

境界要素法에 의한 三次元彈性體의 表面應力解析

張 志 演 · 南 青 都

The Analysis of the Stress Distribution on the Boundary Surface
of Three-Dimension Elastic Body, By Boundary Element Method

Jang, Ji-Yon · Nam, Cheong-Do

< 目 次 >

Abstract	2·3 離散化 및 聯立方程式의 定式化
1. 序 論	2·4 使用要素
2. 境界要素法の 定式化	3. 境界面上的의 表面應力의 評價
2·1 彈性問題에 있어서의 支配方程式	4. 考 擦
2·2 加重殘差法에 의한 境界積分方程式의 誘導	5. 結 論
	參考文獻

Abstract

It is impossible to directly analyze the stress distribution on the boundary surface of three-dimension elastic body.

On this paper, the authors propose a method to analyze the stress distribution on the boundary surface in case of that used element in boundary element method is triangle element with one nodal point, and make a computer program by that method.

The propriety of that analysis method is verified by comparing the numerically calculating results by that program, with theoretical results on two pressure vessels.

1. 序 論

機械工學上的의 諸問題, 예를 들면, 構造物의 變位, 應力, 振動, 物體주위의 流體의 흐름, 혹은 熱傳導 등의 문제를 解析하기 위한 방법으로, 근래 컴퓨터를 사용하는 數值解析法이 널리 이용되고 있다. 왜냐하면 工學者, 또는 實設計者가 實務上 조우하는 문제의 경우, 그 현상의 복잡성 등으로 인하여, 간단한 數式으로 표현하여 해석할 수 있는 경우는 극히 드물고 數值解析에 의존할 수 밖에 없

는 경우가 대부분이기 때문이다.

이러한 數值解析의 手法으로 가장 널리 알려져 이용되고 있는 것은 差分法(Finite Differenc Method)과 有限要素法(Finite Elment Method, 略 FEM)이지만, 최근 境界要素法(Boundary Element Method, 略 BEM)이란 數值解析法이 주목을 받고 있다.^{1),2)}

有限要素法の 경우, 해석의 對象인 全領域을 작은 要素(有限要素)로 分割하고, 각 要素의 위치나 形狀, 物性值 등의 값을 初期데이터로서 入力해야 한다. 이 作業은 그 자체는 어려운 작업이 아니나, 入力데이터의 작성에 膨대한 노력과 시간이 요하게 된다. 要素의 分割을 컴퓨터가 행하는 自動要素分割프로그램도 일부 개발되어 있으나, 目的值(예를 들면, 應力, 變位 등)의 分布가 급격히 變化하는 것을 예상하여 다른 곳 보다 더 세밀히 분할하는 등의 경험과 판단을 필요하는 부분이 많으므로, 要素分割을 완전히 自動化하기는 곤란하다.

이것에 반해, 境界要素法の 경우에는 領域의 境界만을 分할하면 되므로, 有限要素法에 비해 入力데이터의 작성에 요하는 노력과 시간이 대폭 감소하게 된다.

要素分割에 있어서의 有限要素法과 境界要素法の 차이점을 그림 1에 나타낸다.

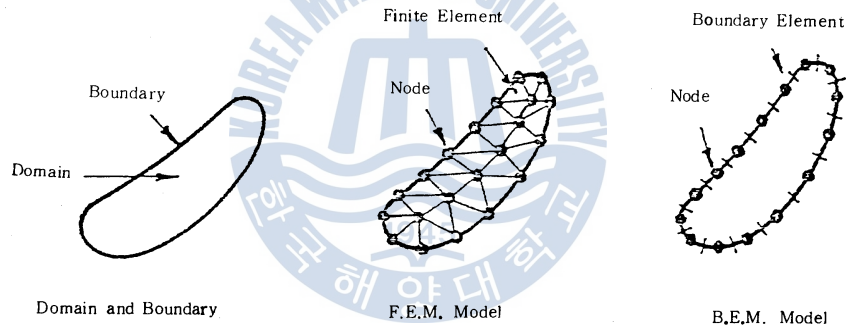


Fig. 1 F. E. M Model and B. E. M Model.

