

各種 制限條件下에서의 PI制御器의 最適設計에 關한 研究

吳 世 駿 · 河 注 植

A Study on the Optimum Design of the PI Controller
under the Various Constraints

Oh, Sea-June · Ha, Joo-Shik

〈 目 次 〉	
Abstract	4·1 裝置 및 方法
記號說明	4·2 應答實驗結果
1. 序 論	5. 檢 討
2. 理論的 考察	5·1 制御器의 Parameter 에 對한 檢討
2·1 블록線圖 및 傳達函數	5·2 w_n 에 對한 檢討
2·2 制御系統의 狀態方程式 表示	5·3 應答實驗에 對한 檢討
2·3 評價函數	5·4 制限條件에 對한 檢討
2·4 各種 制限條件	5·5 周波數應答에 對한 檢討
3. 數值計算	6. 結 論
4. 應答實驗	參考文獻

Abstract

In the design of a controller, the percent peak overshoot, rise time, and settling time are generally very important factors.

It should be considered sufficiently that the system has relative stability and adequate characteristics of the steady state response and transient response according to the object, and that the controller is to be designed to optimize the system in some sense subject to some constraints.

In the paper, a method to determine the optimal parameters of the PI controller in the unity-feedback control system is proposed. Here the sense of the optimum is to minimize the integral of the square of the control error under the constraints that the maximum absolute value of control input, maximum overshoot, rise time, etc., should be smaller than the pre-given values.

In the analysis, the traditional method and the state variable method are combined in order to reduce the computational procedures required in the design of PI controller. Therefore, the procedures proposed in the paper will be usefully applicable to the practical feed back control system with a second-order plant.

數 $G_c(s)$ 및 制御對象의 傳達函數 $G_P(s)$ 는 各各 다음과 같이 表示된다.

$$G_c(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} \right) \dots \dots \dots (2.1)$$

但, K_P : 制御器의 定常利得
 T_i : 積分時間

$$G_P(s) = \frac{k w_n^2}{S^2 + 2 \zeta w_n S + w_n^2} \dots \dots \dots (2.2)$$

但, k : 制御對象의 定常利得
 ζ : 減衰率
 w_n : 固有角周波數

入力 $R(s)$ 와 外亂 $D(s)$ 가 加해지는 Fig. 2-1 과 같은 制御系統에서 $C(s)$, $E(s)$, $M(s)$ 및 $U(s)$ 를 求하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{G_c(s)G_P(s)}{1+G_c(s)G_P(s)} R(s) + \frac{G_P(s)}{1+G_c(s)G_P(s)} D(s) \\ &= \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} R(s) \\ &\quad + \frac{k w_n^2 S}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} D(s) \dots \dots \dots (2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ &= R(s) - \left\{ \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} R(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k w_n^2 S}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} D(s) \right\} \dots \dots \dots (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(s) &= G_c(s)E(s) \\ &= \left\{ K_P + \frac{K_P/T_i S^2 + K_P(2 \zeta w_n/T_i - kK_P w_n^2)S + K_P w_n^2 (1 - kK_P)/T_i}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} \right\} R(s) \\ &\quad - \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} D(s) \dots \dots \dots (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= M(s) + D(s) \\ &= \left\{ K_P + \frac{K_P/T_i S^2 + K_P(2 \zeta w_n/T_i - kK_P w_n^2)S + K_P w_n^2 (1 - kK_P)/T_i}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} \right\} R(s) \\ &\quad + \left\{ 1 - \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} \right\} D(s) \dots \dots \dots (2.6) \end{aligned}$$

式(2.3)~(2.6)에서 階段狀入力 $R(s)$ 만 作用할 때 (즉, $R(s) = r/s$, $D(s) = 0$)의 制御器出力 $C_R(s)$ 는 式(2.3)에서

$$C_R(s) = \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} R(s) \dots \dots \dots (2.7)$$

이고 또한 制御誤差, 制御器出力 및 制御플랜트入力は 式(2.4), (2.5), (2.6)으로 부터 各各 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} E_R(s) &= R(s) - C_R(s) \\ &= \left\{ 1 - \frac{kK_P w_n^2 (S+1/T_i)}{S^3 + 2 \zeta w_n S^2 + w_n^2 (1+kK_P)S + kK_P w_n^2 / T_i} \right\} R(s) \dots \dots \dots (2.8) \end{aligned}$$

$$M_R(s) = \left\{ K_P + \frac{K_P/T_i S^2 + K_P(2\zeta\omega_n/T_i - kK_P\omega_n^2)S + K_P\omega_n^2(1 - kK_P)/T_i}{S^3 + 2\zeta\omega_n S^2 + \omega_n^2(1 + kK_P)S + kK_P\omega_n^2/T_i} \right\} R(s) \dots\dots\dots(2\cdot9)$$

$$U_R(s) = M_R(s) \dots\dots\dots(2\cdot10)$$

또한 階段狀 外亂 $D(s)$ 만 作用할 때 (즉, $D(s) = d/s$, $R(s) = 0$)의 諸 값들은

$$C_D(s) = \frac{k\omega_n^2 S}{S^3 + 2\zeta\omega_n S^2 + \omega_n^2(1 + kK_P)S + kK_P\omega_n^2/T_i} D(s) \dots\dots\dots(2\cdot11)$$

$$E_D(s) = -C_D(s) \dots\dots\dots(2\cdot12)$$

$$M_D(s) = -\frac{kK_P\omega_n^2(S + 1/T_i)}{S^3 + 2\zeta\omega_n S^2 + \omega_n^2(1 + kK_P)S + kK_P\omega_n^2/T_i} D(s) \dots\dots\dots(2\cdot13)$$

$$U_D(s) = M_D(s) + D(s) \\ = \left\{ 1 - \frac{kK_P\omega_n^2(S + 1/T_i)}{S^3 + 2\zeta\omega_n S^2 + \omega_n^2(1 + kK_P)S + kK_P\omega_n^2/T_i} \right\} D(s) \dots\dots\dots(2\cdot14)$$

와 같이 表示되며 여기서 添字 R 과 D 는 各各 階段狀入力和 外亂이 作用할 境遇를 意味한다. 以上의 式(2·7)~(2·14)에서 보면 모두 分母가 똑 같으며 이것은 다 똑 같은 特性方程式(characteristic equation)을 갖는다는 것을 意味한다.

2·2 制御系統의 狀態方程式 表示

式(2·7)~(2·10)과 式(2·11)~(2·14)로 表示되는 方程式은 微分方程式의 形態로 變換될 수 있으므로 다음과 같은 狀態方程式으로 表示할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{A}\mathbf{x}_R + \mathbf{B}r \dots\dots\dots(2\cdot15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_D = \mathbf{A}\mathbf{x}_D + \mathbf{B}d \dots\dots\dots(2\cdot16)$$

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_D = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -kK_P\omega_n^2/T_i & -\omega_n^2(1 + kK_P) & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서 式(2·15), (2·16)의 目標値에 對한 入力 r 과 外亂에 對한 入力 d 의 狀態變數를 各各 w_R , w_D 라 두면

$$w_R = r, \quad w_D = d \\ \dot{w}_R = \dot{r} = 0, \quad \dot{w}_D = \dot{d} = 0$$

가 된다.

本 論文에서는 狀態벡터와 入力벡터를 結合한 새로운 벡터 \mathbf{Z}_R , \mathbf{Z}_D 를 定義하면

$$\mathbf{Z}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots\dots\dots \\ w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w_R \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2\cdot17)$$

$$\mathbf{Z}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_D \\ \dots \\ w_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ w_D \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.18)$$

와 같이 되고 式(2.17)의 兩邊을 微分하고 式(2.15)를 右邊에 代入하면

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}_R &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_R \\ \dots \\ \dot{w}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_R + Bw_R \\ \dots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_R \\ \dots \\ w_R \end{pmatrix} \\ &= F \cdot \mathbf{Z}_R \dots \dots \dots (2.19) \end{aligned}$$

$$\text{但, } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -kK_P w_n^2 / T_i & -w_n^2(1+kK_P) & -2\zeta w_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

가 되며, 같은 方法으로 式(2.18)의 境遇도 다음과 같아진다.

$$\dot{\mathbf{Z}}_D = F \mathbf{Z}_D \dots \dots \dots (2.20)$$

또한 이들 方程式의 初期條件은

$$\mathbf{Z}_R(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_D(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

와 같다.

여기서 벡터 $\mathbf{Z}_R, \mathbf{Z}_D$ 의 элемент 중에서 w_R, w_D 는 各各 階段狀入力 r 및 外亂 d 를 發生하기 爲한 狀態變數이며 또 式(2.17), (2.18)의 벡터 \mathbf{Z}_R 과 \mathbf{Z}_D 를 結合시킨 새로운 벡터를 \mathbf{Z} 라 定義하면 두 方程式은 다음과 같은 하나의 簡單한 狀態方程式으로 表示할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_R \\ \dots \\ \dot{\mathbf{Z}}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_R \\ \dots \\ \mathbf{Z}_D \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.21)$$

初期條件 $\mathbf{Z}^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ r \ 0 \ 0 \ 0 \ d]$ 이다.

