W-商空間과 W-Cartesian積空間에 對한 研究

金　章　郁

A Study on W-quotient Space and W-Cartesian product Space

by *Chang Wook Kim*

目　次

Abstract

In this paper, the strongest topology which makes projective mapping weakly continuous has been projected from X to R/X and R/X of this result is defined as W-quotient spaces. For these spaces the theories and lemma have been specially emphasized.

Each Cartesian product space $\Pi\{X_a : a \epsilon A\}$ in the topological spaces has been expressed as cartesian product space $\Pi\{X_a : a \epsilon A\}$ where the projective mapping has been added to set $\Pi\{X_a : a \epsilon A\}$. And this conclusion is defined as W-Cartesian

I. 序　論

本論文에서는 位相空間 X에서 商空間 X/R에 로의 射影寫像을 weakly continuous하게 하는 가장 강한 位相을 X/R에 주어 이것을 W-商空間이라 定義하고, 이에 따른 補助定理와 定理를

明示하였고, 位相空間族 $\{X_a : a \in A\}$의 cartesian 積空間 $\Pi\{X_a : a \in A\}$에 各 射影寫像들을 weakly continuous되게 하는 가장 약한 位相을 集合 $\Pi\{X_a : a \in A\}$에 주어 이것을 W-cartesian 積空間이라 定義하어 이에 따른 다른 空間과의 關係에 對한 定理를 明示하는 것을 研究의 目的으로 하였다.

2. 定義와 기수법

定義 2-1 位相空間 X에서, 이 集合 X에 同値關係 R이 주어졌고 商集合 X/R에 射影寫像 P_x를 W-連續되게 하는 X/R의 位相중 가장 强한 位相을 X/R에 주었을 때 X/R을 W-商空間이라 한다.

定義 2-2 주어진 位相空間들의族 $\{X_a : a \in A\}$에서 cartesian積集合 $X=\Pi\{X_a : a \in A\}$에 各 射影寫像들을 W-連續되게 하는 가장 弱한 位相을 주어 $X=\Pi\{X_a : a \in A\}$을 W-積空間이라 한다.

註 1. 寫像 $f:X\to Y$에서 X의 任意의 元素 x와 $f(x)$의 任意의 近傍 V에 對하여 $f(U)\subset(\overline{V})^\circ$가 되는 x의 近傍 U가 存在할때 이 寫像 $f:X\to Y$는 a—連續이라 한다. 〔1〕
여기서 近傍이라는 말을 開近傍으로 바꾸어 놓아도 마찬가지이다.

註 2. 寫像 $f:X\to Y$는 X의 한 元素 x와 $f(x)$의 任意의 近傍 V에 對하여, $f(\overline{U})\subset\overline{V}$가 되는 x의 近傍U가 存在할 때, 이 寫像 $f:X\to Y$는 θ—連續 이라고 한다. 〔1〕
近傍이라는 말을 開近傍이라고 바꾸어 말해도 一般性을 잃지 않는다.

註 3. 寫像 $f:X\to Y$에서 任意의 한點 $x\in X$와 $f(x)$의 任意의 近傍V에 對하여 $f(U)\subset\overline{V}$가 되는 x의 近傍U가 存在할 때 이 寫像 $f:X\to Y$를 W—連續이라 한다. 〔4〕
近傍이라는 말을 開近傍이라고 말해도 一般性은 잃지 않는다.

註 4. 寫像 $f:X\to Y$(X와 Y는 位相空間들)가 連結寫像이라는 것은 任意의 連給集合 $c\subset X$를 連結集合 $f(c)\subset Y$로 보내는 寫像을 말한다.

註 5. R과 S가 各各 X와 Y의 同値關係이고, aRa'이면 $f(a)Sf(a')$일때 寫像 $f:X\to Y$는 關係를 保存한다고 한다.

註 6. 任意의 서로 다른 두點 $x, y\in X$에 對하여 各各 開近傍 U, V가 存在하여 $\overline{U}\cap\overline{V}=\phi$가 되는 位相이 X에 주어 졌을때, X를 Urysohn 空間이라 한다. 〔2〕

註 7. 寫像 f가 連續이면 a—連續이고, a—連續이면 W—連續이다.
이 關係들은 一般的으로 가역적이 될 수 없다.

