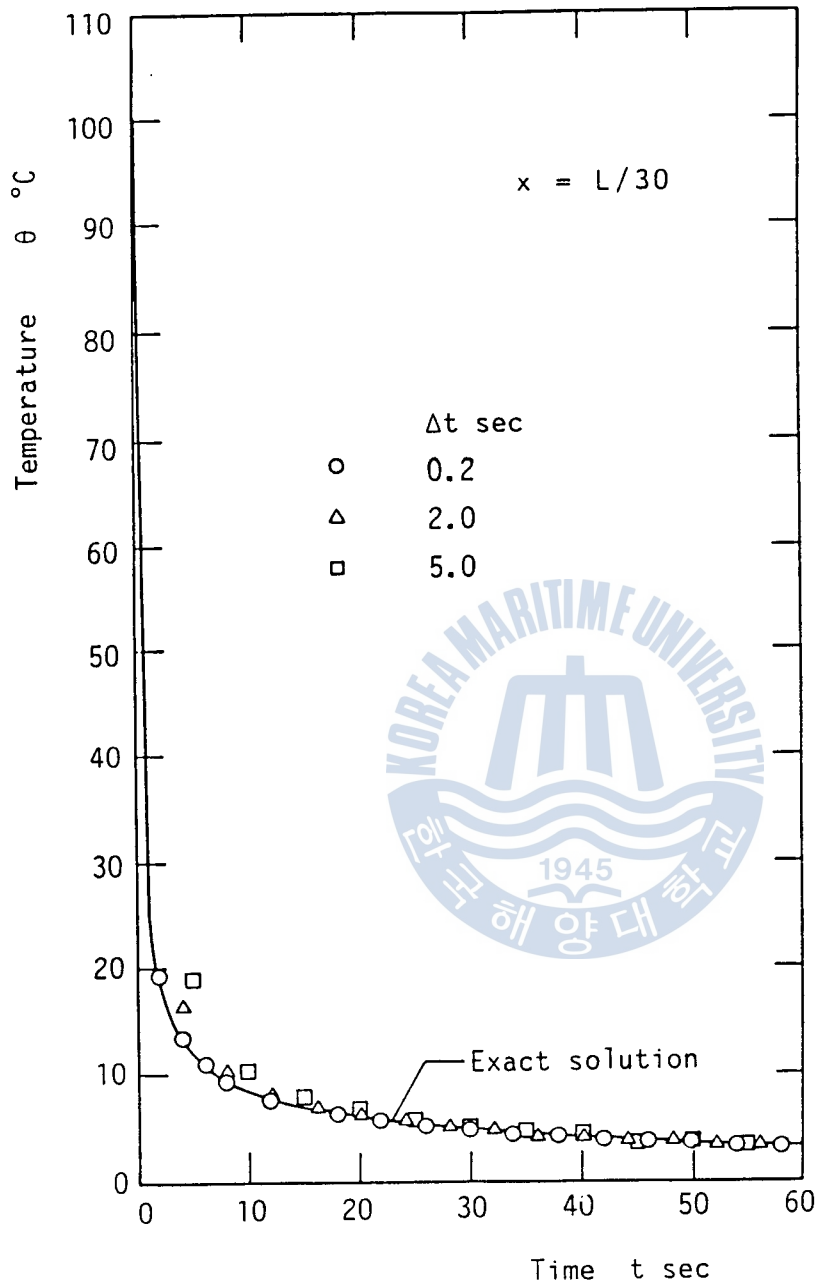


Fig. 3.2 Comparison of numerical solution with exact solution in direct problem

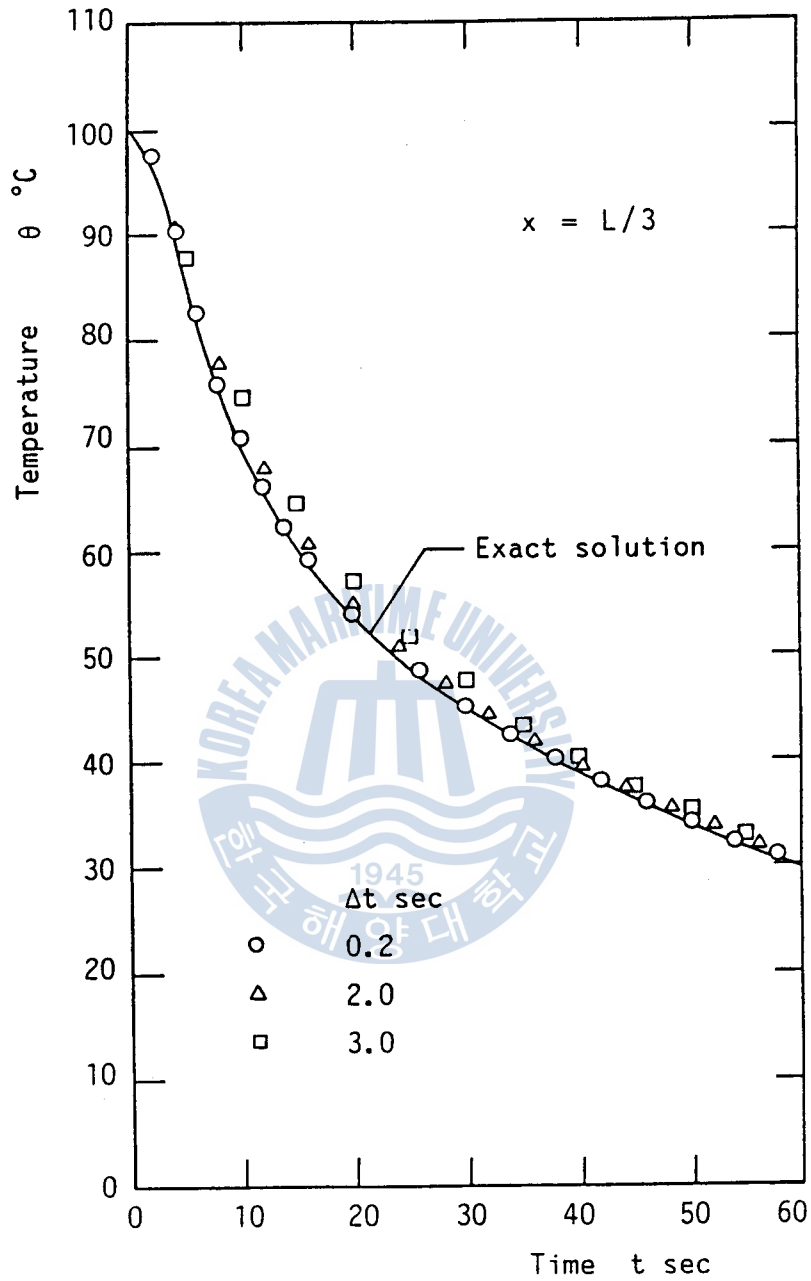


Fig. 3.3 Comparison of numerical solution with exact solution in direct problem

이 클수록 嚴密解와 差異를 보이지만, 比較的 그 影響은 작으며, 計算時間을 많이 消費하게 즉, 切點數를 많이 취하면 이 問題는 改善되리라 期待되며, 基本的으로 샘플링 間隔이 解의 正確度에 미치는 影響은 無視될 수 있다고 생각된다.