또 制御系統에 階段狀入力 R 과 外亂 D 가 加해질 때 式(2.7)~(2.10)과 式(2.11)~(2.14)로 주어지는 各式 左邊의 出力信號는 이 信號들을 эле먼트로 하는 벡터 \mathbf{y}_R 과 \mathbf{y}_D 를 定義함으로써 이 \mathbf{y}_R 과 \mathbf{y}_D 에 關한 벡터 方程式으로 위의 式(2.7)~(2.14)의 各式들은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\mathbf{y}_R = Q_R \mathbf{Z}_R \dots \dots \dots (2.22)$$

$$\mathbf{y}_D = Q_D \mathbf{Z}_D \dots \dots \dots (2.23)$$

$$\text{但, } \mathbf{y}_R = \begin{pmatrix} c_R \\ e_R \\ m_R \\ u_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_D = \begin{pmatrix} c_D \\ e_D \\ m_D \\ u_D \end{pmatrix}$$

$$Q_R = \begin{pmatrix} kK_P w_n^2 / T_i & kK_P w_n^2 & 0 & 0 \\ -kK_P w_n^2 / T_i & -kK_P w_n^2 & 0 & 1 \\ K_P w_n^2 (1 - kK_P) / T_i & K_P (2\zeta w_n / T_i - kK_P w_n^2) & K_P / T_i & K_P \\ K_P w_n^2 (1 - kK_P) / T_i & K_P (2\zeta w_n / T_i - kK_P w_n^2) & K_P / T_i & K_P \end{pmatrix}$$

$$Q_D = \begin{pmatrix} 0 & k w_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k w_n^2 & 0 & 0 \\ -kK_P w_n^2 / T_i & -kK_P w_n^2 & 0 & 0 \\ -kK_P w_n^2 / T_i & -kK_P w_n^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

또한 새로운 벡터 y 를 定義함으로써 式(2.22), (2.23)로 表示되는 두 方程式은 다음의 式(2.24)로 表示되는 하나의 方程式으로 나타낼 수 있다.

$$y = \begin{pmatrix} y_R \\ \dots \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_R : 0 \\ \dots \\ 0 : Q_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_R \\ \dots \\ Z_D \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.24)$$

2.3 評價函數

序論에서 밝힌 바와 같이 過渡應答의 質을 評價하는데 있어서 주어진 制限條件들을 滿足하면서 評價函數를 最少로 하는 最適퍼라미터를 求하는 것이 本 論文의 目的이다. 여기서는 評價函數으로써 最適制御評價函數로 有用하게 利用되고 있는 制御誤差의 二乘面積(Integral of the square of the Error) 즉, 二乘制御面積에 對한 評價方法을 導入한다. 制御系統에 있어서 인디셜應答(indicial Response)에 對한 二乘制御面積은

$$J = \int_0^{\infty} e_R^2(t) dt \dots \dots \dots (2.25)$$

로 주어지며 $y_R^T Q y_R = \|y_R\|^2_Q = e_R^2$ 으로 表示되므로 式(2.25)는 다시 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} \|y_R\|^2_Q dt \dots \dots \dots (2.26)$$

$$\text{但, } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

인 荷重메트릭스(Weighting Matrix)이다.¹⁾

制限條件이 考慮되지 않은 狀態에서 評價函數를 最少로 하는 PI 制御器의 퍼라미터 K_P, T_i 값 및 그 때의 最少 二乘制御面積 J 는 앞서 河 等이 研究發表한²⁾ 바 本 論文에서 最適퍼라미터를 求하는데 있어 有用하게 利用될 수 있으므로 그것을 要約 定理하면 다음과 같다.

- i) K_P 값은 可能的 限 큰 값을 取한다.
- ii) 이 때의 K_P 값에서 二乘制御面積을 最少로 하는 T_i 값은

$$T_i = \frac{kK_P(kK_P + 4\zeta^2 - 1)}{2\zeta w_n(\sqrt{(kK_P + 1)(kK_P + 4\zeta^2 - 1)} + 1) + 1 - 1} \dots \dots \dots (2.27)$$

이다.

- iii) 이 때의 K_P, T_i 값에서 二乘制御面積의 最少값은

$$J = \frac{kK_P + 4\zeta^2 - 1 + 2\zeta\omega_n T_i / kK_P}{4\zeta\omega_n(kK_P + 1 - kK_P/2\zeta\omega_n T_i)} \dots\dots\dots(2.28)$$

로 주어진다.

2.4 各種 制限條件

앞에서 論한 評價函數에 關한 式(2.26) 또는 式(2.28)로 부터 設計하고자 하는 制御系統의 評價函數를 最少로 하면서 實際의 制御系統이 要求되는 設計目的에 符合되도록 하기 爲해서 各種 制限條件에 對해 다음의 式(2.29)~(2.33)과 같이 表示하기로 한다.

$$f_1 = |C_{Rmax.} - C_{RP}| \leq 0 \dots\dots\dots(2.29)$$

$$f_2 = |U_{Rmax.} - U_P| \leq 0 \dots\dots\dots(2.30)$$

$$f_3 = |C_{Dmax.} - C_{DP}| \leq 0 \dots\dots\dots(2.31)$$

$$f_4 = |U_{Dmax.} - U_P| \leq 0 \dots\dots\dots(2.32)$$

$$f_5 = T_R - t_p \leq 0 \dots\dots\dots(2.33)$$

但, $T_R = t_2 - t_1$

t_1 ; 應答出力 C_R 이 入力の 10(%)에 該當하는 데 所要되는 遲延時間

t_2 ; 應答出力 C_R 이 入力の 90(%)에 該當하는 데 所要되는 遲延時間

T_R ; rise time

여기서 式(2.29)~(2.33)中 制限條件에 關한 函數 f_1 과 f_3 는 目標值에 對한 階段狀入力和 外亂에 對한 階段狀入力が 加해질 때 各各의 出力 C_R, C_D 의 最大值를 制限하며, 또한 f_2 와 f_4 는 플랜트에 加해지는 制御入力が 要求되는 限界值를 넘지 않도록 制限한다.

또, f_5 는 階段狀入력에 對한 出力信號 C_R 가 入力 R 의 10%에서 90%까지 應答하는 데 所要되는 遲延時間 즉, rise time⁹⁾을 制限하도록 하는 條件式이다. 式(2.29), (2.30)에서 $C_{Rmax.}$ 와 $U_{Rmax.}$ 은 入력에 對한 出力應答 C_R 의 最大오우버슈우트(maximum-overshoot) 및 플랜트 入力信號 U_R 의 最大值를 나타내며 그 때의 制限值는 各各 C_{RP} 와 U_P 이고 式(2.31), (2.32)의 $C_{Dmax.}, U_{Dmax.}$ 은 外亂에 對한 出力應答 C_D 와 그 때의 플랜트入力 U_D 의 最大值를 뜻하며 또한 C_{DP} 는 C_D 에 對한 制限值이며 t_p 는 制御系統이 滿足해야 하는 rise time의 制限值이다.

3. 數 值 計 算

k, ζ, ω_n 이 주어지는 二次系統의 實驗플랜트를 PI 制御하는 制御系統에 入力 $R=1$ 의 單位 階段狀入力和 $D=1$ 의 單位 階段狀 外亂이 加해질 때 먼저 制御器의 利得 K_P 값을 變化시키면서 積分時間 T_i 를 式(2.27)로 부터 計算하고 이 때의 퍼래미터 K_P, T_i 값에서 評價函數 J 값을 式(2.28)에서 求하였다. 또한 式(2.21)의 狀態方程式을 遷移메트릭스(Transient matrix)法으로 0.02秒 間隔으로 15秒間 數值積分 하였으며 式(2.24)로 부터 制御系統에 있어서의 $C_{Rmax.}, C_{Dmax.}, U_{Rmax.}, U_{Dmax.}$ 및 T_R 의 값을 計算하여 위에서 求한 퍼래미터가 주어진 制限條件을 滿足하는 값인 지를 判定하였다.