註 8. $\overline{V}$는 V의 閉包를 意味하고 V°는 V의 內點 全體의 集合을 意味한다. 〔2〕

3. 補助定理

補助定理 3-1 寫像 $f:X\to Y$가 W—連續이면 모든 開集合 $V\subset Y$에 對하여 $\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(\overline{V})$

이다. 〔4〕

證明 만약 $x\in f^{-1}(V)-f^{-1}(\bar{V})$인 x가 存在한다고 假定하면 $f(x)\notin\bar{V}$이다. 그러므로 $W\cap V=\phi$인 $f(x)$를 포함하는 開集合 W가 存在함을 알 수 있다. V는 開集合이므로 $V\subset\bar{W}=\phi$이다. 寫像 f는 W—連續이므로 $f(U)\subset\bar{W}$인 x를 包含하는 X의 開部分集合 U가 存在한다. 그러므로 $f(U)\cap V=\phi$이다.

한편 $x\in\overline{f^{-1}(V)}$이므로 $U\cap f^{-1}(V)\neq\phi$이고, 따라서 $f(U)\cap V=\phi$이다. 이것은 모순이다. 卽, $\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(\bar{V})$이어야 한다.

補助定理 3-2 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 α—連續이면 모든 開集合 $V\subset Y$에 對하여 $\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(\bar{V})$가 된다.

證明 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 α—連續이면 註 1에서 보인 바와 같이 W—連續이므로 補助定理 3-1에서 明白하다.

補助定理 3-3 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 α—連續이면 θ—連續이다.

證明 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 α—連續이므로, 任意 X의 한元素 x와 $f(x)$의 任意의 開近傍 V에 對하여 $f(U)\subset(\bar{V})^{\circ}$가 되는 x의 開近傍 U가 存在한다. 卽 $U\subset f^{-1}((\bar{V})^{\circ})$이다.

양쪽에 閉包를 取하면 $\bar{U}\subset\overline{f^{-1}((\bar{V})^{\circ})}$이다. 補助定理 3-2에 依하여 寫像 $f:X\rightarrow Y$는 α—連續이므로 $\bar{U}\subset\overline{f^{-1}((\bar{V})^{\circ})}\subset f^{-1}(\overline{(\bar{V})^{\circ}})\subset f^{-1}(\bar{V})$이다. 卽 $f(\bar{U})\subset\bar{V}$이다. 그러므로 $f:X\rightarrow Y$는 θ—連續이다.

여기서 θ—連續이면 W—連續인 것은 明白하므로 寫像 f가 連續이면 α—連續이고, α—連續이면 θ—連續이고, θ—連續이면 W—連續인 것을 알 수 있다.

補助定理 3-4 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 W—連續이고 寫像 $g:Y\rightarrow Z$가 θ—連續이면 寫像 $g\circ f:X\rightarrow Z$는 W—連續이다.

證明. X의 任意의 元素 x와 $(g\circ f)(x)$의 任意의 開近傍 $W\subset Z$에 對하여 寫像 $g:Y\rightarrow Z$가 θ—連續이므로 $g(\bar{V})\subset\bar{W}$인 $f(x)$의 開近傍 V가 存在한다. 한편 $f(x)$의 開近傍 V에 對하여 寫像 $f:X\rightarrow Y$는 W—連續이므로 $f(U)\subset\bar{V}$인 x의 開近傍 U가 存在한다. 그러므로 $g(f(U))\subset g(\bar{V})\subset\bar{W}$이다. 이것은 $g\circ f$가 W—連續임을 말한다.

補助定理 3-5 寫像 $f:X\rightarrow Y$가 W—連續인 위에의 開寫像이고, 寫像 $g:Y\rightarrow Z$는 $g\circ f:X\rightarrow Z$을 W—連續이 되게 하는 寫像일때 寫像 $g:Y\rightarrow Z$는 W—連續이다.