境界要素法 자체의 發想은, 偏微分方程式의 境界值問題 혹은 初期值問題를 해석하기 위한 方便으로 종래부터 연구되어 온 積分方程式으로의 變換에 그 기초를 두고 있다. 이 적분방정식은 領域의 境界上에서만 적용되므로 이런 의미에서 境界積分方程式法이라 불리워지기도 한다.

넓은 의미에서 境界要素法은, 有限要素法の 發展시기와 거의 동시기 연구가 병행되어 진행되어 왔으나 경계상에서의 特異積分, 離散化方法 등 數值解析상의 문제와 數值解의 精度 등의 문제로 인하여 有限要素法에 비해 그 發展이 늦고, 제한된 일부 研究者들에 의해 연구되어 왔다.

그러나 최근, 有限要素法에 의해 개발된 다양한 數值解析상의 技法을 境界要素法에 응용할 수 있게 되고, 또한 均裂問題나 半無限, 無限領域問題解析에 대한 有限要素法の 한계 및 전술한 入力데이터의 문제 등으로 인하여 境界要素法이 갖는 長點이 관심을 끌게 된 것이다.

물론 境界要素法の 一般化에는 非線形問題나 境界域에서의 目的值의 評價 등의 해결되어야 할 많은 과제가 남아 있다. 특히 彈, 塑性力學問題에 한정하여 생각할 경우, 境界要素法에 의해 境界面상의 變位나 表面力의 成分은 각 要素에 대해 결정되지만, 應力의 성분은 境界面상에서 직접적으로

구할 수 없다. 그러나 실제의 경우 境界面上에서 應力이 最大값을 취하는 경우가 많이 있으며, 또는 實驗測定值와의 比較 등의 문제로 境界面上에서의 應力の 評價가 필요하다. 이러한 목적의 연구로는 Warlo 등의 연구가 있다.³⁾

본 論文에서는, 三次元彈性體의 應力解析問題에 境界要素法을 이용함에 있어서, 境界要素로 三角形要素를 사용할 경우 境界面上의 變位와 表面力을 구하고 이들 값으로부터 境界面上의 表面應力을 평가하기 위한 한 方法을 제안하고 있다.

또한, 이러한 일련의 境界要素法에 의한 數值解析法을 球型的 壓力容器 및 圓筒型的 壓力容器에 적용하여 理論解와 數值解를 比較·檢討하여 본 數值解析法의 妥當性を 확인하였다.

2. 境界要素法の 定式化

境界要素法이란, 偏微分方程式으로 系の 支配方程式이 표시되는 境界値問題를, 境界上の 値에 의한 積分方程式으로 變換하고 이 式을 離散化하여 얻어지는 線形聯立方程式을 풀어 目的解를 얻는 數值解析方法이며, 離散化過程에는 특히 有限要素法에서 확립된 풍부한 技法을 이용하게 된다.

偏微分方程式형태의 支配方程式을 變換하여 境界積分方程式을 定式化하는 과정에는, 對象分野에 있어서의 變分原理나 포텐셜問題에 있어서의 Green의 公式이 이용되지만, 최근에는 有限要素法の 定式化과정에서도 나타나는 바와 같이 自然系の 變分原理와는 무관하게 純數學的으로 定式化하는 방법, 즉 加重殘差法(Weighted Residual Method)이 이용되고 있다.

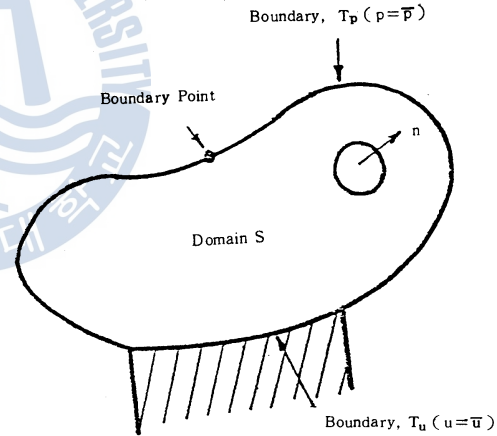


Fig. 2 Boundary Condition of Elastic Body.

