Journal of Liberal Arts and Sciences.
Korea Maritime University. Vol. 5, 1997

분수양자 Hall계의 복합 페르미온의 각운동량

이 삼 녕*

Angular Momenta of Composite Fermion of Fractional Quantum Hall Systems

Sam Nyung, YI

목 차

Abrstract
Ⅰ. 서론
Ⅱ. 복합페르미온 변환
Ⅲ. Young tableau방법
Ⅳ. 결론
참고문헌

Abstract

This paper provides how the states in the low energy sector can be understand simply by noting the value of the angular momentum of individual Composite Fermion excitations. One can expand the young tableau to determine the allowed values of L for N_e=5,6,7,8. The allowed values of the total angular momentum L can be obtained by the addition of the angular momenta of the quasielectrons and quasiholes. States in the excited sectors can be constructed by adding one quasielectron-quasihole pair to the states that form the low energy sector. As an approximation the interaction between Composite Fermions excitations was neglected. The system with larger numbers of electrons will be studied without having to numerically extremely large matrices by treating the interaction phenomenologically.

* 한국해양대학교 교양과정부 조교수

이 삼 녕

I. 서 론

최근 몇 년 동안 복합 페르미온(Composite Fermion, CF)에 대한 연구가 큰 자기장이 걸려 있을 때 강하게 상관된 2차원 전자계를 이해하는 하나의 좋은 방법이 되어왔다. 2차원 전자계의 입자들 사이의 상호 작용은 Laughlin비압축성 유체상태[1]와 분수양자 Hall효과 (Fractional Quantum Hall Effect, FQHE)[2,3]를 형성한다. FQHE의 이론적 이해는 채움인자(filling factor)ν에 대한 Laughlin이론에 근거를 두고 있다. Jain [4]이 처음 다음을 제시했는데 전자에 짝수의 다발양자들 (flux quanta)를 붙여주므로서 전자를 CF로 변화시키는 것은 약하게 상호작용하는 CF계의 정수 양자 Hall 상태들 (Integer Quantum Hall States)의 항으로서 Laughlin비압축성 양자유체 상태의 주요 결과를 자연스럽게 설명해준다. Laughlin 상태는전자 1개당 $\frac{1}{\nu}$ 다발양자들에 해당되는 dc자기장의 값에서 생겨난다. 전자 1개당 2p 다발 양자들을 빼주면 유효채움인자 ν^*가 된다. 즉 $\frac{1}{\nu^*}=\frac{1}{\nu}-2p$를 만족하게 되며 예를 들면 $\nu=\frac{1}{3}$ Laughlin 상태는 $\nu^*=1$ CF 상태에 대응되고 $\nu=\frac{2}{5}$ Laughlin 상태는 $\nu^*=2$ CF 상태에 대응된다.

Laughlin은 자기장이 동경방향으로 가해지고, 구 표면에서 움직이도록 구속된 몇 개의 전자에 대한 상호작용 Hamiltonian의 정확한 수치 대각화를 통해 분수양자 Hall 계의 전자 스펙트럼에 대한 중요한 정보를 얻을 수 있었다 [5]. 반경 R의 구는 중심에 자기 단극을 가지고 있고 표면을 통해 자기 다발 $\phi=4\pi R^2 B$ 를 가지는데 이것은 정수의 다발 양자들 2S와 같다. 운동 에너지의 고유값은 $E_l=(\hbar\omega_c/2S)[l(l+1)-S^2]$ 으로 주어진다[6]. 여기서 각운동량 고유치 l 은 $S, S+1, S+2, \cdots$ 등의 값을 가질 수 있다. 가장 낮은 Landau 레벨은 $l(l+1)-S^2=0$ 이므로 $l^2+l-S^2=0$ 가 되어서 $l=S$이고 n번째 여기 Landau레벨은 축퇴도가 $2l+1$ 이다. 따라서 가장 낮은 Landau레벨은 $2S+1$ 개의 전자를 수용시킬 수 있다. 무한한 계에 대해서는 채움인자 $\nu=\frac{\text{전자갯수}}{\text{Landau 레벨의 축퇴도}}=\frac{N_e}{2S+1}$ 혹은 $2S=\frac{1}{\nu}(N_e-1)$가 되지만 유한한 크기에 대해서는 이 값으로부터 약간의 벗어남이 있다. 예를 들면 $\nu=\frac{1}{m}$ Laughlin상태에 대해서 $2S_{\nu=\frac{1}{m}}=\frac{1}{\nu}(N_e-1)=m(N_e-1)$ 혹은 $\nu=\frac{N_e-1}{2S}$ 가 된다.

