不動点과 그 應用에 對한 硏究

金　　章　　郁

A study on the Fixed point and its application

Chang Wook Kim

目　次

Abstract

There seems to be some fixed point theorems for contraction mapping. To prove this point, We are going to mention about the necessary definitions, lemmata, theorems and corollary. By doing so, we can see in this paper the followings; their common characteristic is that they guarantee uniqueness of the fixed point by means of a principle of contraction relative to the metric of the space, and, given a convergent sequence of contraction mapping, the convergence of the sequence of their fixed points is investigated. In addition to the above, We describe another fixed point theorems of the same sort that originate from a problem in differential equations.

1. 序　論

Contraction mapping에 因한 不動点定理가 存在한다. 本論文에서는 이들에 必要한 定義 補助定理 本定理 系들에 대해서 言及한다. 本定理에서는 거리공간에 關聯하는 Contraction 原理의 意味에 의하여 不動点의 一意性과 또 Contraction mapping의 수렴点列을 주어, 이들의 不動点의 点列수렴을 硏究한다. 應用에서는 微分方程式의 問題로 부터 기원하는 不動点定理를 기술한다.

2. 定義와 補助定理

定　義 2—1 거리공간에 關한 사상 f가 그 自身으로 Contraction mapping일 必充條件은 實數 α가 存在하여 $o<\alpha<1$이며 S내의 x_1과 x_2点에 對하여

$$d(f(x_1),\ f(x_2))\leq\alpha d(x_1,\ x_2)$$

α는 사상의 contraction constant이다.

補助定理 2—2 contraction mapping은 連續이다.

證明 f는 그 自身으로 S의 contracting mapping이라 하자. $\bar{x}$가 S내의 点이면,
그때 $d(f(x),\ f(\bar{x})) \leqq \alpha d(x, \bar{x})$
따라서, ε이 陽의 實數이고 $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$이면 $d(f(x),\ f(\bar{x})) < \varepsilon$
이는 f가 S상에서 連續임이 밝혀진다.

定義 2—3 S내의点 $\bar{x}$는 사상 f의 不動点이면 $f(\bar{x}) = \bar{x}$

補助定理 2—4 완비거리공간 S상의 contraction mapping은 오직 하나인 不動点을 갖는다.

3. 本定理와 系

定理 3—1 $f:(X,d) \to (X,d)$가 완비 거리 공간으로써 그자신으로 contraction mapping이라 하고, $x \in X$이라 하자. 그때 f에 屬하는 x_0의 累次의 点列 $(f^n(x_0))$는 点 $Z^0 \in X$, $f(Z_0) = Z_0$ 에로 수렴한다. 더욱 Z_0는 f으로 因해서 一意不動点이다.

證明 $0 \leqq \alpha < 1$이며, 定義2—1을 만족한다. 모든 $i \in p$에 因하여 $x_i = f^i(x_0)$이라 하자.

그때
$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1),\ f(x_0)) \\ &= \alpha d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

마찬가지로
$$\begin{aligned} d(x_3, x_2) &\leqq \alpha d(x_2, x_1) \\ &\leqq \alpha^2 d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

다음과 같이 추정하면
$$d(x_m, x_{m-1}) \leqq \alpha^{m-1} d(x_1, x_0)$$

이때, 위에서와 같이
$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\ &\leqq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &\leqq \alpha^m d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

이와같이 모든 양의 정수 m에 因해서 귀납적 결론을 갖는다.

3—1(a), $d(x_{m+1}, x_m) \leqq \alpha^m d(x_1, x_0)$

첫째, 三角不等式과 3—1(a)에 依해서
$$\begin{aligned} d(x_{m+p}, x_m) &\leqq \sum_{i=1}^{p} d(x_{m+i}, x_{m+i-1}) \\ &\leqq \sum_{i=1}^{p} \alpha^{m+i-1} d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \\ &< \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$\lim(\alpha^m) = 0$이므로, $\varepsilon > 0$ 이면 이때 충분히 큰 m에 因해서
$$d(x_{m+p}, x_m) < \varepsilon, \quad p \in P$$

따라서 (x_m)은 X내에서 C, S이고 $Z_0 \in X$이면 $\lim(x_m) = Z_0$이다.