2.1 彈性問題에 있어서의 支配方程式

그림 2와 같은 均質等方性的 彈性體의 應力 및 變位問題의 경우 그 지배방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma(u)_{ij, j} + b_i = 0 \dots\dots\dots(1)$$

단, $\sigma(u)_{ij}$ 는 應力, b_i 는 物體力

境界條件으로서 境界面의 일부 T_u 에서 變位成分, u_i 가 규정되든지, 혹은 境界面의 다른 일부 T_p 상에서 表面力의 成分, P_i 가 규정된다. 따라서 基本境界條件 및 自然境界條件은 다음 식으로 표시된다.

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i, & (T = T_u \text{ 상에서}) \\ p_i = \bar{p}_i, & (T = T_p \text{ 상에서}) \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

단, $T = T_u + T_p, P_i = u_{i, n}$

變位와 變形度의 관계로부터 식(3)이 成立한다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots (3)$$

또한 線形彈性材料의 경우, 應力과 變形度의 관계는 다음 식과 같이 표시된다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \dots\dots\dots (4)$$

상식에서 δ_{ij} 는 Kronecker의 델타(delta)이며, λ, μ 는 Lamé의 定數로서 각각 다음 식과 같다.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

$$\lambda = 2G\nu / (1 - 2\nu)$$

$$\mu = G = E / [2(1 + \nu)]$$

2·2 加重殘差法에 의한 境界積分方程式의 誘導

式(1)을 加重殘差法으로 표시하면 다음과 같다.

$$\int_S (\sigma(u)_{j k, j} + b_k) u^*_k dS \\ = \int_{T_u} (\bar{u}_k - u_k) p^*_k dT + \int_{T_p} (p_k - \bar{p}_k) \bar{u}_k dT \dots\dots\dots (6)$$

상식에서 u^*_k 는 무게函數(Weighted Value)이며, 境界 T_u 상에서 境界條件 $u^*_k = \bar{u}_k$ 을 항상 만족한다. p^*_k 는 u^*_k 系에 對應하는 表面力이며 境界 T_p 상에서 $p^*_k = \bar{p}_k$ 을 항상 만족한다. p^*_k 와 對應되는 應力사이에는 다음 관계가 成立한다.

$$p^*_k = \sigma(u^*)_{j k} \cdot n_j \dots\dots\dots (7)$$

式(6)의 좌변을 部分積分하고 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$\int_S (\sigma(u^*)_{j k, j} u_l dS + \int_S b_k u^*_k dS \\ = \int_{T_u} \bar{u}_k p^*_k dT + \int_{T_p} u_k p^*_k dT \\ - \int_{T_u} p_k u^*_k dT - \int_{T_u} \bar{p}_k u^*_k dT \\ = \int_T u_k p^*_k dT - \int_T p_k u^*_k dT \dots\dots\dots (8)$$

상식(8)에서의 무게函數로서는 다음 식(9)를 만족하는 函數, 즉 식(9)의 基本解를 취한다.

$$\sigma(u^*)_{j k, j} + \Delta_l^i = 0 \dots\dots\dots (9)$$

여기서 Δ_l^i 는 Dirac의 델타函數이며 점 i 에 작용하는 l 방향의 單位力을 의미한다. 따라서 Dirac의 델타函數의 성질에 의해 식(8)은 다음과 같이 정리된다.

$$C^i u_l^i + \int_T u_k p^*_k dT - \int_T p_k u^*_k dT \\ = \int_S b_k u^*_k dS \dots\dots\dots (10)$$

상식에서 C^i 는, 좌변의 積分項에 존재하는 特異性에 의해 부가되는 係數이며 境界面의 幾何學의 形狀에 의해 결정되는 값이다. u_l^i 은 점 i 에서의 l 方向의 變位를 나타낸다.

三次元彈性體의 경우에는, 점 i 에 작용하는 세 방향의 單位力을 고려해야 하고, 또 점 Q 에서도 세 방향의 變位 및 表面力을 고려해야 하므로 상식(10)의 u^*_k, p^*_k 대신에 u^*_{lk}, p^*_{lk} 를 代入해야 한다. 점 i 에 작용하는 l 方向의 單位力 Δ_l^i 및 점 Q 에서의 變位 및 表面力 u^*_{lk}, p^*_{lk} 의 관계를 그림 3에 표시한다.