3.2 한면이 斷熱된 物體內 한點의 溫度를 알고 있을 境遇의 逆問題 數值解析

다음에는 斷熱된 內表面 ($x=L$ 또는 $i=n$)의 溫度로부터 物體 內部와 外表面 ($x=0$ 또는 $i=1$)의 溫度와 表面熱流束을 求하는 소위 非定常 熱傳導에서 逆問題의 數值解析을 생각한다. 따라서 正問題와 같은 初期條件과 境界條件下에서 平版의 非定常 熱傳導問題를 取扱하게 된다. 그러므로 正問題 數值解析에서와 같이 임의의 i 切點주위에서의 離散化方程式은 式(3.6)으로, 境界面인 外表面에서의 方程式은 式(3.7)로, 內表面에서의 方程式은 式(3.8)로 주어진다. 이 境遇는 式(3.10)에 相當하는 알고리즘으로서

$$\theta'_i = P_i \theta'_{i+1} + Q_i \quad (3.14)$$

라 하고, 式(3.9)에서 θ'_{i-1} 을 消去하기 위하여 上式을 $i-1$ 에 對하여 쓰면

$$\theta'_{i-1} = P_{i-1} Q'_i + Q_{i-1} \quad (3.15)$$

이 되므로 이를 式(3.9)에 代入하면, 結果적으로 P_i, Q_i 는 各各 다음과 같이 된다.

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q'_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.16)$$

境界面인 $i=1, i=n$ 에서 上式의 係數는 各各 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{at } i=1; \quad P_1 &= \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \\ \text{at } i=n; \quad P_n &= 0, \quad Q_n = \theta'_n \end{aligned} \quad (3.17)$$

단, 이 경우는 $Q_1 = d_1/a_1$ 에서 d_1 內에 求하고자 하는 表面熱流束 q_w 가 들어있으므로, 適切하게 表面熱流束값을 假定하면서 計算하여야 한다. P_1 은 샘플링 時間間隔과 切點間 距離가 決定되면 計算할 수 있는 常數이다. 이렇게 하여 P_1 과 Q_1 이 求해지면, 式(3.16)에 의하여 $i=1$ 에서 $i=n$ 쪽을 向하여 各 切點에서의 係數 P_i, Q_i 먼저 順

次的으로 求할 수 있다. 다음은 式(3.14)에 의하여 $i=n$ 에서 $i=1$ 쪽을 向하여 즉 外表面을 向하여 順次的으로 壁面內 溫度分布가 求해진다. 實題의 計算에 있어서는 式(3.17)에서 알 수 있는 바와 같이 올바른 表面熱流束을 假定하여야 Q_n 과 時間이 $t + \Delta t$ 에서의 θ'_n 이 일치할 수 있으므로 反復計算을 必要로 하게되며, 表面熱流束과 溫度分布의 正確性을 確保하는 範圍內에서 適切한 收斂條件을 設定할 수 있다. 이렇게 하여 時刻 t 에서 $t + \Delta t$ 의 새로운 溫度分布 θ'_i 가 計算되면, 다음의 時刻 $t + \Delta t + \Delta t$ 에서의 溫度分布는 前時間 스텝의 溫度分布를 θ_i^o 로, 計算하여야 할 溫度分布를 θ'_i 으로 하여 時間에 對하여 順次的으로 計算을 修行한다.

이상의 TDMA 方法에 의하여 逆問題를 解折하고 그 結果를 嚴密解와 比較하기 위하여, 먼저 그림(3.4)와 같이 平版內의 主要 計算點을 設定한다. 이 그림에서 外表面에서 斷熱된 內表面까지의 距離를 L 로 表示하고, 各 主要計算點까지의 距離를 無次元化 하여 表現하였다. 實際 計算에서는 3.1節의 正問題 解折에서의 같이 全두께 $L = 30\text{ mm}$, 總切點數 $n = 301$, 切點間은 等間隔으로 0.1 mm 로 하여, 溫度傳導率 $\alpha = 0.0165\text{ m}^2/\text{hr}$ 의 SUS 304에 對하여 數值計算을 하였다.

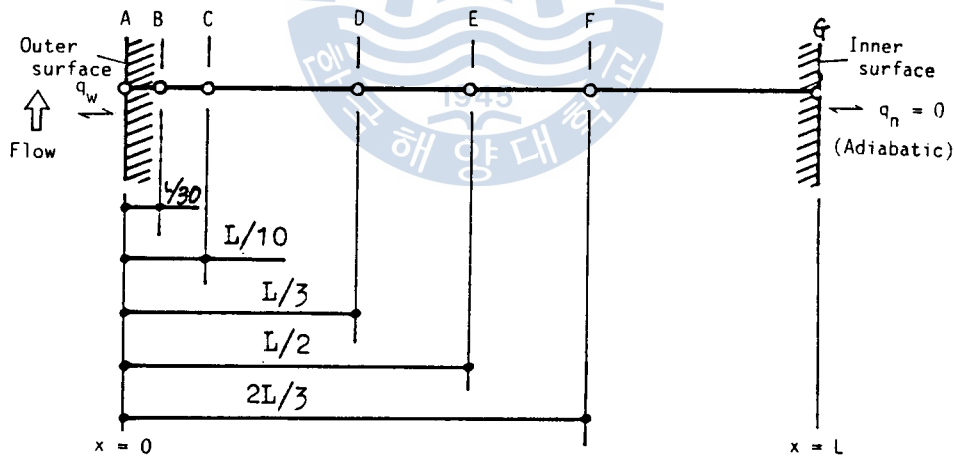


Fig.3.4 Principal nodal point in a plate .

이와 같이 하여 逆問題를 數值計算함에 있어서, $x=L$ 에서 熱電對에 의하여 測定한 溫度로서는 熱電對의 誤差를 堪案하여 小數點 以下 3 자리까지를 有效 자리수로 했으며 嚴

密解로서는 그림 (3.2), 그림 (3.3)에서 알 수 있는 바와 같이 正問題解折에서 時間間隔을 0.2초로 한 結果가 嚴密解와 거의 일치하므로 이를 편의상 嚴密解로 하였다. 그림 (3.5)는 斷熱된 內表面의 溫度로부터 表面 熱流束을 適切하게 假定하여 反復計算에 의해 $x=L/3$ 위치의 溫度를 計算한 結果이며, 反復計算에 있어서 수렴조건, $[Q_n - \theta'_n]$ 은 0.005以內로 하였다. 一名 Fourier 數라고 불리는 無次元 時間間隔 $\Delta\tau = \alpha \Delta t / l^2$ 을 計算함에 있어서 代表길이로는 計算點과 假想的인 熱電對 위치와의 距離가 $2L/3$ 이므로 20 mm로 하였다. 그림 (3.5)에서 알 수 있는 바와 같이 時間間隔이 2.0초 즉 無次元 時間間隔이 0.023의 境遇에는 상당히 解가 不安定함을 알 수 있다. 또한 □로 表示된 無次元 時間間隔이 0.046의 境遇는 嚴密解와 거의 일치함을 보이고 있다. 그림 (3.6)은 時間의 經過에 관계없이 外表面的 溫度 $\theta = 0$ 인 結果를 逆計算의 結果와 比較한 것이다. 단, 無次元 時間間隔을 計算함에 있어 代表길이는 30 mm가 되도록 하였으며, 수렴조건은 0.0005로 하였다. 時間間隔이 2.0초 즉 無次元 時間間隔이 0.01초인 境遇는 計算結果가 發散하고 있다. 또한 그림 (3.5)와 (3.6)의 어느 境遇도 計算初期의 몇 스텝까지 時間이 經過될 때까지는 計算値가 安定되지 못함을 보이고 있다. 그림 (3.7)은 外表面 즉, $x=0$ 에서 境界面 밖으로 나간 熱流束의 嚴密解와 數值計算 結果를 比較한 것이다. 熱流束의 計算에서는 時間間隔이 3.0초인 境遇도 數值解가 發散함을 알 수 있으며, 이러한 境遇는 shouji¹¹⁾의 研究結果에서도 보고된 바 있다. 즉, 非定常 熱傳導 逆問題에서 어느 정도 正確度를 維持하기 위한 時間間隔의 限界値는 溫度를 求하는 境遇보다도 크다는 것을 알 수 있다.