Ⅱ. 복합 페르미온 변환

이 논문에서는 가장 낮은 에너지 영역에 있는 상태가 각각의 CF여기 (CF excitations)의 각운동량으로 부터 각 운동량의 합에 대한 양자역학 규칙을 사용해서 어떻게 간단히 이해될 수 있는가를 보이고자 한다[7]. CF여기는 준전자(quasielectron, QE)에 대해서는 에너지 E_{QE}을, 준호올(quasihole, QH)에 대해서는 에너지 E_{QH}을 가지는 것으로 생각하며 근사로서 CF여기 사이의 상호작용을 무시한다. 이것은 n_{QE}개의 준전자와 n_{QH}개의 준호올을 가진 모든 각운동량 상태가 에너지 $n_{QE}E_{QE}+n_{QH}E_{QH}$를 가지고서 축퇴될 것이다는 것을 뜻한다. 이는 수치계산이나 단일 모드 근사에서 얻어진 Laughlin상태 여기에 대한 Magnetoroton최소값을 주지 않으나 대신에 1에서 N_e까지의 값을 가지는 각운동량 L을 가진 N_e개의 축퇴상태를 준다.

Laughlin상태 $\nu=\frac{1}{m}$에 해당하는 값 근방의 2S 값의 상태는 다음과 같이 쓸 수 있다 [8].

$$2S=2S_{\nu=\frac{1}{m}}+n_{QH}-n_{QE} \quad (2.1)$$

CF로 변환하므로서 나타나는 S의 새로운 유효값을 S^*로 표시하면 Laughlin상태 $\nu=\frac{1}{m}$은 $\frac{1}{\nu^*}=\frac{1}{\nu}-2P=3-2P=1$로 부터 $\nu^*=1$ CF상태가 되고 $2S^*_{\nu^*=1}=(N_e-1)$이 된다. 따라서 $2S^*_{\nu^*=1}$과 조금 다른 $2S^*$의 값에 대해서는

$$2S^*=2S^*_{\nu^*=1}+n_{QH}-n_{QE} \quad (2.2)$$

와 같이 쓸 수 있다. 즉 $\nu=\frac{1}{m}$, $2S=2S_{\nu=\frac{1}{m}}+n_{QH}-n_{QE}$의 Laughlin상태가 $\nu^*=1$, $2S^*=2S^*_{\nu^*=1}+n_{QH}-n_{QE}$의 CF상태로 바뀐다. 구 위에 있는 전자들에 대해서 이 결과는 각각의 전자에 두 개의 다발 양자들을 더해 주는 것과 정확하게 대응하지는 않는다. 대신에 $2S_{\nu=\frac{1}{m}}$이 CF변환에 의해 $2S_{\nu^*=1}$로 변환된다. 그리고 $2S$에 있어서 어떤 부족 분이 남는 것은 $2S^*$에도 똑같이 부족하거나 남게된다. CF모델은 Jain이 제시한 것으로서 Laughlin상태를 이런 모델로 변환하면 계를 훨씬 쉽게 설명할 수 있다는 것이다.