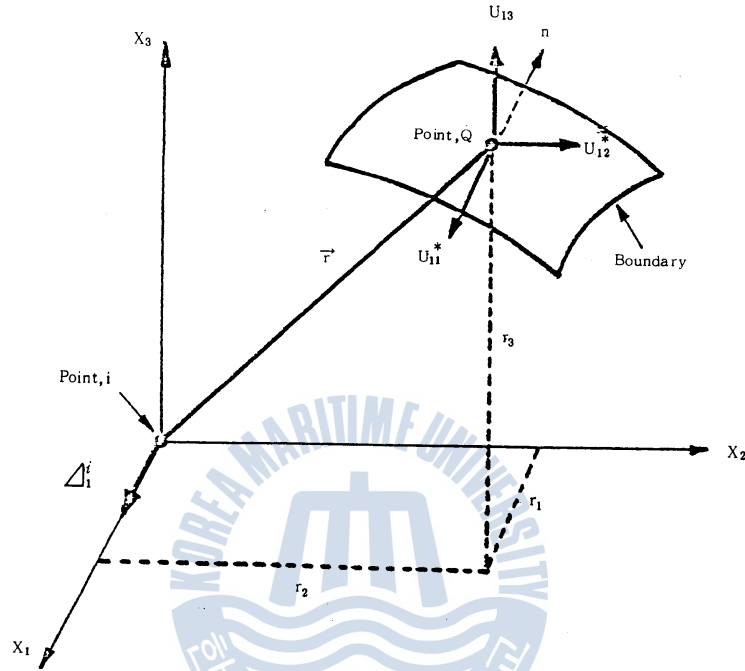


Fig. 3 Displacement at the Point Q on Boundary by Unit Force Δ_l^i at the Point i

u^*_{lk}, p^*_{lk} 는 점 i 에 작용하는 l 방향의 單位力에 의해 境界面상의 점 Q 에 발생하는 k 방향의 變位 및 表面力의 벡터이며 식(9)을 만족하는 基本解이다. 三次元彈性體에 있어서의 基本解는 Kelvin의 解이며 다음 식과 같이 표시된다.

$$u^*_{lk} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left\{ (3-4\nu)\delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right\}$$

$$p^*_{lk} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu)\delta_k + 3\frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right\} \right]$$

2.3 離散化 및 聯立方程式의 定式化

境界要素法은 식(10)의 境界積分方程式을 有限要素法的인 수법을 이용하여 要素의 값으로 離散化하여 해석하는 방법이다. 즉 식(10)에서 物體力에 의한 積分項을 무시하면, 이 방정식은 境界상에서만의 境界積分方程式으로 표시되므로 境界를 작은 要素로 분할하고, 要素내의 임의의 점에서의 變位 및 表面力 u_k, p_k 를 지정된 節點에서의 값으로 補間하여 표시하여 全節點에 관한 線形聯立方程式을 만들면 된다.

식(10)을 要素 e 에 대해 적용시키면 要素 e 내의 節點 i 에 대하여는 다음 식이 成立한다.

$$[C_i]\{u_i\} + \int_{T_e} [p^*]\{u\} dT_e - \int_{T_e} [u^*]\{p\} dT_e = 0 \dots\dots\dots(11)$$

상식에서 $\{u\}$, $\{p\}$ 는 요소 e 내의 變位 및 表面力이다. 이것을 요소의 節點에서의 값으로 補間하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \{u\} = [N]\{u\}_e \\ \{p\} = [N]\{p\}_e \end{cases}$$

단, $[N]$ 는 形狀函數

따라서 상식(11)에서의 각 積分項은 다음과 같은 行列의 式으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \int_{T_e} [p^*]\{u\} dT_e &= \int_{T_e} [p^*][N]dT_e \cdot \{u\}_e \\ &= [h_i]_e \{u\}_e \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{T_e} [u^*]\{p\} dT_e &= \int_{T_e} [u^*][N]dT_e \cdot \{p\}_e \\ &= [g_i]_e \{p\}_e \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

상식(12), (13)에 있어서의 積分은 有限要素法에서와 같이 Gauss 등의 數値積分을 이용하여 행한다.