3.3 物體內 두點의 溫度를 알고 있을 境遇의 正問題와 逆問題 數值解析

여기에서는 3.2節과는 달리 平版內 두 지점의 溫度를 알고 있을 때, 그 區間 사이를 正問題로서 解折하고 이로부터 外表面과 外表面에 隣接한 既知의 溫度 區間 사이를 逆問題로 解折하는 境遇를 생각한다. 이러한 境遇는 흔히 傳熱實驗에서 經驗할 수 있는 것이다.

그림 (3.4)에서 D點과 F點의 溫度를 알고 있을 境遇에 對하여 생각하기로 하며, 이 境遇도 平版은 SUS 304이며, 全두께 $L = 30$ mm라고 한다. 正問題 解折에서의 境界條件은 $x=L/2$ 에서 溫度 θ_C , $x = 2L/3$ 에서 溫度 θ_E 가 된다. 數值計算을 위한 離散化方程式은 3.1節의 式(3.6)으로 一般式이 주어지며, 各切點의 溫度를 式(3.10)의 알고리즘으로 求할 경우 各係數 P_i , Q_i 도 式(3.11)과 同一하게 된다. 境界面의 狀態를 明確

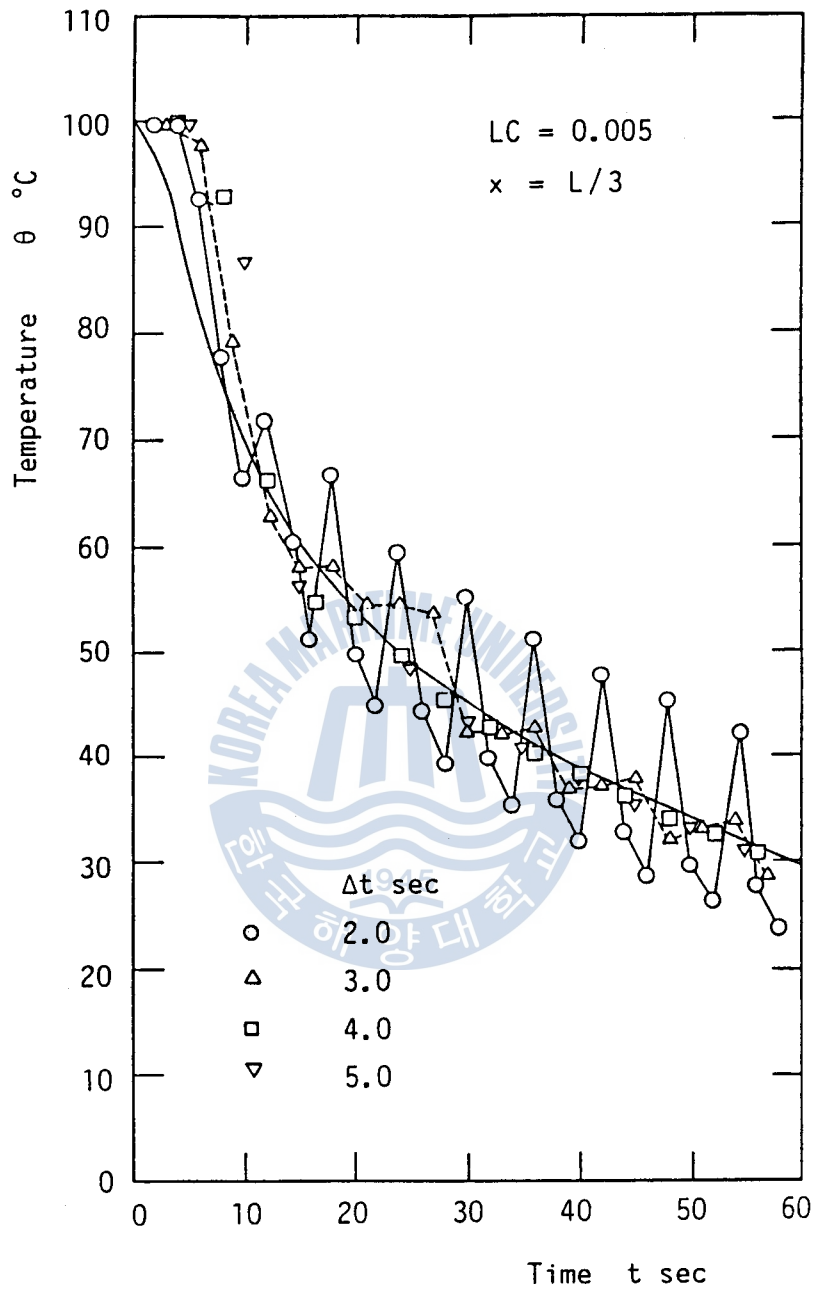


Fig. 3.5 Numerical solution of temperature with various time spacing near outer surface