$\nu^*=1$에 대해서 준전자는 첫번째 여기 Landau레벨에 존재하고 준호올은 가장 낮은 Landau레벨에 있다. 또한 S^*는 가장 낮은 Landau레벨에서의 CF의 각운동량이므로 (2.2)식에 $S^*=l_{QH}$, $2S^*_{\nu^*=1}=N_e-1$을 대입하면 $2l_{QH}=N_e-1+n_{QH}-n_{QE}$가 된다. 따라서

$$l_{QE} = l_{QH} + 1 = \frac{1}{2} N_e + \frac{1}{2}(n_{QH} - n_{QE} + 1) \quad \text{(2.3)}$$

가 된다.

N_e전자계의 허용된 전체 각운동량 L은 단지 페르미온에 대한 각운동량을 더하므로써 얻어질 수 있다. 가장 낮은 에너지 영역은 2S값과 일치하는 최소 갯수의 CF여기를 포함할 것이다. N_e=8에 대한 예를 들면 n_{QE}가 증가하므로서 l_{QE}가 감소하기 때문에 ((2.3)식참고) 5개의 준전자를 가진 2S=16의 값에서 축퇴도 $2l_{QE}+1$은 준전자의 수와 같다.

각운동량의 적은 값들 혹은 적은 수의 준전자들과 준 호올들에 대해서는 L의 허용된 값 즉 전체 각운동량은 점검에 의해서 써내려 갈 수 있다. 여기서는 큰 값의 n_{QE}혹은 n_{QH}에 대해서 L의 허용된 값을 결정할 수 있는 방법을 보이고자 한다. 이는 지난번 논문 (Phys.Rev.B53,9599(1996))에서 상호작용항을 계산할 때 상대적인 각운동량(relative angular momentum)함수로서 나타내므로서 여러개 전자에 대한 허용된 각운동량의 값이 나타나 있지 않아서 이에 대한 필요성이 있어 왔다. 따라서 본 논문에서는 Young Tableau 방법 [7]을 이용하여 N_e=5,6,7,8개의 전자에 대한 전체 각운동량의 허용된 값을 보이고자 한다.

Ⅲ. Young Tableau방법

낮은 에너지 영역에 있는 모든 상태들은 CF여기들의 각운동량의 합에 의해서 잘 기술되어진다. 먼저 전자갯수가 8개 (N_e=8), 2S=19인 경우의 예를 들어 계산해 보자. 그러면 $2S_{\nu=\frac{1}{m}} = m(N_e - 1) = 3(8-1) = 21$ 이 되고 따라서 (2.1)식에서 $2S = 2S_{\nu=\frac{1}{m}} + n_{QH} - n_{QE} = 21 + n_{QH} - n_{QE}$ 가 되므로 $2S = 19 = 21 - 2$에서와 $n_{QE} = 2$가 되고 한편 (2.3)식에서 $l_{QE} = \frac{1}{2} N_e = \frac{1}{2}(n_{QH} - n_{QE} + 1) = \frac{8}{2} + \frac{1}{2}(-n_{QE} + 1) = \frac{7}{2}$ 이 된다. 그러므로 z축 방향의 가능한 각운동량의 값은 $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$ 이 된다.

두 개의 입자에 대해서 이것을 결합하면 Young Tableau 규칙에 따라 다음과 같다.

1번째 입자→	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
2번째 입자→	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
합→	6	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	-1

$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$
2	1	0	-1	-2	0	-1	-2	-3

$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
-2	-3	-4	-4	-5	-6

따라서 가능한 L_z값은

6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
		4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4		
				2	1	0	-1	-2				
						0						

가 되어서 $6\oplus5\oplus4^2\oplus3^2\oplus2^3\oplus1^3\oplus0^4\oplus\cdots$로 표현되므로 허용된 L의 값은 $6\oplus4\oplus2\oplus0$를 가짐을 알 수 있다.

한편 $N_e=8$, $2S=17$인 경우를 계산하면 $n_{QE}=4$, $l_{QE}=2.5$가 되고 가능한 Lz값은 $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$ 되어서 Young Tableau를 계산하면 다음과 같다.