여기서 15秒間の 積分時間은 制御系統에 있어서의 應答이 거의 定常狀態의 값에 到達하게 되는데

充分한 時間이었으며 위와 같은 計算方法으로 求한 Fig.3-1 은 $\zeta=0.1$, $w_n=1.0$ 인 制御對象을 갖는 制御系統에서 制御器의 利得 K_P 및 制御對象의 利得 k 의 곱 kK_P 값에 對해 評價函數를 最少로 하는 積分時間 T_i 값과의 對應關係를 나타내 주고 있다. 여기서 右側의 4個의 軸은 各各 對應되는 퍼 래미터 값에서 數值計算한 最大오우버슈우트 C_{Rmax} , 플랜트入力の 最大值 U_{max} , 外亂에 對한 出力의 最大值 C_{Dmax} , 및 rise time T_R 의 값을 나타낸다. $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$ 인 制御系統에서 最大許容值 $C_{RP}=45(\%)$, $U_P=4.0$, $C_{DP}=0.45$, $t_p=1.5(\text{sec})$ 와 같은 制限條件이 주어졌을 때 各 制御 特性의 最大值들이 最大許容值를 超過하지 않는 範圍內에서 最適퍼래미터를 求하고자 하면 Fig.3-1 의 빗금친 안쪽 區域인 kK_P-T_i 曲線 中의 點線으로 表示된 線上的 各 點이고 그림에서 보는 바와 같 이 이 때의 最適퍼래미터 $\hat{K}_p=3.12$, $\hat{T}_i=15.6$ 이 되며 二乘制御面積 $\hat{J}=2.532$ 임을 알 수 있다.

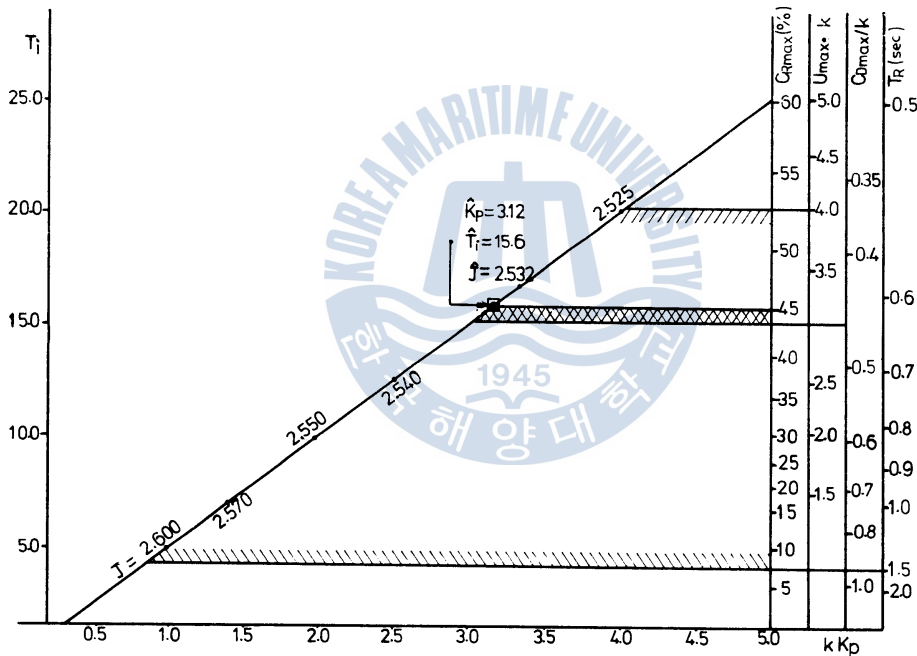


Fig. 3-1 kK_P-T_i curve for $\zeta=0.1$, $w_n=1.0$

또한 Fig.3-2, 3-3, 3-4 및 3-5는 制御플랜트의 퍼래미터 $w_n=1.0$ 인 系統에서 減衰率 ζ 가 各各 0.3, 0.5, 0.7, 1.0 인 境遇에서의 kK_P-T_i 曲線이며, $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$ 인 制御플랜트에서 制御系統의 最大許容值가 各各 $C_{RP}=20(\%)$, $U_P=4.0$, $C_{DP}=0.25$, $t_p=1.5(\text{sec})$ 로 주어지면 Fig.3-5 의 kK_P-T_i 曲線에서 양쪽 方向의 빗금친 안쪽 區域 即, 點線上的 一 點이고 위와 같은 制限條件下에서의 最適퍼래미터는 Fig.3-5 에서 $\hat{K}_p=3.93$, $\hat{T}_i=2.75$ 가 됨을 쉽게 찾을 수 있고 이 때의 評價 函數 $\hat{J}=0.494$ 임을 알 수 있다.

이와 같이 制御系統의 設計 時 合當한 設計要件이 주어지기만 하면 最適퍼래미터는 Fig.3-1~Fig.3-5로 부터 쉽게 求할 수 있다.