證明 Y의 任意의 한 元素 y에 對하여 $g(y)$의 任意의 開近傍을 W라하자 寫像 f는 위에의 寫像이므로 $y=f(x)$가 되는 X의 한 元素 x가 存在한다. $(g\circ f)(x)=g(y)$이므로 W는 $(g\circ f)(x)$의 開近傍이다. $(g\circ f)$는 W—連續이므로 $x\in X$의 하나의 開近傍 U가 存在하여 $g\circ f(U)\subset\bar{W}$가 된다. $f(U)$는 $f:X\rightarrow Y$가 開寫像이므로 開集合이고 $y=f(x)$를 포함하므로 y의 開近傍이 된다. $f(U)\equiv V$라고 놓으면 $g(V)\subset\bar{W}$이므로 g는 W—連續이다.

補助定理 3-6 R, S를 各各 集合X와 集合 Y에 주어진 同値關係라 하고 $P_x: X\to X/R$, $P_y: Y\to Y/S$를 射影寫像이라 하자 이때 寫像 $f: X\to Y$가 關係를 保存하는 寫像이면 다음 그림을 commute하게 하는 (即 $P_y\circ f=f_*\circ P_x$) 寫像 $f_*: X/R\to Y/S$가 단 하나 存在 한다. 逆으로 만약 두 寫像 f, f_*가 $P_y\circ f=f_*\circ P_x$를 만족하면 寫像 $f: X\to Y$는 關係를 保存한다. [3]

그래서 우리는 $f_*: X/R\to Y/S$를 $f: X\to Y$에 의하여 誘導된 寫像이라 부른다.

補助定理 3-7 開寫像 $f: X\to Y$가 W—連續이면 이 寫像 $f: X\to Y$는 a—連續이다. [1]

證明 : X의 任意의 元素를 x라하고 $f(x)$의 任意의 近傍을 V라 하자, $f: X\to Y$는 W—連續이므로 $f(U)\subset V$인 x의 開近傍 U가 存在한다.

한편 寫像 $f: X\to Y$가 開寫像이므로 $f(U)$는 開集合이다. 그러므로 $f(U)\subset(\bar{V})^{\circ}$이고 따라서 $f: X\to Y$는 a—連續이다.

補助定理 3-8 寫像$f: X\to Y$가 W-連續寫像이기 위한 必要充分 條件은 任意의 開集合 $V\subset Y$에 對하여 $f^{-1}(V)\subset(f^{-1}(\bar{V}))^{\circ}$이다. [4]

4. W—商空間

定理 I 寫像 $f: X\to Y$는 關係를 保存하는 W—連續寫像이고 商集合 X/R과 Y/S는 開射影寫像 $P_x: X\to X/R$과 $P_y: Y\to Y/S$를 W—連續으로 만드는 가장 强한 位相이 주어진 W—商空間들이라고 하자. 그러면 다음 그림

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P_x"'] & Y \arrow[d, "P_y"] \\ X/R \arrow[r, "f_*"] & Y/S \end{tikzcd}$$

에서 寫像 $f_*: X/R\to Y/S$는 W—連續이다.

證明 : 寫像 $f: X\to Y$가 關係를 保存하므로 補助定理 3-6에 依하여 $f_*\circ P_x=P_y\circ f$임을 알 수 있다. 開射影寫像 $P_y: Y\to Y/S$는 W—連續이므로 θ—連續이다.

그러므로 寫像 $P_y\circ f: X\to Y/S$는 補助定理 3-4에 依하여 W—連續이다. 即 $f_*\circ P_x: X\to Y/S$가 W—連續이다.

한편 補助定理 3·5에 의하여 $f_*: X/R\to Y/S$는 W—連續이다.

定理 II 連結空間 X의 W—商空間 X/R은 連結空間이다.

證明 : W—商空間 X/R이 連結空間이 아니라고 가정하자, 그러면 W—商空間 X/R속에 空아닌 開集合 V_1과 V_2가 存在하여 $V_1\cap V_2=\phi$이고 $V_1\cup V_2=X/R$이다. 여기서 $P_x^{-1}(V_1)\cap P_x^{-1}(V_2)=\phi$이고 $P_x^{-1}(V_1)\cup P_x^{-1}(V_2)=X$가 된다.

P_x가 위에의 寫像이므로 $P_x^{-1}(V_1)\neq\phi$이고 $P_x^{-1}(V_2)\neq\phi$이다.