$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
4	3	2	2	1	0	1	0	-1	-2

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\
-\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\
0 & -1 & -2 & -3 & -4
\end{array}
$$

그러므로 가능한 L_z의 값은

$$
\begin{array}{ccccccccc}
4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\
 & & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

가 되어서 허용된 L의 값은 $4 \oplus 2 \oplus 0$를 가진다. 표1에서는 N_e=5,6,7,8일 때 낮은 에너지 영역에서 몇 가지 경우에 대해 L의 허용된 값을 이와 같이 계산해서 정리하여 놓았다.

표1 : 구표면에 구속된 N_e=5,6,7,8개의 전자들의 낮은 에너지 영역의 상태들에 대한 전체 각운동량의 허용된 값

N_e=5

2S	n_{QE}	n_{QH}	l_{QE}	l_{QH}	허용된 각운동량의 값
14	0	2	4.0	3.0	$5 \oplus 3 \oplus 1$
13	0	1	3.5	2.5	2.5
12	0	0	3.0	2.0	0
11	1	0	2.5	1.5	2.5
10	2	0	2.0	1.0	$3 \oplus 1$

N_e=6

2S	n_{QE}	n_{QH}	l_{QE}	l_{QH}	허용된 각운동량의 값
19	0	4	5.5	4.5	$12\oplus10\oplus9\oplus8^2\oplus7\oplus6^3\oplus5\oplus4^3\oplus3\oplus2^2\oplus0^2$
18	0	3	5.0	4.0	$9\oplus7\oplus6\oplus5\oplus4\oplus3^2\oplus1$
17	0	2	4.5	3.5	$6\oplus4\oplus2\oplus0$
16	0	1	4.0	3.0	3
15	0	0	3.5	2.5	0
14	1	0	3.0	2.0	3
13	2	0	2.5	1.5	$4\oplus2\oplus0$
12	3	0	2.0	1.0	$3\oplus1$
11	4	0	1.5	0.5	0

N_e=7

2S	n_{QE}	n_{QH}	l_{QE}	l_{QH}	허용된 각운동량의 값
20	0	2	5.0	4.0	$7\oplus5\oplus3\oplus1$
19	0	1	4.5	3.5	3.5
18	0	0	4.0	3.0	0
17	1	0	3.5	2.5	3.5
16	2	0	3.0	2.0	$5\oplus3\oplus1$
15	3	0	2.5	1.5	$4.5\oplus2.5\oplus1.5$
14	4	0	2.0	1.0	2

N_e=8

2S	n_{QE}	n_{QH}	l_{QE}	l_{QH}	허용된 각운동량의 값
24	0	3	6.0	5.0	$12\oplus10\oplus9\oplus8\oplus7\oplus6^2\oplus5\oplus4^2\oplus3\oplus2\oplus0$
23	0	2	5.5	4.5	$8\oplus6\oplus4\oplus2\oplus0$
22	0	1	5.0	4.0	4
21	0	0	4.5	3.5	0
20	1	0	4.0	3.0	4
19	2	0	3.5	2.5	$6\oplus4\oplus2\oplus0$
18	3	0	3.0	2.0	$6\oplus4\oplus3\oplus2\oplus0$
17	4	0	2.5	1.5	$4\oplus2\oplus0$
16	5	0	2.0	1.0	0