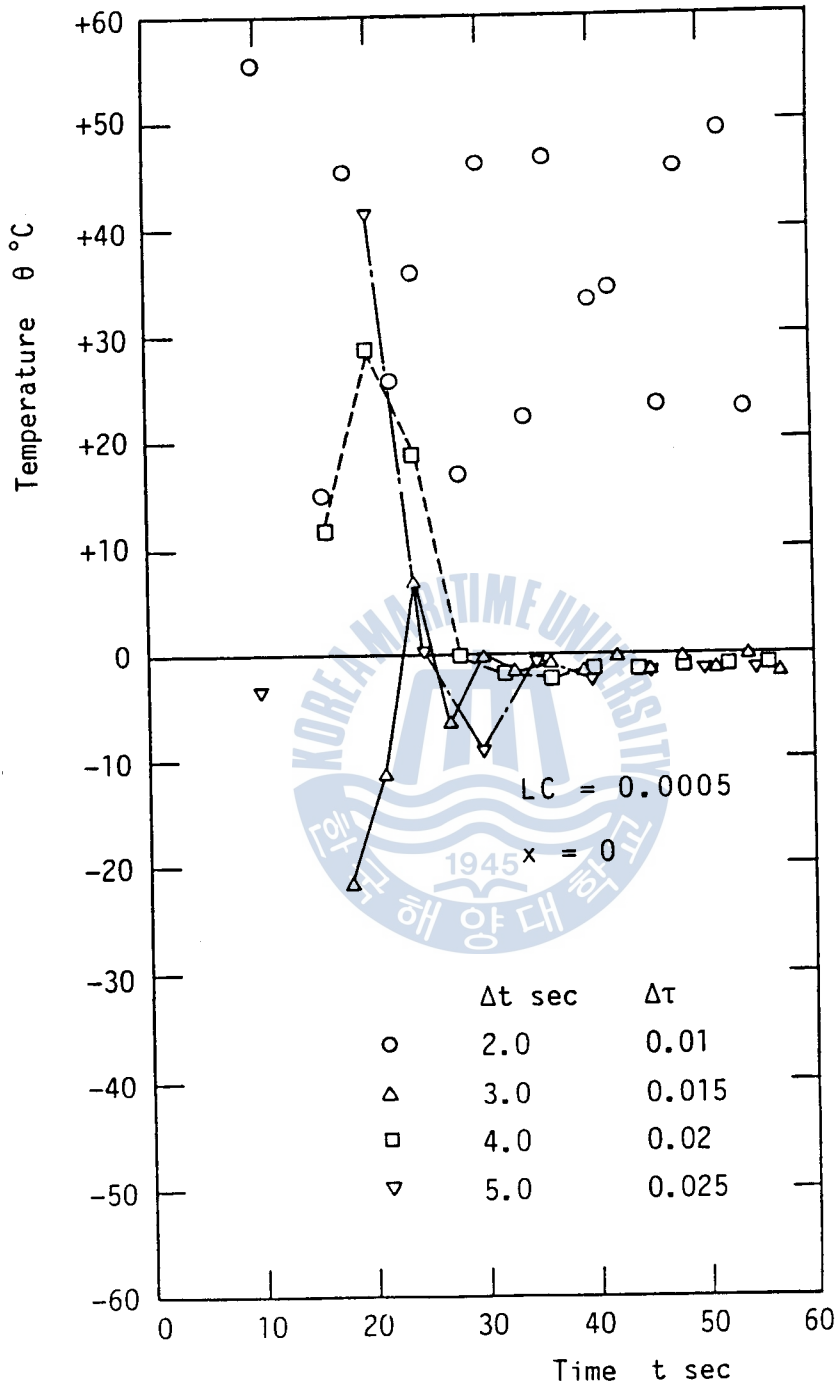


Fig. 3.6 Numerical solution of temperature with various time spacing at outer surface.

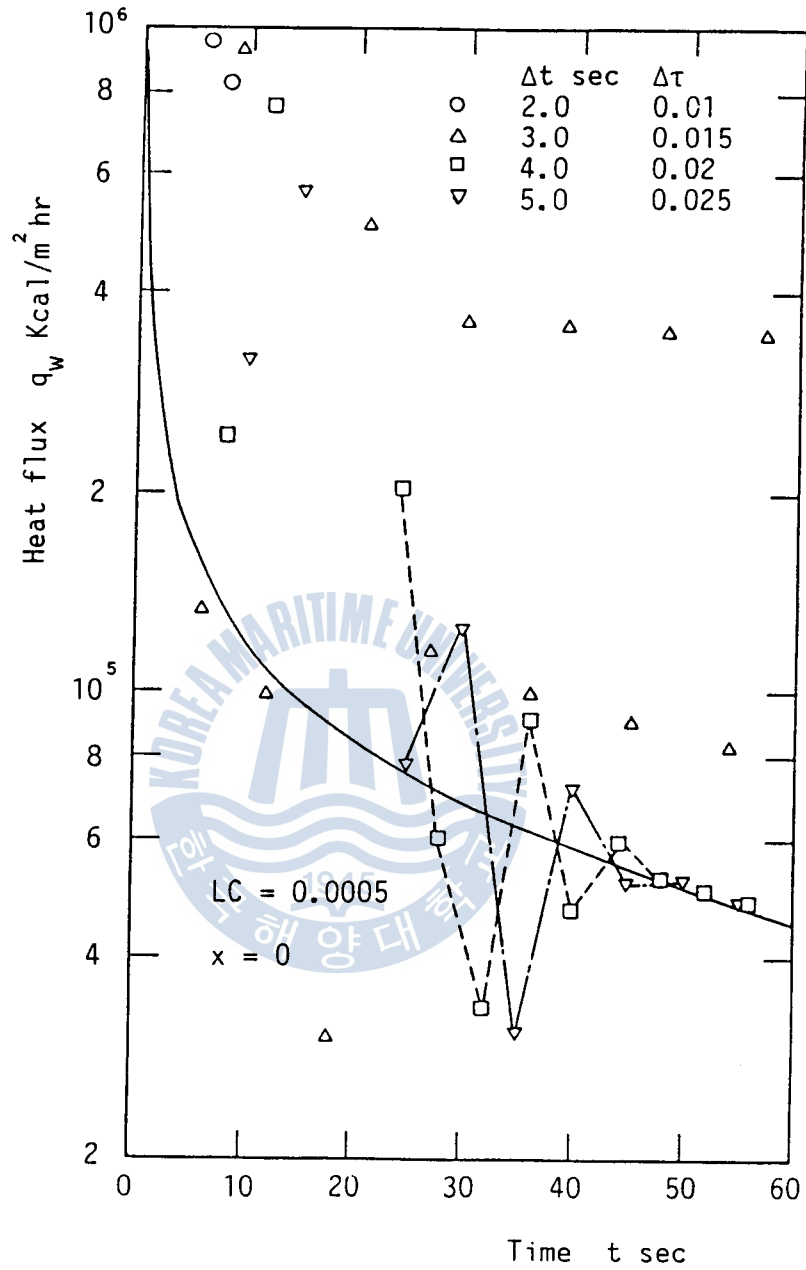


Fig. 3.7 Numerical solution of heat flux with various time spacing

히 하기 위하여 一般式에서 D지점과 F지점의 離散化方程式을 써보면

$$\begin{aligned} \text{at } x=D ; \left(\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} + \frac{k}{\delta x_j}\right) \theta'_j &= \frac{k}{\delta x_j} \theta'_{j+1} + 0 * \theta'_{j-1} + \left[\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_j^\circ - q_j\right] \\ \text{at } x=F ; \left(\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} + \frac{k}{\delta x_m}\right) \theta'_m &= \frac{k}{\delta x_m} \theta'_{m+1} + 0 * \theta'_{m-1} + \left[\frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \theta_m^\circ - q_m\right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

위의 두 式에서 q_j, q_m 은 各各

$$q_j = \frac{k}{\delta x_{j-1}} (\theta_j - \theta_{j-1}), \quad q_m = \frac{k}{\delta x_{m-1}} (\theta_m - \theta_{m-1})$$

이며, 이는 兩境界面에 出入하는 熱流束을 의미한다. 이와 같은 境界條件下에서는 式(3.18)에서 各式의 右邊의 係數 c_i 는 0이 됨을 알 수 있다. 그러므로 式(3.10)의 係數 P_i, Q_i 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{at } x=D ; P_j &= 0, \quad Q_j = \theta'_C \\ \text{at } x=F ; P_m &= 0, \quad Q_m = \theta'_E \end{aligned} \quad (3.19)$$

이는 이러한 正問題에서는, F지점에서 D지점을 向하여 P_i, Q_i 를 順次的으로 求하고 서 式(3.10)에 의하여 D지점에서 F지점을 向하여 단 一回로 區間內 溫度分布를 求할 수 있음을 의미한다. 그림(3.8)은 앞에서의 嚴密解와 위의 數值計算에 의한 結果를 比較한 것이다. 時間間隔을 바꾸어도 상관없이 嚴密解와 잘 일치함을 알 수 있다.

上記의 結果를 利用하여 이번에는 外表面上에서 10 mm 떨어진 D點에서 外表面向까지의 區間에 對하여 熱傳導 逆問題 解折에 對하여 記述한다. 이의 數值解折 알고리즘은 3.2節의 式(3.14)~式(3.17)과 同一하다.

그림(3.9)는 이렇게 하여 傳熱面 外表面向 溫度를 時間間隔을 바꾸면서 計算하여 嚴密解인 $\theta = 0$ 와 比較한 것이다. 無次元 時間間隔이 0.009인 ○의 境遇는 解가 安定되지 못하고 있으며, 그外 境遇는 計算初期의 몇 단계 時間스텝을 지나면 嚴密解와 거의 一致함을 보이고 있다.