P_x가 W—連續이므로 補助定理 3-8에 의하여 $P_x^{-1}(V_1)\subset(P_x^{-1}(\overline{V}_1))^\circ$이고 $P_x^{-1}(V_2)\subset(P_x^{-1}(\overline{V}_2))^\circ$ 이다.

集合 V_1과 V_2는 開集合인 同時에 閉集合 이므로 $P_x^{-1}(V_1)\subset(P_x^{-1}(\overline{V}_1))^\circ=(P_x^{-1}(V_1))^\circ$ $P_x^{-1}(V_2)\subset(P_x^{-1}(\overline{V}_2))^\circ=(P_x^{-1}(V_2))^\circ$이다.

即 $P_x^{-1}(V_1)$과 $P_x^{-1}(V_2)$는 開集合이다.

이것은 X가 連結空間이 아니라는 것을 意味한다.

그러므로 모순이다.

即 W—商空間 X/R이 連結空間이라는 것을 말한다.

5. W-Cartesian 積空間

定理 Ⅲ 모든 $a\in A$에 對하여 X_a가 Urysohn 空間일때 이들에 의하여 生成된 W-Cartesian 積空間은 Hausdorff 空間이다.

證明 : 任意의 서로 다른點 $x,y\in\prod_{a\in A}x_a$에 對하여 $P_a(x)\neq P_a(y)$가 되는 P_a가 存在한다.

X_a가 Urysohn空間이므로 X_a속에 開近傍U, V가 存在하여 $P_a(x)\in U, P_a(y)\in V$이고 $\overline{U}\cap\overline{V}=\phi$이 되어야 한다. 여기서 $(P_a^{-1}(\overline{U}))^\circ\cap(P_a^{-1}(\overline{V}))^\circ=\phi$이다. P_a는 W—連續射影寫像이므로 補助定理 3-8에 의하여 $x\in P_a^{-1}(U)\subset(P_a^{-1}(\overline{V}))^\circ$ $y\in P_a^{-1}(V)\subset(P_a^{-1}(\overline{V}))^\circ$이어야 한다. 이것은 W-Cartesian 積空間 $\prod_{a\in A}x_a$가 Hausdorff空間임을 말한다.

定理 Ⅳ 모든 $a\in A$에 對하여 X_a가 Hausdorff空間일때, 이들의 W-Cartesian積空間 $\prod_{a\in A}x_a$에서 各 X_a들은 閉集合이다.

證明 : 任意의 $a\in A$에 對하여 X_a가 W-Cartesian積空間 $\prod_{a\in A}x_a$에서 閉集合이 아니라고 가정하자.

그러면 한점 $x\in X_a-X_a$가 存在하여 $P_a(x)\neq x$가 되어야 한다. X_a는 Hausdorff空間이므로 $x\in U$, $P_a(x)\in V$이고 $U\cup V=\phi$인 開集合 U, V가 存在한다. x를 품는 X_a의 任意의 開集合을 W라 하자. 그러면 $U\cap W$는 x를 품는 開近傍이고 따라서 $x\in\overline{X}_a$이므로 $(U\cap W)\cap X_a\neq\phi$ 이어야 한다. 그러므로 $U\cap W\cap X_a$ 속에 어떤點 y가 存在해야 할 것이다.

$y\in X_a$, $P_a(y)=y\in U$이므로 $P_a(y)\notin V$이다. 이것은 $P_a(W)\not\subset\overline{V}$임을 意味하므로 P_a가 W—連續이라는 것에 모순이다. 그러므로 X_a는 W-Cartesian積空間 $\prod_{a\in A}x_a$에서 閉集合이다.

定理 Ⅴ 모든 $a\in A$에 對하여 각X_a들이 Urysohn空間이고 射影寫像 P_a들에 의하여 生成된 W-Cartesian積空間 $\prod_{a\in A}x_a$ 가 Compact空間이면 各 射影寫像 P_a들은 閉寫像이다.