한편 첫번째 여기 영역에 있는 상태들은 낮은 에너지 영역을 형성하는 상태들에 1개의 준전자-준호올 쌍을 더해주므로서 구성되어질 수 있다. 예를 들면 8개 전자계의 $\nu=\frac{1}{3}$ Laughlin상태(2S=21)에서는 1개의 준전자-준호올 쌍을 가지게 될 것이다 ($n_{QE}=1$, $n_{QH}=1$). 이때 $l_{QE}=4.5$, $l_{QH}=3.5$이기 때문에 첫번째 여기 영역은 $l_{QE}-l_{QH}\leq L\leq l_{QE}+l_{QH}$ 범위의 값을 가져야 한다. 즉 $1\leq L\leq 8$이 되어서 가능한 L값은 L = $1\oplus2\oplus3\oplus4\oplus5\oplus6\oplus7\oplus8$이 된다. 한편 8개 전자계에서 2S=20인 경우의 여기 상태는 $n_{QE}=2$, $n_{QH}=1$,이므로 l_{QE}가 가질 수 있는 허용된 각 운동량 값이 $7\oplus5\oplus3\oplus1$이므로 $L_{total}=l_{QE}+l_{QH}$은 $7-3\leq L_{total}\leq 7+3$, $5-3\leq L_{total}\leq 5+3$, $3-3\leq L_{total}\leq 3+3$, $|1-3|\leq L_{total}\leq 1+3$ 이되어서 $L=0\oplus1\oplus2^3\oplus3^3\oplus4^4\oplus5^3\oplus6^3\oplus7^2\oplus8^2 9\oplus10$의 값을 가진다. 이것은 수치 계산에 의한 값과 가끔씩 차이를 나타낼 수도 있는데 예를 들면 S. He등 [12]에 의한 수치결과와 비교하면 L=3상태는 두번이 나타나고 있어서 준입자들 사이의 상호작용을 무시하므로서 나타나는 위의 3번과는 차이를 보이고 있다. 비록 가장 낮은 에너지 영역은 Jain의 결과와 잘 일치하지만 첫번째 여기 영역에서 준전자-준호올 상호작용이 없다고 가정한 몇몇 상태들은 정확한 계산이 요구된다. 이때 상호작용항 V(l)을 도입하여 준전자-준호올 여기를 가진 전자계에 대한 수치결과와 맞추어 보므로서 현상학적으로 V(l)을 결정할 수 있다.

Ⅳ. 결 론

지금까지 Jain에 의해 도입된 복합 페르미온 모델에서 N_e=5, 6, 7, 8개의 전자계에 대해서 허용된 L값을 결정하기 위해서 Young Tableau방법을 적용하여 구해 보았다. S.He등의 수치 결과와의 비교시 불필요한 상태들이 있음이 관찰되었고 이는 준입자들 사이의 상호작용항을 무시한 결과라고 생각되고 장기적으로 많은 수의 전자계에 대해서는 이 상호작용을 현상학적으로 취급하여 매우 큰 행렬을 수치적으로 대각화시키지 않고 연구하고자 한다.

참 고 문 헌

1. R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395(1983).
2. D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard. Phys. Rev. Lett, 48, 1559(1982).
3. R.B.Laughlin, The Quantum Hall Effect, edited by R.E.Prange and S.M.Girvin (Springer-Verlag, New York, 1987).
4. J.K.Jain, Phys.Rev.Lett, 63, 199 (1989).

5. F.D.M.Haldane and E.H.Rezayi, Phys.Rev.Lett, 54, 237 (1985); Phys.Rev. B31, 2529(1985).
6. G.Fano. F. Ortolani, and E. Colombo, Phys. Rev. B34, 267(1986).
7. See, for example, chapter 6, J.J.Sakurai, Modern Quantum Mechanics (Addison - Wesley Publishing, New York, 1994).
8. X.M.Chen and J.J.Quinn, Solid State Commun. 92, 865 (1994).
9. S.N.Yi, X.M.Chen, and J.J.Quinn, Phys.Rev.B53, 9599 (1996).
10. M.Johnson and G.Canright, Phys Rev. B49, 2947 (1994).
11. P.Sitko, S.N.Yi, K.S.Yi, and J.J.Quinn, Phys.Rev.Lett, 76, 3396 (1996).
12. S.He, X.Xie, and F.Zhang Phys.Rev.Lett, 68, 3460 (1992).
13. M.E.Rose, Elementary Theory of Angular Momentum (John Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1957).