그림(3.10)은 마찬가지로 表面熱流束을 計算한 結果로서, 無次元 時間間隔이 0.009인 ○의 境遇는 解가 表面溫度 計算의 境遇보다 더욱 發散하여 이 그래프상에는 전부 表現되지 못했으며, $\Delta \tau = 0.014$ 以上에서 比較的 安定된 解를 求할 수 있음을 보이고 있다.

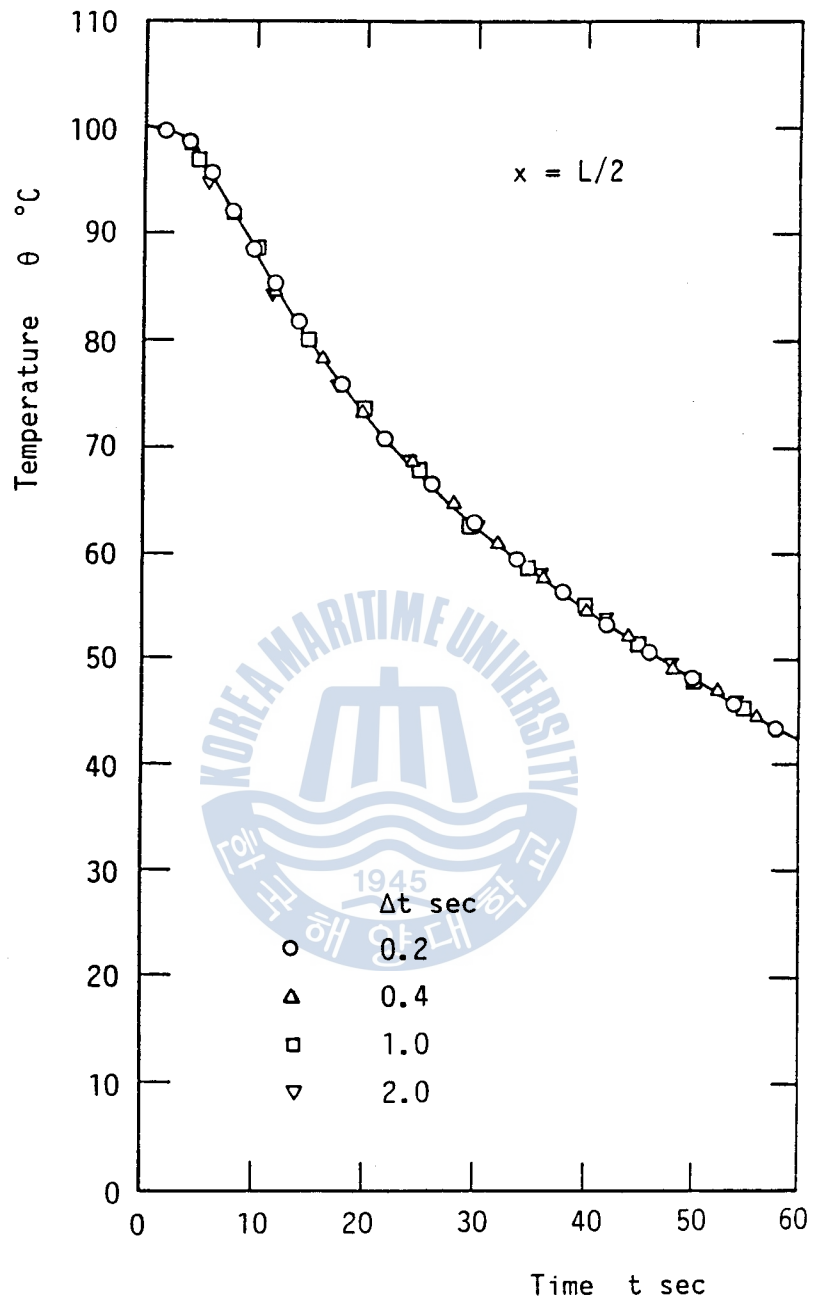


Fig. 3.8 Numerical solution of wall temperature from the known temperature at 2 - point in direct problem

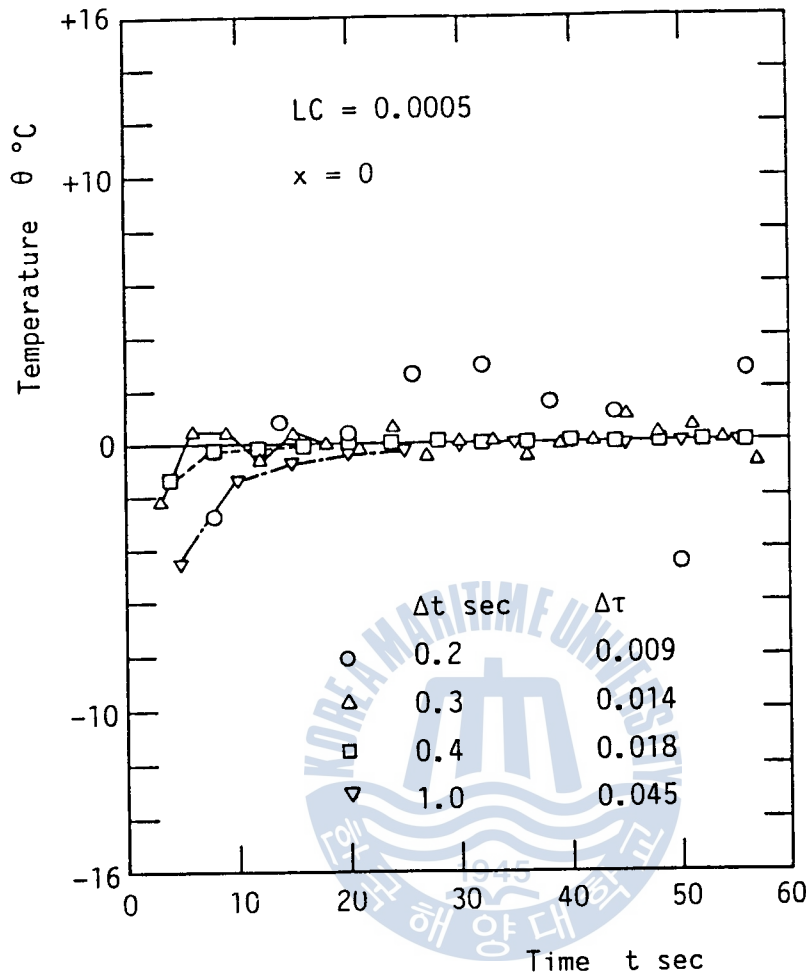


Fig. 3.9 Numerical inverse solution of surface temperature with various time spacing

또한, 그림 (3.9)와 그림 (3.10)의 결과를 $X=L$ 에서 外表面까지 逆方向 計算을 한 그림 (3.6)과 그림 (3.7)의 結果를 比較하면, 外表面에서 되도록 가까운 溫度를 알고 逆計算을 할수록 精確한 表面의 熱流束과 表面近處의 溫度를 알 수 있음을 의미한다. 그러나 境遇에 따라 熱電對의 設定 위치가 設定될 수 있다고 생각되며, 例를 들면 比較的 直徑이 큰 棒의 熱處理 境遇는 3.2節의 熱電對 設定 모델에 가까우며, 一般의 傳熱實驗에서는 3.3節의 모델에 가깝다고 생각된다. 그리고 外表面의 溫度가 週期的으로 變化하지 않는 경우에는 E點에 設定된 假想的 熱電對의 위치는 다음 過程의 逆問題 解折엔 基本的으로 아무런 影響을 미치지 않는다고 생각되나, 實際의 測定에서 熱電對의 測定誤差를 고려하면 되