다음은 $f(Z_0) = Z_0$임을 본다. f는 contractive이므로 f는 連續이다. 따라서
$$\lim(f(x_m)) = f(\lim(x_m)) = f(Z_0)$$

그때 $\lim(f(x_m))=\lim(x_m)$이므로

$$Z_0=\lim(x_m)=\mathrm{f}(Z_0)$$

더욱, Z_0는 f에 因해서 유일한 不動点이다. $f(Z_1)=Z_1$과 $f(Z_0)$를 가정한다.

그때 $d(Z_1, Z_0)=d(f(Z_1), f(Z_0))\leqq\alpha d(Z_1, Z_0)$

그리고 $(1-\alpha)d(Z_1, Z_0)\leqq 0$

따라서, $1-\alpha>0$, $d(Z_1, Z_0)\leqq 0$

그러므로 $d(Z_1, Z_0)=0$, $Z_1=Z_0$

定理 3—2 (X, d)는 거리공간이고, f는 X로 부터 X안으로 連續函數이면

(i) X안에는 x_0이 存在하면 $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$은 X안으로 수렴성의 부분열에 包含된다.

(ii) X내의 모든 x에 대하여, X내의 모든 y에 대하여, $\lim\limits_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))=0$을 갖는다.

그때, 공간 X는 確實히 변환 f에 關하는 하나의 不動点을 包含한다.

證明 $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$는 (X, d) 안에서 수렴성의 부분열에 包含하니까, 自然數의 무한부분집합 M이 存在하면 $\{f^m(x_0)\,|\,m\in M\}$은 수렴이다.

x_0'는 極限이라 하자. f의 연속성으로 부터 $\{f^{m+1}(x_0)\,|\,m\in M\}$은 極限 $f(x'_0)$로서 수렴이다.

$\varepsilon>0$를 擇하면 性質(ii)으로 부터 N_0이 존재하면 모든 자연수 $n>N_0$로써 따른다.

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$$

더욱 N_1이 存在하면

$$M\text{내의 모든 } m\text{에 대하여, } m>N_1\to d(f^m(x_0), x'_0)<\frac{\varepsilon}{3}$$

그리고 M내의 모든 m에 대하여, $m>N_1 \to d(f^{m+1}(x_0), f(x_0'))<\dfrac{\varepsilon}{3}$

M이 무한하니까

모든 陽數 ε을 위한 $d(x_0', f(x_0'))<\varepsilon$인 것이 결론이다.

그리고 x_0'는 f의 不動点을 갖는다.

y_0'는 다른 不動点이면

$$\lim_{n\to\infty}d(f^n(x_0'), f^n(y_0'))=0$$

$$x_0'=f(x_0'),\ y_0'=f(y_0')=f^n(y_0')$$

모든 $n\in N$이니까 $x_0'=y_0'$

따라서 x_0'는 函數 f의 一意不動点이다.

定理 3—3 (X, d)는 국소 compact 거리공간이고, F_i $X\to X$는 不動点 $f_i(i=1, 2, \cdots)$를 갖는 contraction mapping이고, F_0: $X\to X$는 不動点 f_0를 갖는 contraction mapping이라 하자. 点列 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$이 F_0에로 점열수렴이면 点列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$은 f_0에로 수렴한다.

證明 $\varepsilon>0$ 이면 $C(a_0, \varepsilon)=\{x\in X\,|\,d(f_0, x)\leqq\varepsilon\}$는 X의 compact 부분집합이라 하자.

$\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$은 F_0에로 수렴점열하는 函數의 同程度連續点列이다.

그리고 $C(f_0, \varepsilon)$는 compact이다.

点列 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$는 $C(f_0, \varepsilon)$상에서 F_0에로 一樣的으로 수렴한다.

N를 擇하여 $i\geqq N$이면 $x\in C(f_0, \varepsilon)$에 관해서 $d(F_i(x), F_0(x))<(1-\alpha_0)\varepsilon$,

여기서 $\alpha_0<1$은 F_0에 關한 Lipschitz constant이다.

그래서, $i \geqq N$이고 $x \in C(a_0, \varepsilon)$이면 $d(F_i(x), f_0) \leqq d(F_i(x), F_0(x)) + d(F_0(x), F_0(f_0)) < (1-\alpha_0)\varepsilon + \alpha_0 d(x, f_0) \leqq (1-\alpha)\varepsilon + \alpha_0\varepsilon = \varepsilon$ 이는 $i \geqq N$이면 F_i는 그 自身으로 $C(a_0, \varepsilon)$에 사상한다는 것이 증명된다.