要素 e 내의 全節點에 대하여 數値積分(12), (13)을 행하면 식(11)은 다음과 같이 변환된다.

$$[C]_e \{u\}_e + \sum_{i=1}^n [h_i]_e \{u\}_e = \sum_{i=1}^n [g_i]_e \{p\}_e \dots\dots\dots(14)$$

全體系에 대하여는 要素(e)에 대하여 成立되는 식(14)의 集合을 취하면 된다. 따라서

$$[C]\{u\} + [H']\{u\} = [G]\{p\}$$

혹은

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \dots\dots\dots(15)$$

단, $[H] = [C] + [H']$

境界條件을 代入하면 식(15)는 최종적으로는 다음과 같은 線形聯立方程式으로 표시된다.

$$[K]\{X\} = [F] \dots\dots\dots(16)$$

상식에서 $\{X\}$ 는 未知의 變位 및 表面力의 項만으로 이루어져 있는 列벡터이다.

2.4 使用要素

本 解析시스템에서 사용하는 境界要素는 三角形要素이며 要素내의 變位 및 表面力은 要素내에서 一定한 것으로 가정한다. 따라서 要素의 節點은 하나이며 三角形의 重心을 節點으로 선택한다.

本 數値解析手法에 의한 프로그램의 플로우차트를 그림 4에 표시한다.

3. 境界面上的의 表面應力의 評價

境界要素法에 의해 각 要素의 變位와 表面力은 얻으지만 境界要素에서의 變形度 및 應力은 直接 計算되지는 않는다.

序論에서도 記述한 바와 같이 많은 경우에 있어서 境界表面상에서 應力의 最大值가 존재하고, 또한 實驗值와의 比較·檢討상의 關係로 境界表面에서의 變形度나 應力을 計算해야 할 필요가 있다.³⁾

本 論文에서는 要素내부에서의 變位 및 表面力이 一定한, 節點이 하나인 一定要素의 三角形要素를 使用要素로서 이용하고 있기 때문에 다음과 같은 방법으로 境界表面상에서의 變形도와 應力의 分布를 구할 수 있다.

그림 5 와 같이 주목하는 要素의 平面에, 邊을 共有하고 있는 인접한 3개의 要素를 投影하고, 投影된 三角形의 重心들로서 形成된 假想三角形에서 變位는 線形的으로 變化한다고 假定한다.

그림 5 에서와 같이 斜交局素座標系(ξ, η, ζ)를 취하고 3點의 좌표를(x_i, y_i, z_i)라 하면 假想三角形내의 임의의 점의 位置벡터는 다음과 같이 표시된다.

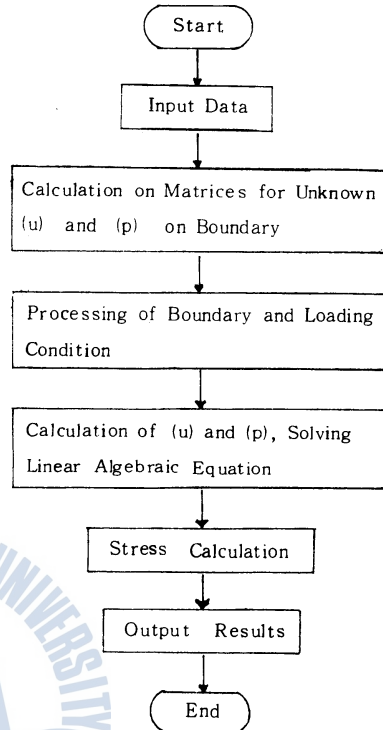


Fig. 4 Flow Chart of Program.