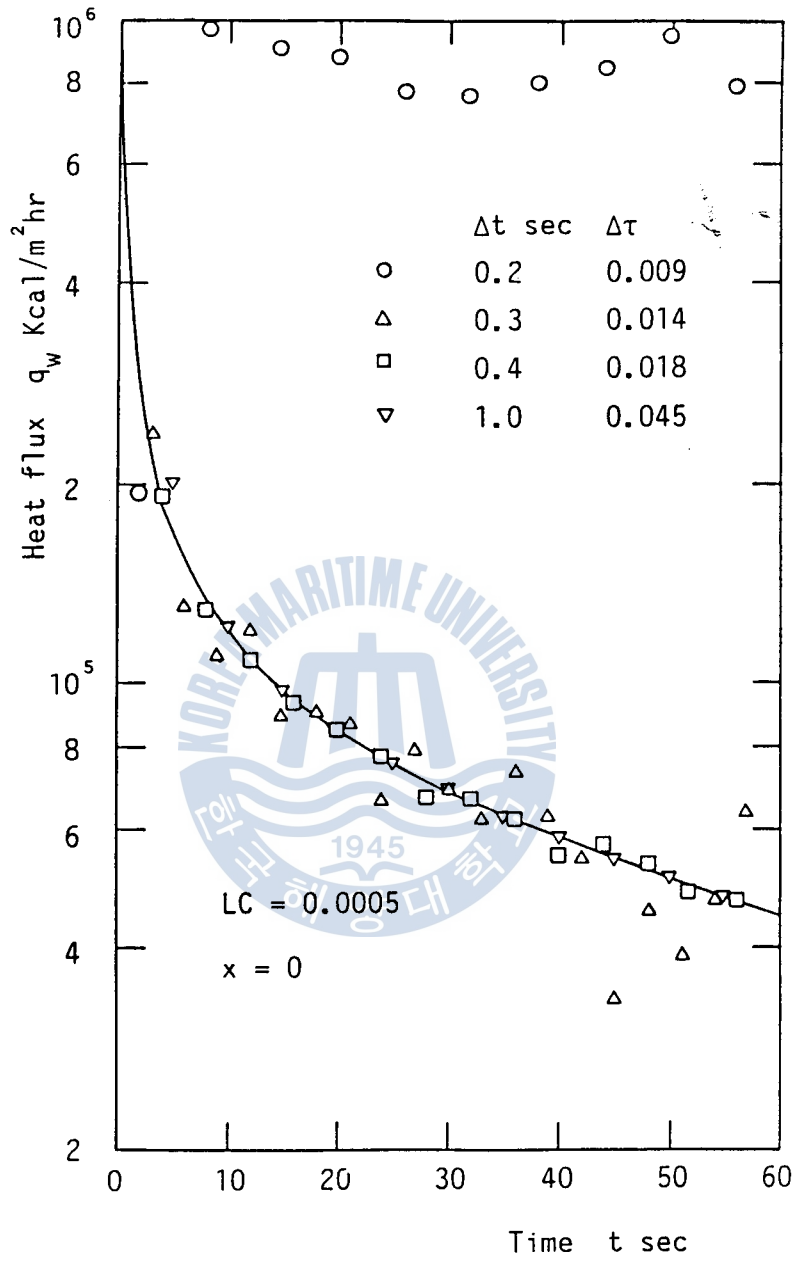


Fig. 3.10 Numerical inverse solution of heat flux with various time spacing

도록 D點은 물론 F點도 外表面에 가까울수록 보다 正確한 外表面溫도와 熱流束을 計算할 수 있다고 생각된다.

3.4 週期성을 갖는 逆問題 數值解析

核沸騰 및 遷移沸騰 狀態에서는 傳熱面 表面에서 氣泡가 生成, 成長, 離脫을 反復함으로써 傳熱面 表面溫도가 週期的으로 變化하게 된다. 또한 強制對流系의 限界熱流束狀態³⁾에서는 傳熱面 溫도가 週期的으로 變하다 急上昇하여, 核沸騰狀態로부터 膜沸騰狀態로 變化한다. 이와 같은 境遇에는 傳熱面溫도가 週期的으로 變化하는 境遇의 逆問題에 접하게 된다. France¹³⁾은 原子爐의 事故時 急冷却 實驗과 關하여 이와 같은 週期성을 갖는 境遇에 關하여 Fast Fourier Transform (FFT)을 利用하여 檢討하고 있다.

여기서는 上述한 3.3節의 計算方法을 利用하여 週期성을 갖는 逆問題에 關하여 생각한다. 表面의 溫度變化가 다음式

$$\theta_1 = 80.0 + 60.0 * t + 50.0 * \sin(15.7 * t) \quad (3.20)$$

과 같이 變化한다고 하였을 境遇를 計算한다. 3.3節에서와 같이 式(3.20)으로부터 正問題의 解析을 하여 物體內 各 切點의 溫度 및 熱流束을 求한 다음 이를 일종의 嚴密解로 간주하여 이를 바탕으로 逆問題를 計算 檢討한다.

그림(3.11)은 SUS 304에 있어서 $x = 1\text{mm}$ 에서의 溫도와 熱流束을 境界條件으로 해 無次元 時間間隔을 바꾸어 가면서 表面溫도를 計算한 結果를 式(3.20)에 의한 表面溫도의 計算値와 比較한 것이다. 無次元 時間間隔이 0.018以上에서는 嚴密解와 잘 一致하나, 無次元 時間間隔이 0.009에서는 상당히 計算誤差가 크다는 것을 알 수 있다.

그림(3.12)는 위와 똑같은 境遇로서, 表面의 熱流束을 計算하여 嚴密解와 比較하였다. 表面熱流束의 境遇는 無次元 時間間隔이 0.046以上에서 比較的 만족할만한 解를 얻을 수 있다. 그러나 無次元 時間間隔이 0.46의 境遇와 같이 너무 커서 變化의 波形을 正確히 表現할 수 없을 경우는 다시 表面熱流束 計算의 誤差도 커짐을 알 수 있다. 이러한 點은 그림(3.11)에서 計算結果를 나타내고 있지 않지만 表面溫도의 計算에서도 마찬가지임을 確認하였다. 그러므로 週期성을 갖는 熱傳導 逆問題의 計算에 있어서는, 逆問題 固有의 性質로부터 비롯되는 時間間隔의 下限値外에 熱流束 및 溫度變化의 波形을 어느 정도 追從하기에 必要한 上限値의 범주內에서 時間間隔을 設定하여야 함을 알 수 있다.