證明 : 集合 F를 Compact인 W-Cartesian積空間 $\prod_{a\in A}x_a$의 任意의 閉部分集合이라 하자. 그리면

集合 F는 Compact 部分集合이 되고, 모든 射影寫像 P_a는 W—連續이므로 $P_a(F)$는 almost Compact가 되어야 한다. 各 X_a들은 Urysohn空間이므로, Hausdorff空間이고, $P_a(F)$는 Hausdorff 空間 X_a의 Compact部分空間이므로, 閉集合이 되어야 한다. 이것은 P_a들이 閉寫像인 것을 意味한다.

따름 定理 Ⅵ 모든 $a \epsilon A$에 對하여 각 X_a들이 Urysohn空間이고 a-連續인 射影寫像 P_a들에 의하여 생성된 a-cartsian積空間 $\prod_{a \epsilon A} X_a$가 Compact이면 각 사영 사상 P_a들은 閉寫像들이다.

定理 Ⅶ Y를 Urysohn空間이라하고 $\Pi\{Y: a \epsilon A\}$를 各 射影寫像 P_a들을 W—連續되게 하는 W-Cartesian積空間이라고 하면

$\Delta = \{x \epsilon \prod_{a \epsilon A} Y$: 모든 A의 짝의 元素 a, a'들에 對하여 $P_a(x) = P_a'(x)\}$

은 W-Cartesian積空間 $\Pi\{Y: a \epsilon A\}$에서 閉集合이다.

證明 : $\Pi\{Y: a \epsilon A\} - \Delta$의 任意의 元素를 x라고 가정하면 첨수집합 A의 어떤 두 元素 a, b에 對하여 $P_a(x) \neq P_b(x)$가 되어야 한다.

Y가 Urysohn空間이므로, $P_a(x) \epsilon U, P_b(x) \epsilon V$이고 $\bar{U} \cap \bar{V} = \phi$인 開集合 U, V가 Y에 存在한다. 射影寫像 P_a와 P_b는 W—連續이므로 補助定理 3-8에 의하여

$x \epsilon P_a^{-1}(U) \subset (P_a^{-1}(\bar{U}))^\circ$이고 $x \epsilon P_a^{-1}(V) \subset (P_a^{-1}(\bar{V}))^\circ$이다.

$G = (P_a^{-1}(\bar{U}))^\circ \cap (P_a^{-1}(\bar{V}))^\circ$라고 놓으면 G는 開集合이고,

$\bar{U} \cap \bar{V} = \phi$이므로 $x \epsilon G \subset \Pi\{X: a \epsilon A\} - \Delta$이다.

그러므로 x는 $\Pi\{Y: a \epsilon A\} - \Delta$의 內點이므로 集合$\Pi\{Y: a \epsilon A\} - \Delta$는 $\Pi\{Y: a \epsilon A\}$의 開部分集合이다. 따라서 Δ는 $\Pi\{Y: a \epsilon A\}$의 閉部分集合이다.

6. 結　論

W—商空間과 W—Cartesian積空間에서 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(1) 同値關係 R, S가 各各 주어진 두 位相空間 X, Y에서 $f: X \to Y$를 關係를 保存하는 weakly continuous인 寫像이라 하고 開寫像 P_x, P_y에 對한 W—商空間을 $X/R, Y/S$라 할때, f에 의하여 誘導된寫像 $f^*: X/R \to Y/S$는 weakly continuous 이다.

(2) 連結空間의 W—商空間은 連結空間이다.

(3) Urysohn 空間들의 W-Cartesian 積空間은 Hausdorff空間이다.

(4) Urysohn空間들의 W-Cartesian 積空間에서 各各의 Urysohn空間들은 閉集合이다.

(5) 同一한 Uryshon空間들의 W-Cartesian積空間의 對角線들은 閉集合이다.

(6) Urysohn空間들의 W-Cartesian積空間이 Compact이면 各射影寫像들은 閉寫像이다.

7. 참고 문헌

〔1〕 M. K. Singal and A. R. Singal, Almost Continuous mapping. Yokohama Math. J Vol. XVI 63-73 (1968)

〔2〕 John. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand Princ N, J

〔3〕 James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, INC, Boston

〔4〕 N. Levine, A Decomposition of Continuity in Topology spaces, Amer. Math. Monthly 68 (1961)44-46

〔5〕 岩波書店, 數學辭典