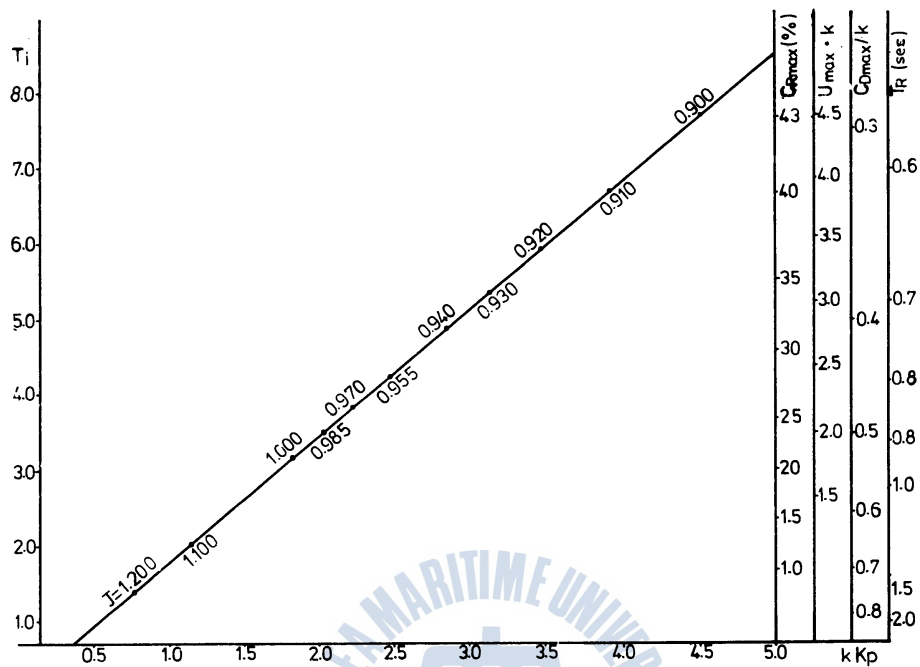


Fig. 3-2 kK_p-T_i curve for $\zeta=0.3, w_n=1.0$

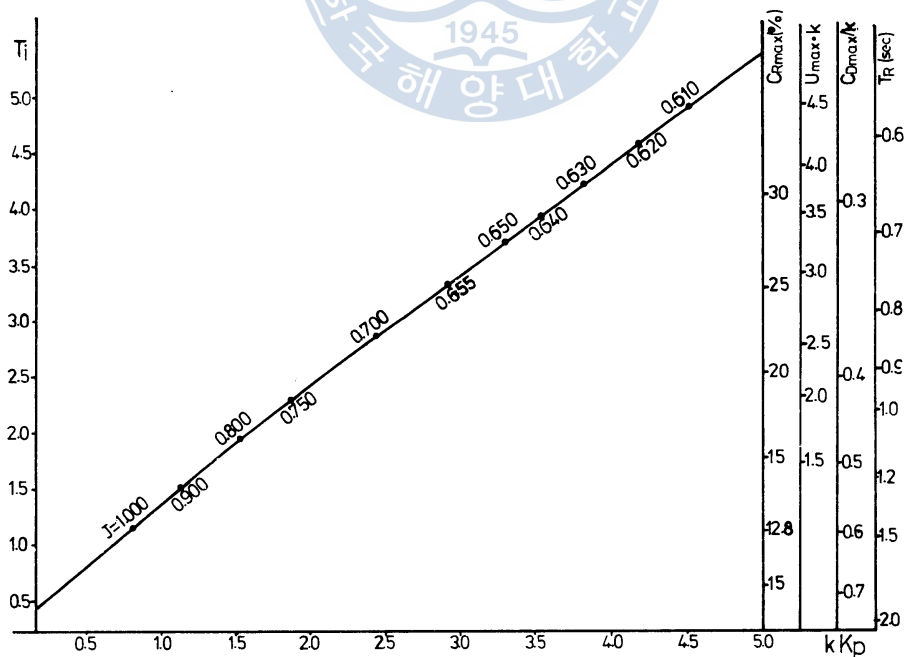


Fig. 3-3 kK_p-T_i curve for $\zeta=0.5, w_n=1.0$

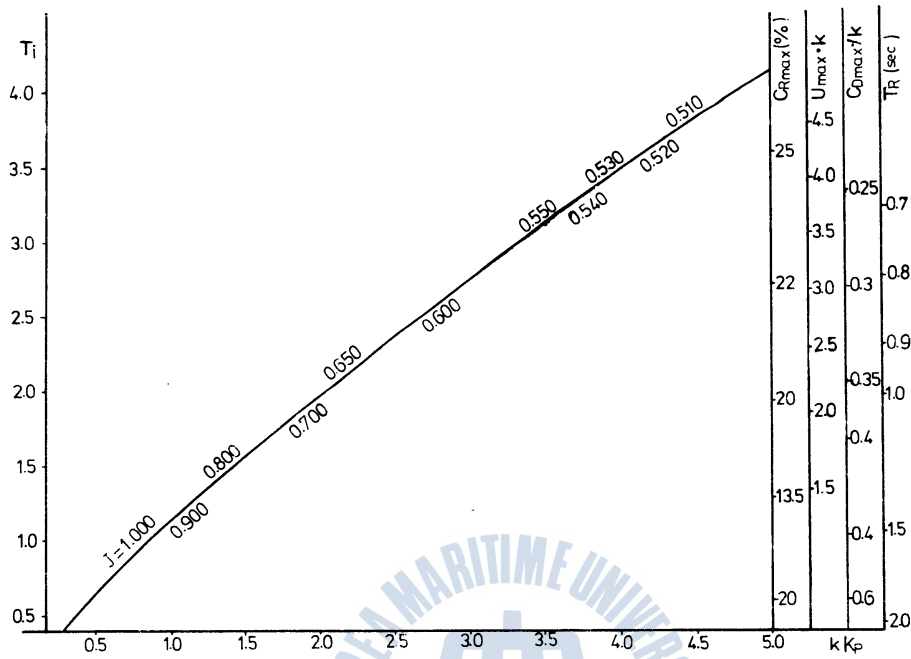


Fig. 3-4 kK_p-T_i curve for $\zeta=0.7, w_n=1.0$

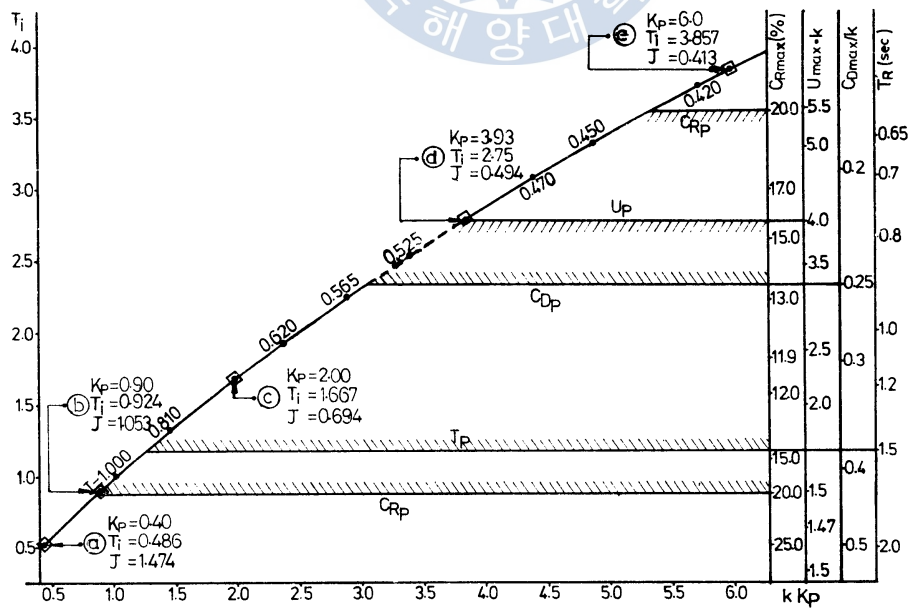


Fig. 3-5 kK_p-T_i curve for $\zeta=1.0, w_n=1.0$

4. 應 答 實 驗

4.1 裝 置 및 方法

앞의 計算方法에 依해서 求해진 各 퍼레미터값들에 對한 應答實驗을 行하기 爲한 應答實驗裝置로 Hitachi 505E Analog Computer(Hitachi Electronics LTD. Co., Amplifier gain = 10⁶)가 使用되었으며 應答實驗을 爲한 아날로그컴퓨터 結線圖에 對해서 考察해 보면

i) 制御器 出力 $m(t)$

Fig. 2-1에서 制御器 部分만 分割하여 생각하면 $M(s)/E(s) = K_P + K_P/T_i S$ 이며 여기서 $M_1(s) = K_P E(s)$, $M_2(s) = (K_P/T_i S)E(s)$ 라 두고 이것을 時間領域函數로 變換하면 $m_1(t) = K_P e(t)$, $m_2(t) = (K_P/T_i)e(t)$ 가 되고 이것은 式(4.1)과 같이 表示된다.

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) \dots\dots\dots(4.1)$$

ii) 制御對象의 入力 $u(t)$

$U(s) = M(s) + D(s)$ 이므로 이것은 式(4.2)와 같이 된다.

$$u(t) = m(t) + d(t) \dots\dots\dots(4.2)$$

iii) 制御系統의 出力 $c(t)$

制御 플랜트의 傳達函數

$C(s)/U(s) = k\omega_n^2 / (S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)$ 으로 부터

$$\ddot{c}(t) = k\omega_n^2 u(t) - 2\zeta\omega_n \dot{c}(t) - \omega_n^2 c(t) \dots\dots\dots(4.3)$$

iv) 制御系 誤差 $e(t)$

目標値와 制御出力 間의 誤差의 라프라스 變換 $E(s) = R(s) - C(s)$ 가 되므로

$$e(t) = r(t) - c(t) \dots\dots\dots(4.4)$$

式(4.1)~(4.4)로 부터 全體系統에 對한 아날로그結線圖를 그리면 다음의 Fig. 4-5와 같으며 이 結線圖를 利用하여 인디설應答實驗을 實施했다.

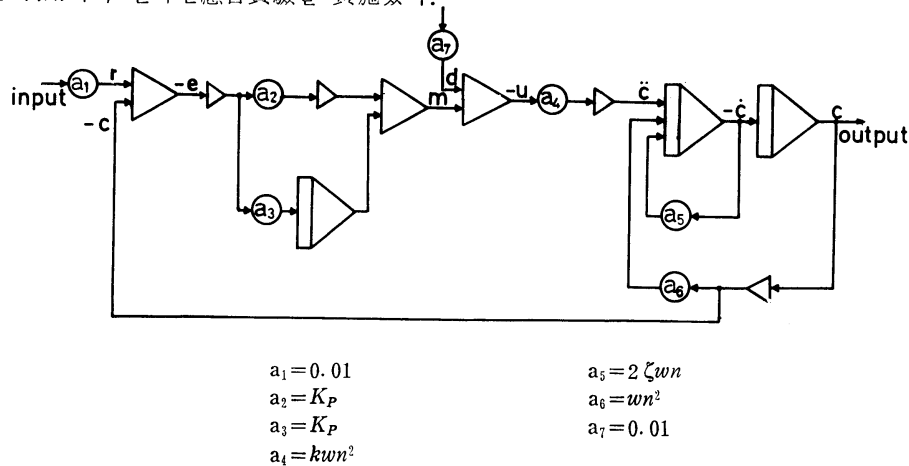


Fig. 4-1 Analog computer block diagram for the system described by Eq. (2.7~14)