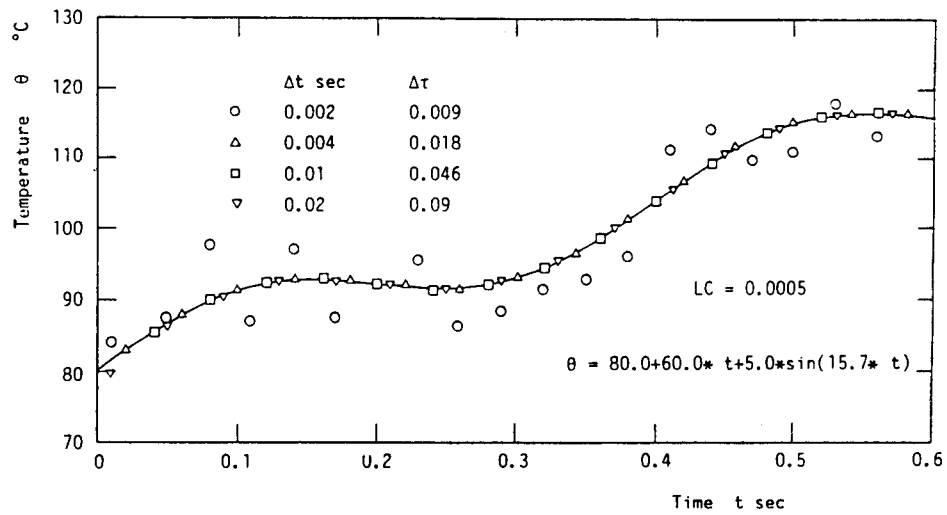


Fig. 3.11 Outer surface temperatures with various time spacing in periodical inverse problem

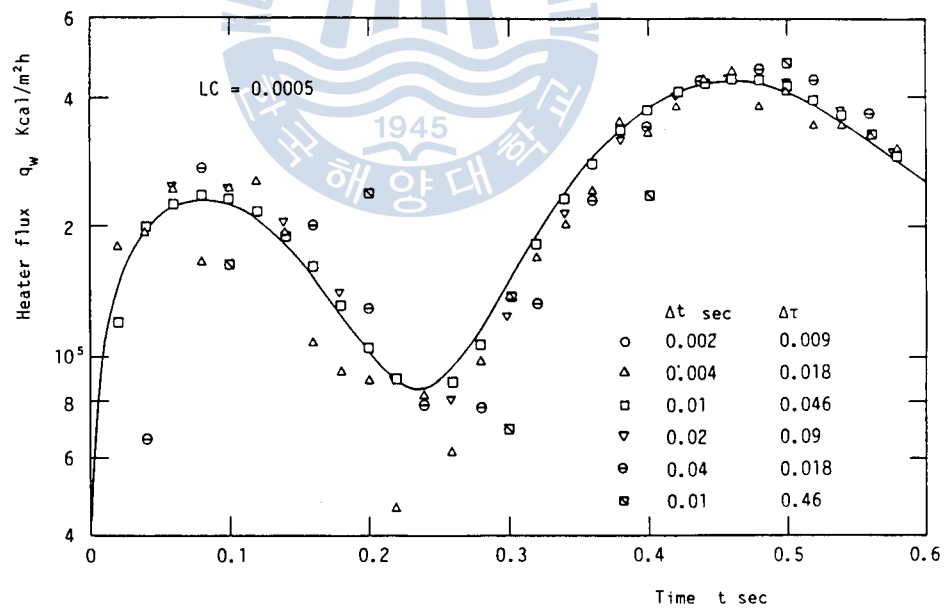


Fig. 3.12 Outer surface heat fluxes with various time spacing in periodical inverse problem.

第 4 章 檢 討

그림 (4.1)은 그림 (3.6)과 同一한 境遇로서 단지 反復計算에서 收斂條件을 0.005로 緩和 시켰을 때의 外表面溫度 計算值이며, 그림 (4.2)는 그림 (3.9)와 同一한 境遇로서 마찬가지로 收斂條件을 緩和시켰을 때의 結果이다.

이와 같이 TDMA 方法에 의하여 逆問題의 數值解析을 할 때 外表面 熱프럭스를 假定하면서 反復計算을 하는데 必要한 收斂條件을 強化시킬수록 보다 精密한 解를 求할 수 있음을 알 수 있다. 단, 이 境遇 收斂條件의 強化와 더불어 計算機의 計算時間이 幾何級數의으

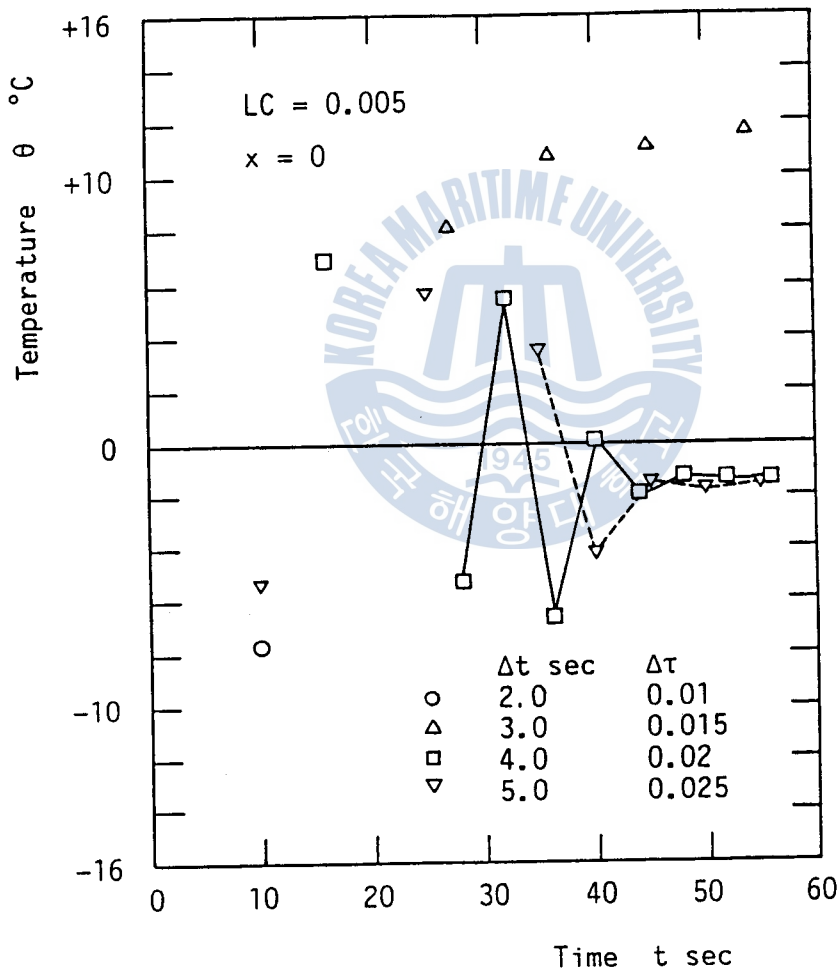


Fig. 4.1 Numerical inverse solution of outer surface temperature under another convergence condition