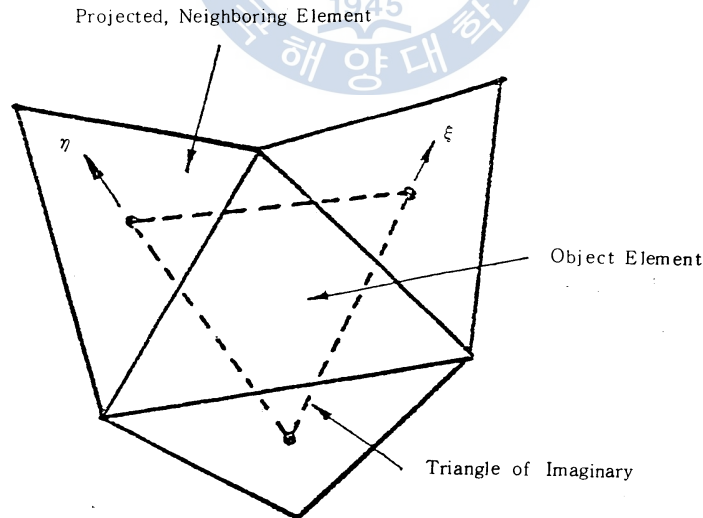


Fig. 5 Projected, Neighboring Element and Triangle of Imaginary.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

$$\begin{cases} \xi = (2A_1 + b_1x + a_1y) / 2A \\ \eta = (2A_2 + b_2x + a_2y) / 2A \dots\dots\dots (18) \\ \zeta = 1 - \xi - \eta = (2A_3 + b_3x + a_3y) / 2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_i = x_k - x_j \\ b_i = y_j - y_k \\ 2A_i = x_j y_k - x_k y_j \\ A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - b_2 a_1) \end{cases}$$

變位 u 는 假想三角形내에서 線形的으로 變化하므로 식 (3), (17), (18)로부터 變位와 變形度에 관한 다음 식이 誘導된다.

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \{b_1 u_{1x} + b_2 u_{2x} - (b_1 + b_2) u_{3x}\} / 2A \\ \epsilon_{22} = \{a_1 u_{1y} + a_2 u_{2y} - (a_1 + a_2) u_{3y}\} / 2A \dots\dots\dots (19) \\ \epsilon_{12} = \{b_1 u_{1y} + b_2 u_{2y} - (b_1 + b_2) u_{3y} \\ + a_1 u_{1x} + a_2 u_{2x} - (a_1 + a_2) u_{3x}\} / 2A \end{cases}$$

주목하고 있는 要素의 法線單位벡터의 方向餘弦을 n_1, n_2, n_3 라 하면 表面力과 應力의 관계는 다음과 같다.

$$P_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \dots\dots\dots (20)$$

식 (3) 및 식 (20) 으로부터 다음 식이 誘導된다.

$$\begin{pmatrix} \frac{P_1}{G} - \frac{2n_1(1-\nu)}{1-2\nu} \epsilon_{11} - \frac{2n_1\nu}{1-2\nu} \epsilon_{22} - n_2 \epsilon_{12} \\ \frac{P_2}{G} - \frac{2n_2\nu}{1-2\nu} \epsilon_{11} - \frac{2n_2(1-\nu)}{1-2\nu} \epsilon_{22} - n_1 \epsilon_{12} \\ \frac{P_3}{G} - \frac{2n_3\nu}{1-2\nu} \epsilon_{11} - \frac{2n_3\nu}{1-2\nu} \epsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n_1\nu}{1-2\nu} & n_3 & 0 \\ \frac{2n_2\nu}{1-2\nu} & 0 & n_3 \\ \frac{2n_3(1-\nu)}{1-2\nu} & n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

상식 (20), (21)에 의해 變形度の 全成分, $\epsilon_{ij} (i, j=1 \sim 6)$ 이 解析되므로 應力과 變形度の 관계식 (4)로부터 境界表面상의 임의의 要素에서의 表面應力 $\sigma_{ij} (i, j=1 \sim 6)$ 을 구할 수 있다.

4. 考 據

前述한 境界要素法 및 表面應力評價手法의 妥當性을 確認하기 위하여 理論解가 알려져 있는 다음의 2가지 壓力容器에 解析手法을 적용하였다.

(1) 內壓 p 를 받는 半徑 a , 두께 t 의 球形壓力容器

이 球形容器는 上下, 左右對稱이므로 解析領域으로 球面의 $\frac{1}{4}$ 領域만을 택하였다. 이와 같은 경우 容器面에 발생하는 應力의 理論解는 膜應力 $pa/2t$ 이다.⁴⁾ 理論解인 膜應力, 본프로그램에 의한 數值

解析解 및 分割要素數의 關係를 그림 6에 표시한다.