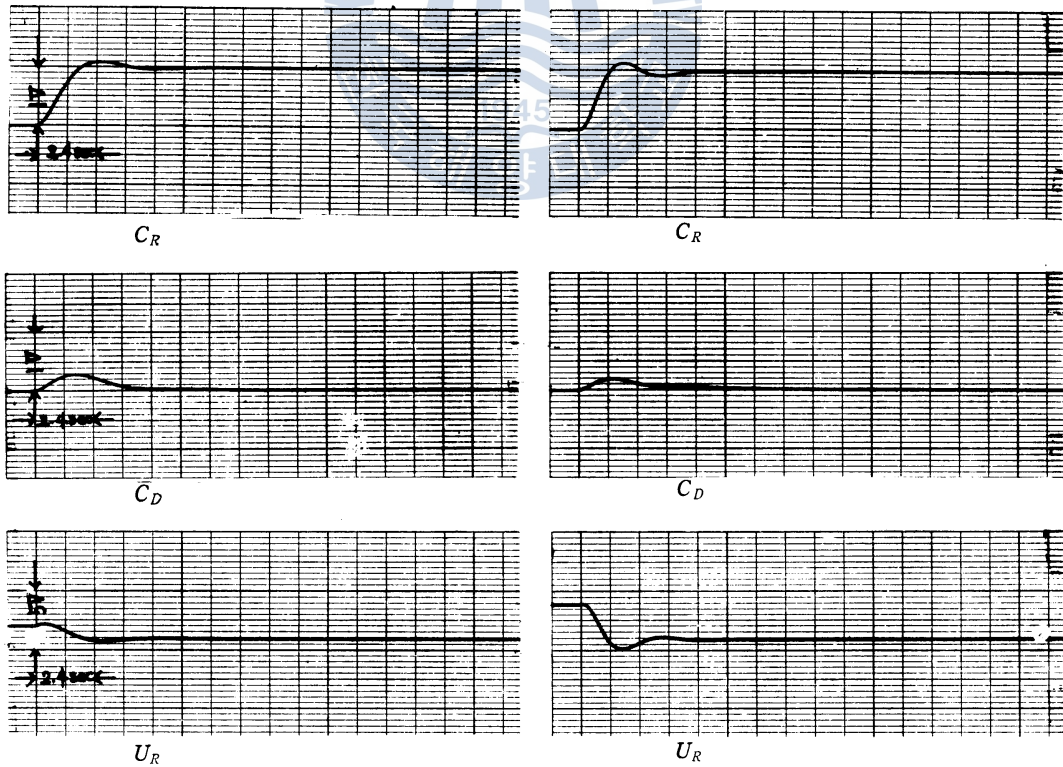
4.2 應答實驗 結果

Fig. 3-5의 ㉔~㉞는 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$ 인 實驗플랜트에서 各各 아날로그 應答實驗을 行한 點들을 表示하고 있으며 이들에 對한 結果가 Fig. 4-6의 (a)~(e)와 같이 나타났다.

이 때 目標值 및 外亂의 入力은 各各 1(volt/cm)이며 對應되는 出力電壓 C_R , C_D 도 各各 1(volt/cm)이고 U_R 은 5(volt/cm)이다. 또 Recorder의 speed는 2.4(sec/cm)로 調整하였다. Fig. 3-5에서와 같이 各 制限條件이 $C_{RP}=20(\%)$, $U_P=4.0$, $C_{DP}=0.25$, $t_p=1.5$ (sec)의 最大許容值가 要求될 때 Fig. 4-6에서 보면 (a)는 點㉔의 應答實驗結果로서 $C_{Rmax.} \approx 25.3(\%)$, $C_{Dmax.} \approx 0.51$, $T_R \approx 2.0$ (sec)가 되어 Fig. 3-5의 kK_P-T_i 曲線에서 制限條件 C_{RP} , C_{DP} , t_p 를 滿足하는 領域 밖에 있음을 말해 준다.

또 (b)는 $K_P=0.9$, $T_i=0.924$ 에서의 應答實驗結果로서 $C_{Dmax.} \approx 0.42$, $T_R \approx 1.68$ (sec)가 되어 $C_{Dmax.} > C_{DP}$, $T_R > t_p$ 인 境遇이며, (c)는 $K_P=2.0$, $T_i=1.667$ 에서의 應答結果로서 $C_{Dmax.} \approx 0.31$ 이고 $C_{Dmax.} > C_{DP}$ 인 境遇임을 보여 주고 있다.

또한 (d)는 $\hat{K}_p=3.93$, $\hat{T}_i=2.75$ 로서 위의 플랜트에 對해 이와 같은 最大許容值가 要求되는 制御系에서 퍼라미터 K_P , T_i 의 最適值인 境遇인데 그림(d)에서 살펴보면 $C_{Rmax.} \approx 15.6(\%)$, $U_{max.} \approx 4.0$, $C_{Dmax.} \approx 0.22$, $T_R=0.78$ (sec)로서 모든 制限條件을 滿足함을 알 수 있다. (e)는 $K_P=6.0$, $T_i=3.87$ 일 때의 應答結果인데 이 때의 評價函數 J 는 ㉔~㉞의 어느 境遇보다 적지만 $C_{Rmax.} \approx 21.8(\%)$,



(a) $K_P=0.4$, $T_i=0.486$
 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$

(b) $K_P=0.9$, $T_i=0.974$
 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$

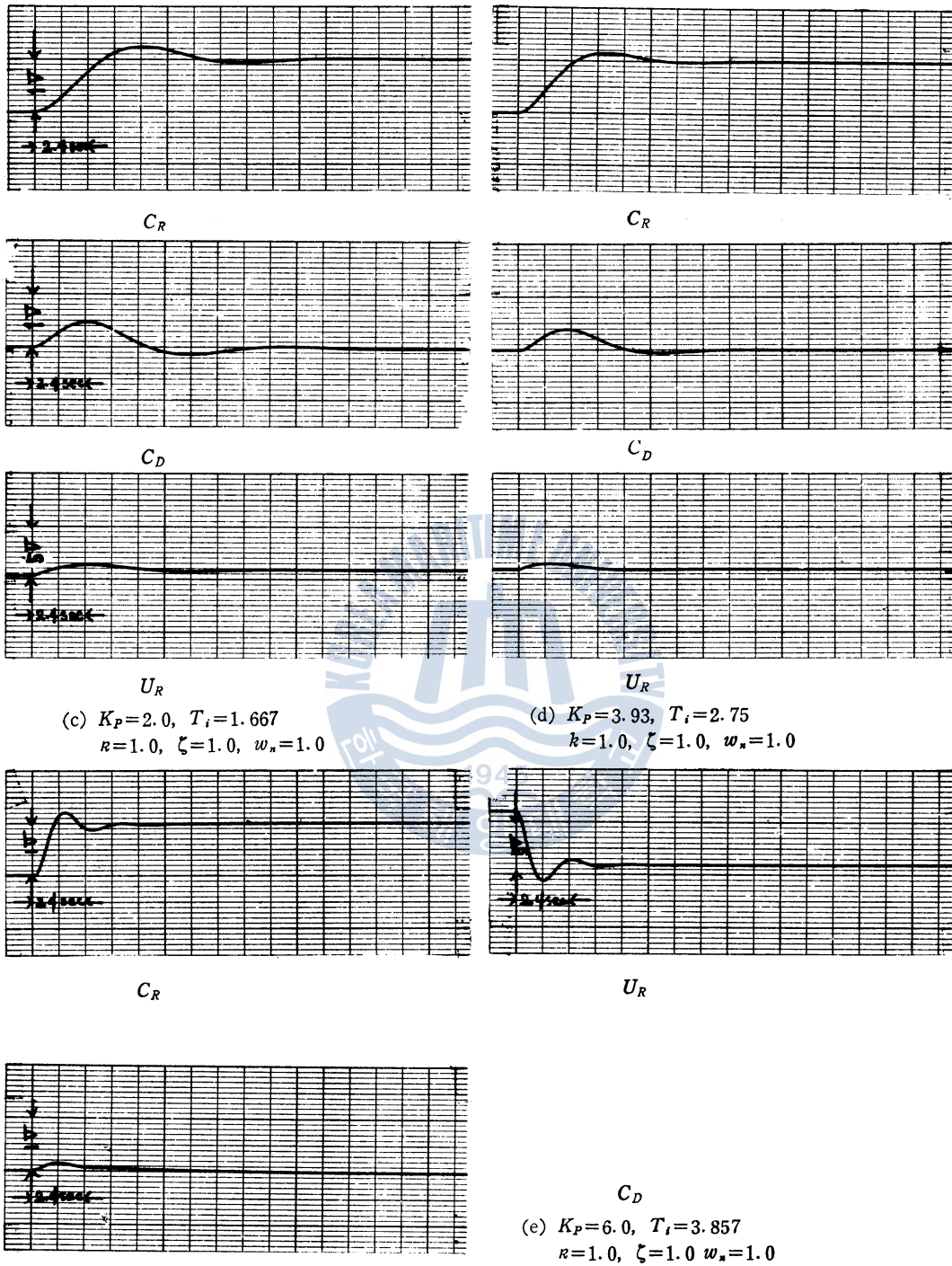


Fig. 4-2 indicial responses of the system experimented for Fig. 3-5 (a)~(c)

$U_{max.} \approx 6.03$ 이 되어 $C_{Rmax.} > C_{RP}, U_{max.} > U_P$ 인 境遇임을 보여 주고 있으며 實際로 制限條件이 賦與되었을 때에는 適切한 K_P 값을 擇해야 함을 말해 준다.

5. 檢 討

5.1 制御器의 퍼라미터에 對한 檢討

앞에서 制御器의 利得 K_P 의 어떠한 값에 對해서도 評價函數를 最少로 하는 積分時間 T_i 값은 式(2.27)에 依해서 一意的으로 決定되어 짐을 밝힌 바 있으며 또한 式(2.28)과 같이 表示되는 評價函數 J 값도 利得 K_P 값의 增加와 더불어 減少함을 밝혔다.

그러나 J 값을 더욱 더 減少시키기 위해 K_P 값을 增加시키면 制御系統의 最大오우버슈우트 C_{Rmax} . 과 制御對象의 最大入力值 U_{max} . 이 增加함을 Fig. 4-2의 ㉔~㉖에서 容易하게 判斷할 수가 있다.