G_i를 $i \geqq N$하 關하여 $C(f_0, \varepsilon)$에로 F_i의 restriction이라 하자. 모든 G_i이 그 自身으로 $C(f_0, \varepsilon)$의 contraction mapping 이다. $C(f_0, \varepsilon)$는 완비거리공간, G_i는 $i \geqq N$에 關해서 不動点을 갖는다. G_i의 定義로부터 確實히 F_i는 다만 하나의 不動点 f_i가 된다. 그래서 $i \geqq N$에 關해서 $f_i \in C(f_0, \varepsilon)$이다. 不動点의 点列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$는 f_0에로 수렴한다.

이들의 應用을 다루어 보려한다.

系 3—4 U는 開部分集合이고, $(a, b) \in U$, $M > 0$는 實數, $\{K_i\}_{i=0}^{\infty}$는 강한 양의 實數의 유계점열이라 하자. $(i=0, 1, 2\cdots\cdots,)$, f_i는 U상에서 明示되는 實數値連續函數이라하면 모든 $(x, y) \in U$에 關해서 $|f_i(x, y)| \leqq M$이고, 모든 $(x, y), (x, z) \in U$에 關해서

$$|f_i(x, y) - f_i(x, z)| \leqq K_i |y - z| \text{이다.}$$

역시 点列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$은 U상에서 f_0에로 点列수렴하면, h는 $0 < k_i\ h < 1 (i=0, 1, 2\cdots\cdots)$

그리고 집합 $W = \{(x, y) \mid |x-a| \leqq h$와 $|y-b| \leqq M|x-a|\}$은 U의 部分集合이다.

그때 点列 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$은 $I = [a-h, a+h]$상에서 y_0에로 一樣的으로 수렴이다. $(i=0, 1, 2\cdots\cdots)$,

y_i는 初期値問題의 I상에서 一意解를 갖는다.

$$y(a) = b$$
$$y'(x) = f_i(x, y(x))$$

系 3—5 참고문헌 [1]의 5章에는 Picard 정리와 contraction mapping이 주어져 있고 또 이에 적응하는 性質이 내포되어 있다.

4. 結　　論

定理 3—1과 定理 3—2의 關係. 定理 3—3과 系3—4, 系3—5와의 聯關을 갖고 다음과 같은 結果을 얻을 수 있다.

(1) 定理 3—1은 定理 3—2로 부터 수반한다는 結論을 짓는다.

(2) $\{f^n(x) \mid n \in N\}$은 cauchy点列이며, X의 완비성이며, 이는 極限이 存在한 결과가 된다.

(3) $\{f^n(x) \mid n \in N\}$이 "X안에는 x_0이 存在하면 $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$은 X내로 수렴성의 部分列에 包含됨"을 만족한다.

(4) 本定理 3—3의 應用으로써 Greenspan, D에 因한 定理를 갖고 聯關을 맺게하였다.

5. 參 考 文 献

(1) Greenspan D: Theory and solution of ordinary differential equations. New york, The Macmillan company, 1960

(2) Cronin, J.: Fixed points and Topological Degree in nonlinear Analysis Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1964

(3) Goffman, C.: Preliminaries to functional analysis. Studies in Modern Analysis. M. A. A. Studies in Mathematics, Mathematical Association of America, 1962.

(4) F. F. Bonsall, Lectures on Some fixed point theorems of Functional Analysis, Tata Institute of Fundamental Research, Bomby, India, 1962.

(5) S. Itoh-W. Takahashi, Common fixed points of a single valued mapping and a multi valued mapping, Res, Rep. Information Sci., A—10, 1974.

(6) W. A. Kirk, Fixed point theorems for nonlinear nonexpansive and generalized contraction mappings, pacific J. Math., 38(1971)89-94.

(7) M. Edelstien, On Fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math, Soci. 37(1962).

(8)R. De Marr, Common fixed points for commuting contraction mapping, Pacific J. Math, 13(1963)

(9) N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, Part I, Interscience, New York 1958.

(10) F. E. Browder, convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach space, Arch Rat. Mech. Anal., 24(1967),

(11) Y. Kijima-W. Takahashi, A fixed point therem for nonexpansive mappings in metric space, Kōdai Math. Sem. Rep., 21(1969).

(12) 日本數學會, 岩波數學辞典(第2版), 岩波書店, (1970)