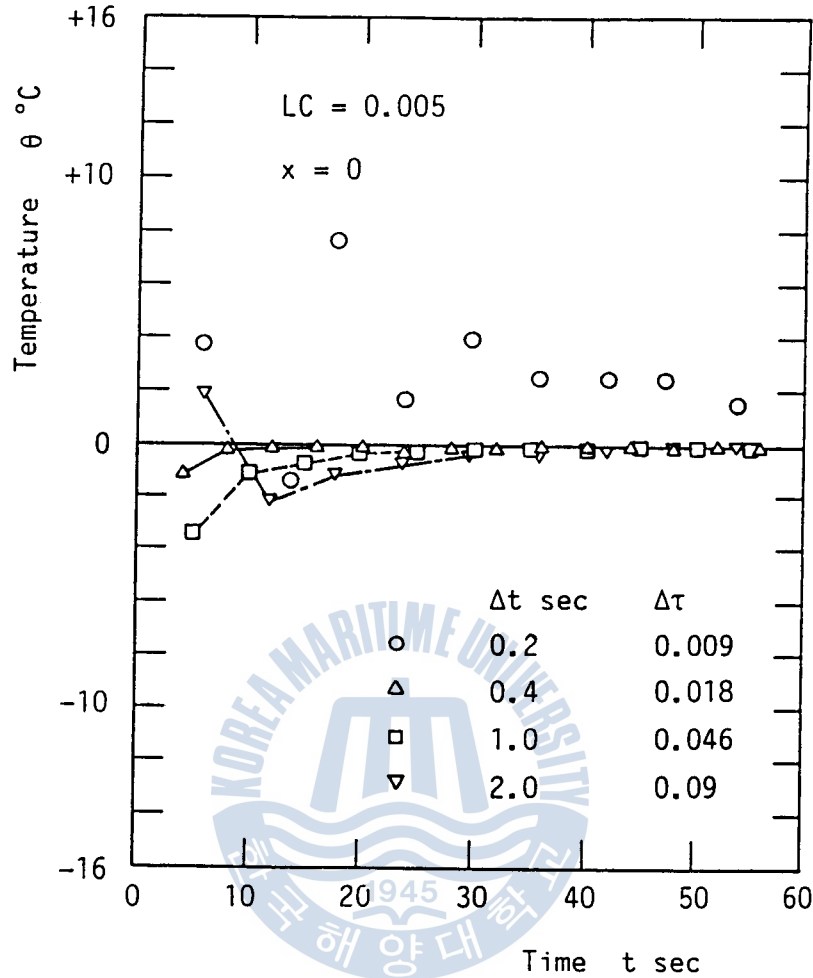


Fig.4.2 Numerical inverse solution of outer surface temperature under another convergence condition

로 增加되므로 適切한 收斂條件을 設定해야 한다.

3.3節에서 記述한 바와 같이 内部에서 2 곳以上 溫度를 熱電對로 測定하여 外表面까지 逆計算을 할 境遇는 溫度測定 위치가 外表面에 가까울수록 좋다고 하였으나, 이는 同一한 無次元 時間間隔의 限界值에서 보다 짧은 샘플링 時間間隔 Δt 를 취할 수 있기 때문이며, 이러한 點은 外表面溫度의 變化가 빠르고 더우기 週期性을 갖고 變化할 境遇에 重要하게 된다.

表 4.1은 傳熱實驗에 잘 쓰이는 溫度傳導率 $0.0165 \text{ m}^2/\text{hr}$ 의 SUS 304와, $0.4 \text{ m}^2/\text{hr}$ 의 대하여 外表面에서 距離 (mm)와 샘플링 時間間隔 (sec)의 變化에 대한 無次元 時間間隔, $\Delta \tau = \alpha \Delta t / l^2$ 의 計算值를 圖表로 整理한 것이다.

$\Delta t = \alpha \cdot \Delta t / \ell^2$

Δt	0.002	0.004	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	2.0	5.0	10.0
1	0.002	0.004	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	2.0	5.0	10.0
10	0.009	0.018	0.046	0.458	0.917	1.375	1.833	4.583	9.167	22.917	45.833
15	0.00009	0.0001	0.0005	0.005	0.009	0.014	0.018	0.046	0.092	0.229	0.458
20	0.00004	0.00008	0.0002	0.002	0.004	0.006	0.008	0.020	0.041	0.102	0.204
30	0.00002	0.00004	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.011	0.023	0.057	0.115
30	0.00001	0.00002	0.00005	0.0005	0.001	0.002	0.002	0.005	0.010	0.025	0.051

$\Delta t = \alpha \cdot \Delta t / \ell^2$

Δt	0.002	0.004	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	2.0	5.0	10.0
1	0.002	0.004	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	1.0	2.0	5.0	10.0
10	0.222	0.444	1.111	11.111	22.222	33.333	44.444	111.111	222.222	555.555	1111.111
15	0.002	0.004	0.011	0.111	0.222	0.333	0.444	1.111	2.222	5.555	11.111
20	0.001	0.002	0.005	0.049	0.098	0.148	0.198	0.494	0.988	2.469	4.938
30	0.0005	0.001	0.003	0.278	0.056	0.083	0.111	0.277	0.556	1.389	2.778
30	0.0002	0.0005	0.001	0.012	0.025	0.037	0.049	0.123	0.247	0.617	1.235

Table 4.1 Nondimensional time spacing results for SUS 304 and Copper plate

第 5 章 結 論

熱流體分野에서 최근에 많이 應用되고 있는 Patankar 의 TDMA 方法에 의하여 熱傳導 逆問題의 여러 境遇에 관하여 數值計算에 必要的인 關係式을 誘導하고, 正問題와 逆問題에 있어서 샘플링 時間間隔을 바꾸어 가면서 이에 따른 溫度和 熱流束의 精確性을 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

- (1) 非定常 熱傳導 正問題의 數值解析에 있어서 時間間隔은 解의 精確度에 基本的으로 影響을 갖고 있지 않다.
- (2) 逆問題의 數值解析에 있어서, 一般的으로 表面熱流束의 計算誤差는 表面溫度的 計算誤差에 비하여 크다.
- (3) 逆問題의 數值解析에 있어서 어느 정도 解의 精確性을 確保하기 위한 無次元 時間間隔은 0.015 以上이며, 0.05 程度 以上에서 滿足할만한 解를 얻을 수 있다.
- (4) 週期性을 갖는 逆問題의 數值解析에 있어서는 時間間隔의 下限値와 上限値가 存在한다. 下限値는 앞의 結論(3) 과 같으며, 上限値는 溫度變化 波形的 週期和 關係하고 있다.
- (5) 傳熱面 內部에 熱電對를 設置할 경우는 되도록 外表面에 가까운 곳에 熱電對를 設置하여야 보다 精確한 表面의 解를 구할 수 있다. 또한, 反復計算의 收斂條件의 強化는 보다 精確한 解를 구할 수 있지만, 이는 計算所要時間에 密接히 關係되므로 解의 精確度가 損傷되지 않는 範圍에서 適切히 選定되어야 한다.
- (6) 實際의 逆問題의 數值解析에서는 參考文獻³⁾과 같이 實計算을 통하여 充分히 檢討되어야 한다.

參 考 文 獻

1. Merte, JR. H. and Clark, J. A., Boiling heat transfer with cryogenic fluids at standard, frictional and zero-gravity, Trans. of the ASME, Ser. C, Aug. 351 ~359 (1964)
2. Veres, D. R. and Florschuetz, L. W., A comparison of transient and steady-state pool-boiling data obtained using the same heating surface, Trans. of the ASME, Ser. C, May, 229~232 (1971)

3. Kim kyung -kun, Heat transfer characteristics during the critical heat flux condition in a flow boiling system, 8 th Int. Heat Trans. Conf., San Fransisco (1986)
4. Szabados, L., Toth, I. and Troszel, I., Transient heat transfer and crisis, 7th Int. Heat Trans. Conf., Munchen, Vol. 5, NR 25, 543~550 (1982)
5. 金京根, 鄭大仁, 環狀流路에 있어서 垂直高溫管의 過度的 冷却過程에 關한 研究, 韓國 船用機關學會, 春季學述講演會.
6. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of heat in solids, Oxford Univ. Press. (1959)
7. Patankar, S.V., Numerical method in heat transfer, 7th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 1, RK 3, 83~90 (1982)
8. Stolz, G., Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes, Trans. of the ASME, Ser.C., 82-1, 20~26 (1960)
9. Sparrow, E.M., Hajisheikh, A. and Lundgren, T.S., The inverse problem in Transient heat conduction, Trans. of the ASME, Ser. E, 31-3, 369~375 (1964)
10. Beck, J.V., Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem, Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 13, 703~716 (1970)
11. Shouji, Study on the inverse heat conduction problem of transient heat conduction (in Japanese), JSME, 44-381, 1633~1643 (1976)
12. Patanker, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere (1980)
13. France, D.M. and Chiang, T., Analytical solution to inverse heat conduction problems with periodicity, Trans. of the ASME, Ser. C, Vol. 102, Aug., 579~581 (1980)