反面에 利得 K_P 값이 增加될 境遇 外亂에 對한 出力 C_{Dmax} .은 減少하며 C_R 의 應答速度는 빨라짐을 위 Fig. 4-2의 ㉔~㉖에서 알 수 있다.

5.2 w_n 에 對한 檢討

本 論文 3章에서 提示한 kK_P-T_i 曲線은 $w_n=1.0$ 인 境遇의 最適퍼라미터를 求하는 圖表이지만 本節에서는 $w_n=1.0$ 이 아닌 制御對象에 對한 最適퍼라미터를 決定하는 方法에 對해서 考察해 보기로 한다.

i) Fig. 2-1의 制御器 傳達函數를 微分方程式으로 表示하면

$$\dot{m}(t) = K_P \dot{e}(t) + \frac{K_P}{T_i} e(t) \text{와 같이 되고 兩邊에 } w_n \text{으로 나누면}$$

$$\frac{1}{w_n} \cdot \frac{dm(t)}{dt} = K_P \cdot \frac{1}{w_n} \cdot \frac{de(t)}{dt} + K_P \cdot \frac{1}{T_i w_n} \cdot \frac{de(t)}{dt} \dots\dots\dots(5.1)$$

로 된다.

여기서 $w_n t = \tau$ 라 두면

$$w_n dt = d\tau$$

또 式(2.27)을 式(5.1)에 代入하고 兩邊을 K_P 로 나누면 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{1}{K_P} \cdot \frac{dm(\tau)}{d\tau} = \frac{de(\tau)}{d\tau} + f(kK_P, \zeta)e(\tau) \dots\dots\dots(5.2)$$

$$\text{但, } f(kK_P, \zeta) = \frac{2\zeta(\sqrt{(kK_P+1)(kK_P+4\zeta^2-1)}+1-1)}{kK_P(kK_P+4\zeta^2-1)}$$

ii) 制御對象의 傳達函數를 微分方程式으로 表示하면

$\ddot{c}(t) + 2\zeta w_n \dot{c}(t) + w_n^2 c(t) = k w_n^2 u(t)$ 와 같이 되고 兩邊을 K_P 로 나누고 i)과 같은 要領으로 하면

$$\frac{d^2c(\tau)}{d\tau^2} + 2\zeta \cdot \frac{dc(\tau)}{d\tau} + c(\tau) = ku(\tau) \dots\dots\dots(5.3)$$

와 같이 된다.

式(5.2), (5.3)을 라프라스變換하여 Fig. 2-1에 對한 等價回路를 그리면 다음과 같다.

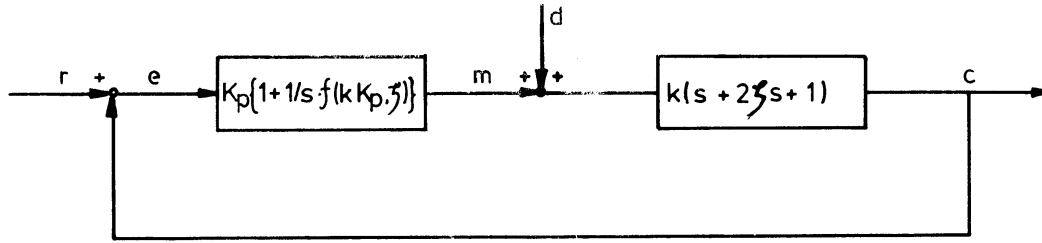


Fig. (2-1)'

等價回路 Fig. (2-1)'와 같은 制御系統에서는 w_n 의 項을 包含하지 않으며 이것은 出力應答이 w_n 에 無關하고 但只 應答時間은 $\tau = w_n t$ 의 關係가 있음을 알 수 있다.

따라서 制御對象의 w_n 이 1.0이 아닌 境遇 評價函數 J' 는

$$J' = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^2(\tau) \frac{1}{w_n} d\tau = \frac{1}{w_n} \int_0^{\infty} e^2(\tau) d\tau$$

가 되며 rise time T_R' 는

$$T_R' = \frac{1}{w_n} \cdot T_R$$

또한 積分時間 T_I' 는

$$T_I' = \frac{1}{w_n} \left\{ \frac{kK_P(kK_P + 4\zeta^2 - 1)}{2\zeta(\sqrt{(kK_P + 1)(kK_P + 4\zeta^2 - 1)} + 1 - 1)} \right\}$$

과 같이 된다.

위의 結果를 利用하여 w_n 이 1.0이 아닌 境遇에 本論文 3章에서 提示한 $kK_P - T_i$ 曲線을 利用할 때는 J' , T_R' , T_I' 의 값은 T , T_R , T_i 의 값 즉, Fig. 3-1~3-5에서 求한 諸 數值로 부터 $\frac{1}{w_n}$ 을 곱함으로써 얻을 수가 있다.

5.3 應答實驗에 對한 檢討

ζ 의 값이 클수록 評價函數 J 는 적은 傾向을 나타내고 應答時間 즉, 定常狀態에 到達하는 時間은 빨라진다는 것은 앞의 參考文獻 2)에서 充分히 檢討한 바 있으며 Fig. 3-1~3-5에서 살펴보면 ζ 의 값이 클수록 外亂에 對한 出力 $C_{Dmax.}$ 은 減少하는 傾向을 나타내고 있으며 플랜트 最大入力 $U_{max.}$ 은 ζ 의 값 變化에 對해 거의 一定한 狀態를 보이고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5-1의 (a), (b)는 $k=1.0$, $\zeta=0.1$, $w_n=1.0$ 및 $k=1.0$, $\zeta=0.5$, $w_n=1.0$ 인 플랜트의 $K_P=3.93$ 일 때의 應答實驗結果인데 (a)의 境遇 $C_{Dmax.} \approx 0.37$, $U_{max.} \approx 3.95$ 이며 $J=0.5$ 인 (b)의 境遇 $C_{Dmax.} \approx 0.28$, $U_{max.} \approx 3.98$ 을 나타내고 있으며 이것과 Fig. 4-6의 (d)와 比較해 보면 위와 같은 ζ 에 對한 特性變化의 傾向을 쉽게 알 수가 있다.

또한 Fig. 5-2의 (a), (b)는 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=3.0$ 및 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=5.0$ 인 플랜트에 對해 $K_P=3.93$ 일 때의 應答實驗結果이다.

이것도 위와 마찬가지로 Fig. 4-6의 (d)와 比較해 보면 w_n 이 클수록 評價函數 J , rise time T_R 및 應答時間이 減少하는 傾向을 나타내며 $C_{Rmax.}$, $U_{max.}$, $C_{Dmax.}$ 은 w_n 에 無關하다는 것을 應答實驗結

果로서 確認할 수가 있다.

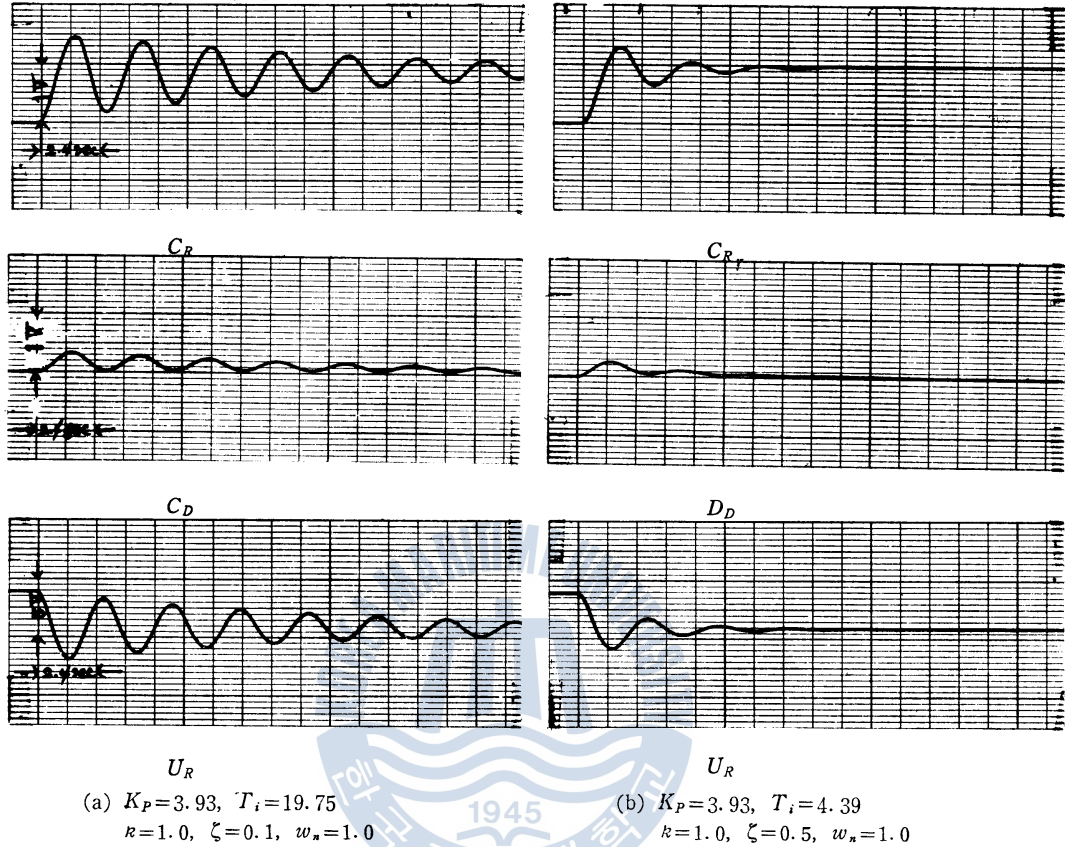


Fig. 5-1 indicial responses of the system experimented.