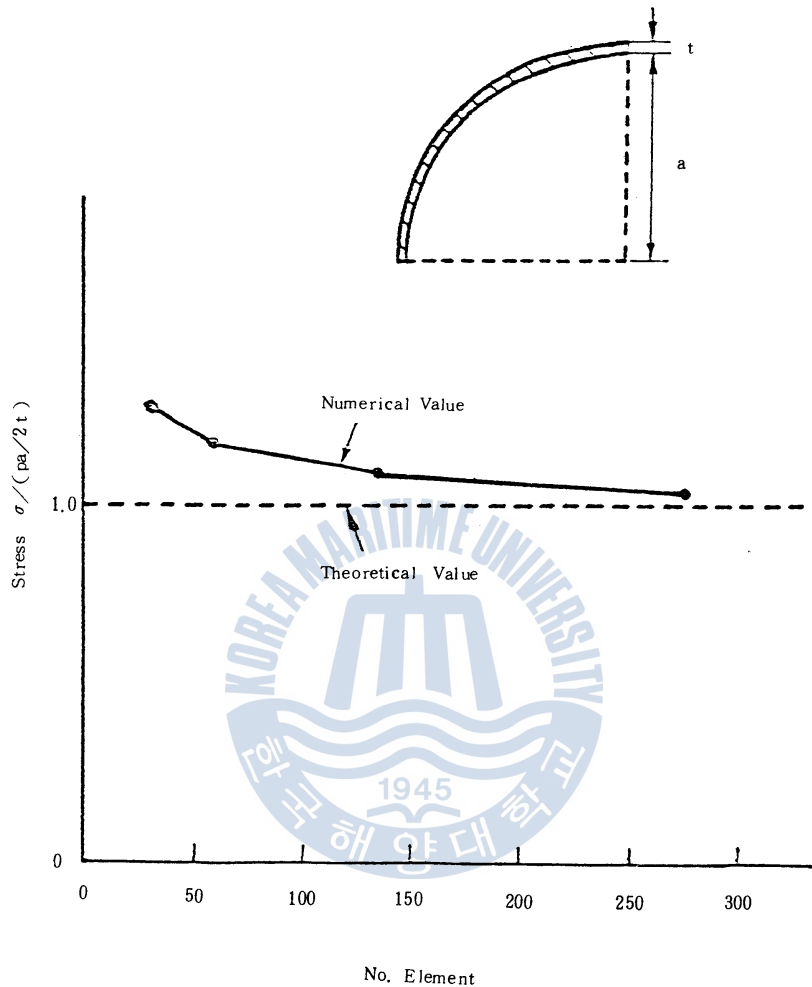


Fig. 6 Stress of Spherical Vessel.

橫軸은 分割要素數, 縱軸은 計算應力值를 膜應力으로 나누어 無次元化시킨 값이다. 分割要素數를 크게 함에 따라 計算值가 理論解에 接近함을 할 수 있고, 또 잘 비교적 精度가 좋은 것으로 판단된다.

(2) 內壓을 받는 圓筒과 球面으로 된 壓力容器

이 壓力容器는 半徑 a , 길이 $2a$, 두께 t 의 圓筒과 半徑 a , 두께 t 의 半球面 2개로 된 壓力容器이며, 內壓 p 가 작용하고 있다.

이 경우의 圓筒面의 軸方向應力은 Timoshenko의 理論解에 의하면 다음과 같다.⁵⁾

$$\sigma = \frac{pa}{2t} + \frac{3}{4} \frac{pa}{t \sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{\frac{x}{a}} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1.293 \frac{pa}{2t}$$