5.4 制限條件에 對한 檢討

制御系統의 目的과 性質에 따라 諸各己 要求되는 最適制御目的을 達成하기 爲해 本 論文에서는 制御系統에 各種 制限條件을 賦與하고서 그 系統의 最適퍼라미터를 求했다. 이러한 制限條件들은 萬若 制御對象이 外亂에 對한 制御量의 變動特性보다는 目標值의 變化에 對한 制御量의 追從特性이 훨씬 더 重要視되는 追値制御系統인 서어보메카니즘의 境遇에 있어서는 C_{Rmax} . 과 rise time 等에 對해 注意해서 考慮해 볼 必要가 있으며 또한 定値制御系統에서는 目標值의 變化에 對한 制御量의 應答 特性보다는 外亂에 對한 制御量의 變動特性이 問題가 되므로 이 때는 制限條件 賦與時 C_{Dmax} . 에 對해 보다 더 注意해서 考慮할 必要가 있다.

또한 Fig. 3-1~Fig. 3-5에서 알 수 있듯이 이러한 制限條件들은 各各 獨立된 것이 아니며 萬若 最大오우버슈우트 C_{Rmax} . 과 플랜트入力 U_{max} . 값을 改善하고자 最大許容值 C_{R_p} 와 U_p 를 낮추면 相對的 으로 外亂에 對한 出力 C_{Dmax} . 값과 rise time T_R 값의 許容值 C_{D_p} 와 t_p 를 上向調整하지 않으면 안 될 것이다.

따라서 設計하고자 하는 制御系統의 制限值를 設定하는데 있어서 充分한 注意가 要望되며 주어

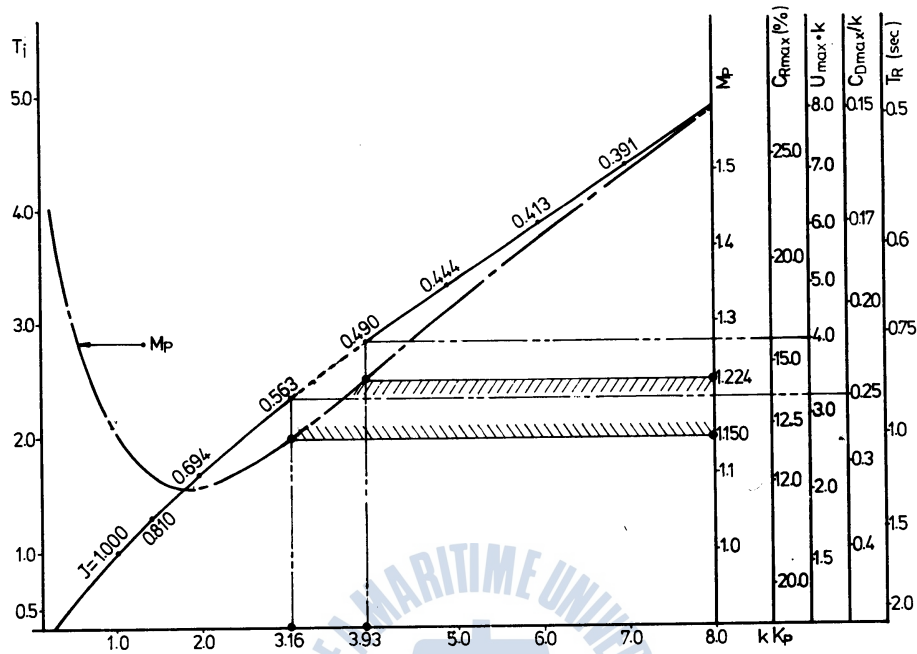


Fig. 5-5 kK_P-M_P curve and kK_P-T_i curve for $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$

Fig. 5-5에서 주어진 制限條件을 滿足하는 範圍內에서의 M_P 値는 1.15~1.224가 되는데 이 값은 一般的으로 使用되는 特性明細로서의 M_P 値에 對해 滿足할 만한 값이다.⁹⁾

實際로 制御系統의 設計에 對해 M_P 値는 特性設計(synthesis)에 있어서 重要な 特性明細 中의 하나 이므로 制御系 設計時 慎重히 檢討할 必要가 있겠다.

또한 各各 $k=1.0$, $\zeta=0.3$, $w_n=1.0$, $k=1.0$, $\zeta=0.5$, $w_n=1.0$ 및 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$ 인 系統에 對해서 位相餘裕(phase margin) P_M 과 kK_P-T_i 曲線과의 關係를 나타내고 있는 Fig. 5-6~Fig. 5-8에서 알 수 있듯이 制御器의 利得 K_P 값이 增加할 수록 位相餘裕 P_M 은 대체로 減少하는 傾向을 보이고 있다.

制御系統의 P_M 値 計算은

$$\begin{aligned}
 P_M &= \text{Arg. } F(j\omega) + 180^\circ \\
 &= \tan^{-1}(T_i w_n v_p') - 90^\circ - \tan^{-1}(2\zeta v_p' / (1 - v_p'^2)) + 180^\circ \dots \dots \dots (5.5) \\
 &(\text{但, } v_p' = w_p' / w_n, \quad w_p'; \text{ gain-crossover frequency})
 \end{aligned}$$

Fig. 5-8에서 살펴 보면 $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$ 인 系統에 對해 制限條件이 各各 Fig. 3-5에서와 같이 주어졌을 때 이러한 制限條件을 滿足하는 範圍인 $K_P=3.16\sim3.93$ 에서 $P_M=51.63^\circ\sim48.25^\circ$ 의 값을 取하게 되는데 이것은 制御系 設計時 特性明細로서의 P_M 값에 對해 充分히 滿足할 만한 結果이다.¹⁰⁾

勿論 위와 같은 系統에 對해 주어진 制限條件 下에서는 $K_P=3.93$, $T_i=2.75$ 의 값을 評價函數 J 값

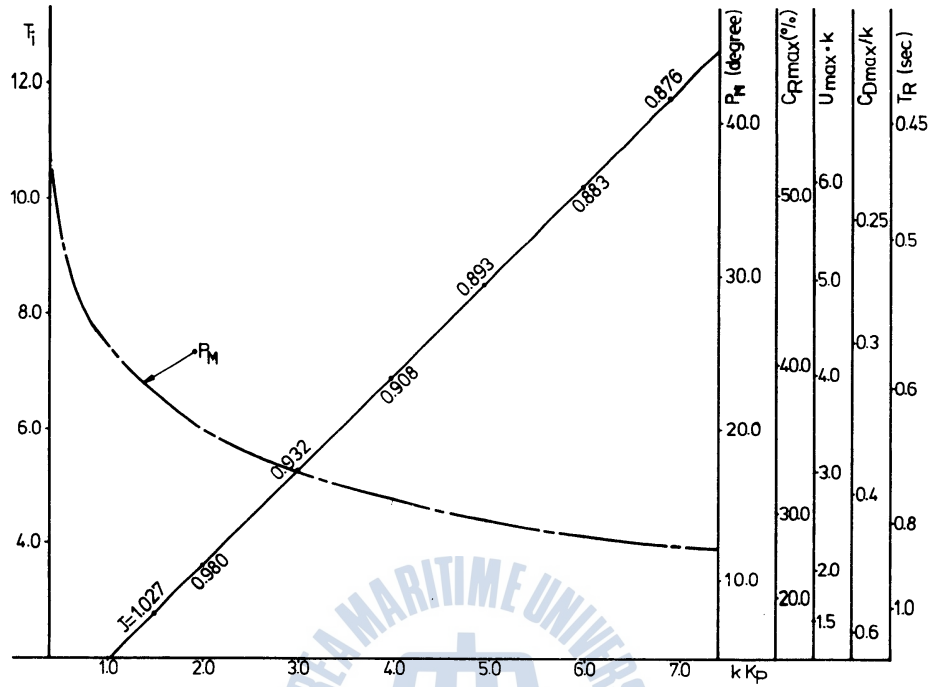


Fig. 5-6 kK_P-P_M curve and kK_P-T_i curve for $k=1.0$, $\zeta=0.3$, $w_n=1.0$

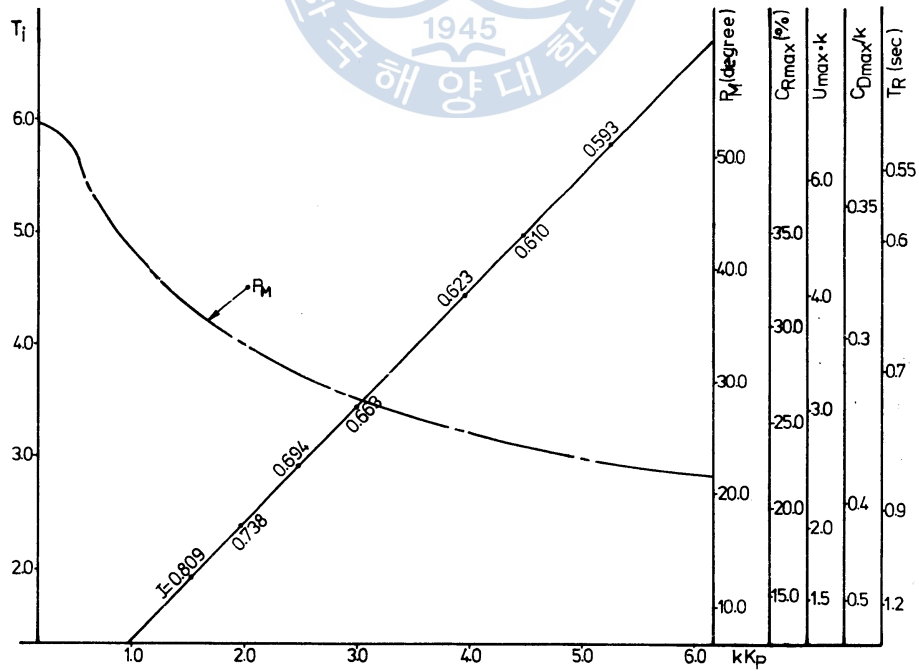


Fig. 5-7 kK_P-P_M curve and kK_P-T_i curve for $k=1.0$, $\zeta=0.5$, $w_n=1.0$

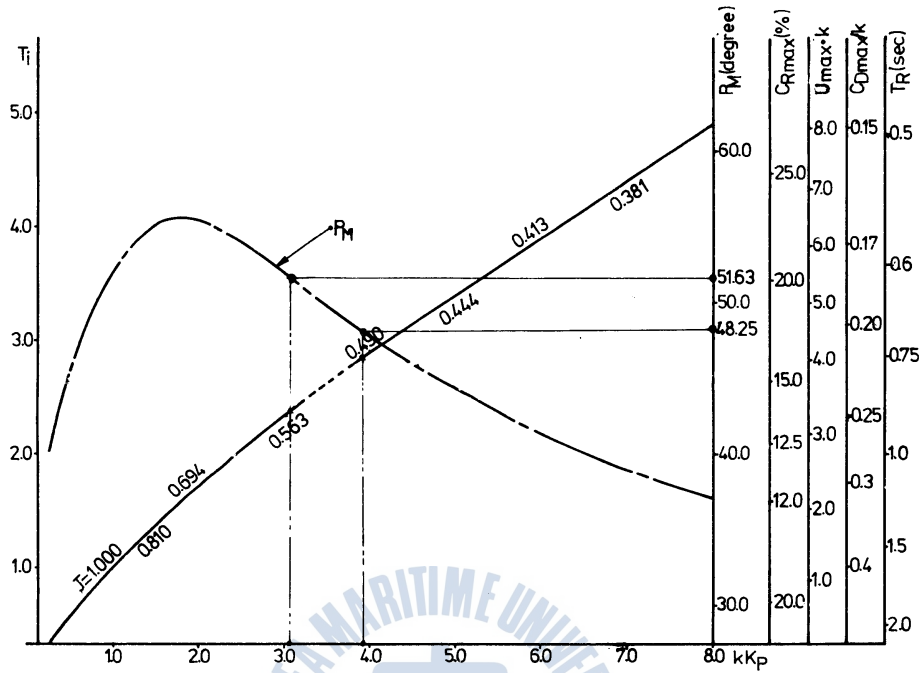


Fig. 5-8 kK_P-P_M curve and kK_P-T_i curve for $k=1.0$, $\zeta=1.0$, $w_n=1.0$

을 最少로 하는 最適퍼라미터로서 求했지만 萬若 制御系統의 特性設計에 있어서 이와 같은 M_P 值나 P_M 을 重要視한다면 Fig. 5-3~Fig. 5-8 을 利用하여 最適퍼라미터 設定에 對해 充分히 考慮할 수 있 으리라 생각되며 또한 境遇에 따라서는 보다 더 適切한 最適퍼라미터를 求할 수도 있겠다.

6. 結 論

以上과 같이 本 論文에서는 二次系統을 制御對象으로 하는 單位 피드백 制御系統에 있어서 PI 制御器를 使用할 時 주어진 制限條件을 滿足하면서 評價函數를 最少로 하는 K_P 와 T_i 값을 求하는 方法에 對해서 考察하고 數值計算을 通하여 플랜트의 퍼라미터와 制限值만 주어지면 制御器의 最適퍼라미터를 바로 求할 수 있는 圖表를 提示하였는 바, 本 圖表는 計測制御器製作者나 計裝關係 實務者에게 便利하게 利用될 것으로 期待된다.

本 方法에서는 河 等²⁾이 研究 發表한 制限條件이 없을 때의 K_P 의 最適值와 T_i 의 最適值와의 理論的 關係式이 그대로 利用될 수 있기 때문에 數值計算에 있어서 計算量과 計算時間을 相當히 節約 할 수 있으며 또한 Analog 計算機를 利用하여 應答實驗을 行한 結果로부터 本 方法의 妥當性을 確認할 수 있었다. 그리고 檢討面에 있어서는 制御系統의 周波數應答特性에 對해서도 充分히 檢討함 으으로써 보다 더 適切한 最適퍼라미터를 求하는 데 도움을 주고자 하였다.

그러나 本稿에서는 實際의 플랜트를 통한 實驗을 行하지 못한 點이 아쉬우며 本稿에서 行하지 못 한 二次系統 以外の 플랜트와 PID 制御器에 對한 考察은 앞으로의 課題가 될 것이다.

參 考 文 獻

1. 河注植·柳吉洙; PID 制御器의 最適調整에 關한 研究, 韓國海洋大學 論文集, Vol.2(1979).
2. 河注植·陳康奎; 2 次系の 制御對象에 對한 PI 制御器의 最適調整에 關한 研究, 韓國海洋大學 論文集, Vol.16, pp.209~236(1981).
3. Chestnut, H., and R. W. Mayer; Servo mechanisms and Regulating system design, 2nd. ed., Vol.1, Wiley, N. Y. (1959).
4. Guillemin, E. A.; The mathematics of circuit Analysis, Wiley, N. Y. (1949).
5. Truxal, J. G.; Automatic feed back control system synthesis, McGraw-Hill, N. Y. (1955).
6. Savant, C. J., Jr.; Basic feed back control system design, McGraw-Hill, N. Y. (1960).
7. John, J. D'Azzo and C. H. Houpis; Linear control system Analysis and design, McGraw-Hill, Kingsport, pp.494~550(1975).
8. B. J. Kuo; Automatic control system, 4th. ED., Prentice-Hall Inc., Eaglewood cliffs., N. J. pp.308~372(1982).
9. 河注植; 自動制御工學, 韓國海洋大學 海軍圖書出版部, 釜山: pp.233~330(1974).
10. 前掲書 9.
11. K. A. Afiminal; optimum design of control system compensators Trans. ASME, Vol.100, pp.140~151 (1978).
12. Brice Carnaham, H. A. Lutter and James. O, Wilkes; Applied numerical method, John wiley & sons, Inc., N. Y., pp.361~366(1969).
13. James, A. Cadzow and Hinrich R. Martens; Discrete-Time and computer control system, Prentice-Hall, Inc., N. Y., pp.187~190(1970).
14. Nims, P. T.; Some Design criteria for Automatic controls, Trans. AIEE, Vol.70(1951).
15. Andrew, P. sage and chelsea C. white, III; optimum systems control, Prentice-Hall, Inc., N. J., pp.87~103(1977).
16. W. A. Wolovich; Linear multivariable system; Springer-Verlag, N. Y. pp.77~95(1974).
17. Ziegler, J. G. and Nichols, N. B.; optimum. settings for automatic controllers, Trans. ASME, Vol.64. No.8. pp.759~768(1942).