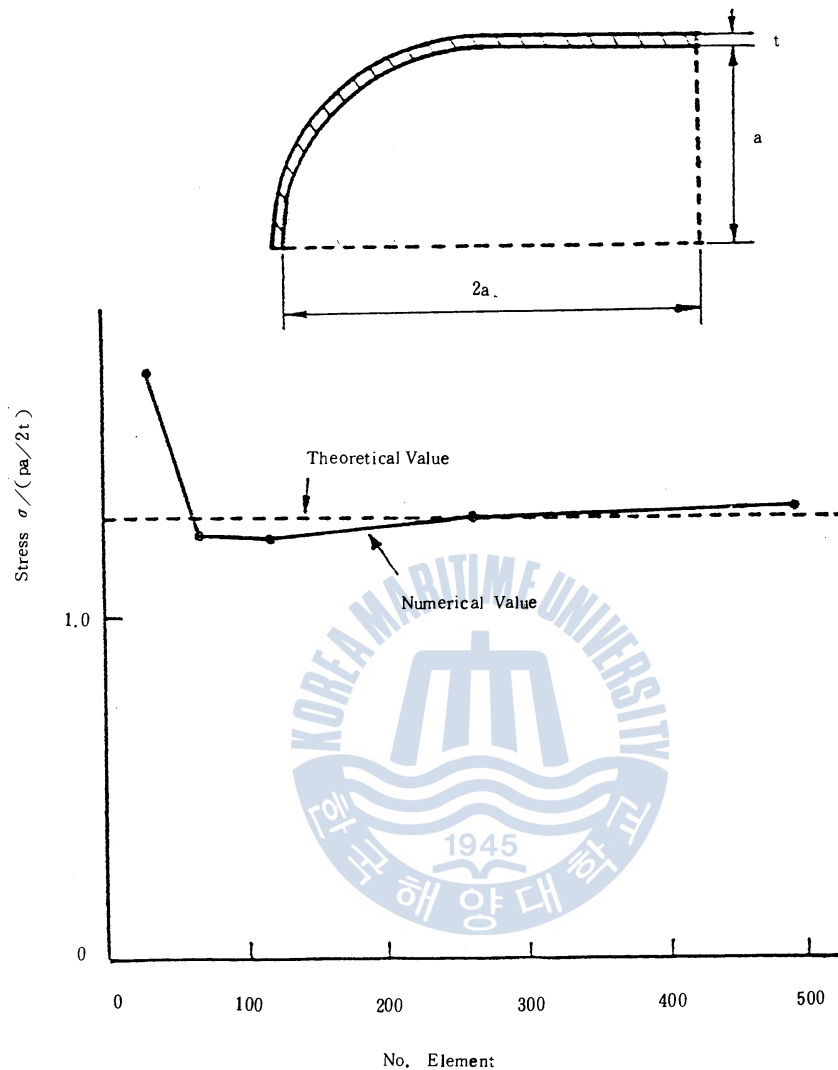


Fig. 7 Stress of Cylindrical Vessel with Hemi-spherical Ends.

圓筒面의 軸方向應力에 대한 解析值, 理論解 및 分割要素數의 關係를 그림 7에 나타낸다. 橫軸은 分割要素數, 橫軸은 計算應力值를 膜應力으로 나누어 無次元化시킨 값이다. 點線은 理論解를 의미한다. 分割要素數를 크게 함으로서 理論解와 解析值가 잘 一致하게 됨을 알 수 있다.

5. 結 論

三次元彈性體의 表面應力을 計算하기 위해 數值解析法으로 境界要素法을 이용하여 境界面上의 要素의 表面力 및 變位를 구하고 본 數值解析法에서 제안한 表面應力計算法에 이들 값을 적용시켜 表面應力을 評價하는 프로그램을 開發하였다.

이 數値解析法의 妥當性을 確認하기 위하여 두 種類의 壓力容器에 적용시켜 理論解와 解析値를 比較・檢討한 결과 다음과 같은 事實을 알 수 있었다.

(1) 分割要素數에 따른 解析値의 變化를 고찰한 결과 解析値가 잘 收斂함을 알 수 있었다.

(2) 解析値는 理論解에 比較的 높은 精度로서 一致한다.

따라서 論文의 數値解析手法은 三次元彈性體의 表面應力解析에 有用하게 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

參 考 文 獻

- 1) Brebbia, C. A. at al : Boundary Element Techniques in Engineering, Butterworth, 1980.
- 2) 神谷紀生 : 有限要素法と境界要素法, 사이엔스社, 1982.
- 3) Warlo, F. : München工大學位論文, 1974.
- 4) Tmoshenko, S. P. at al : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 5) Roark, R. J. at al : Formulas for Stress and Strain, McGraw-Hill, 1975.



