Locally nonexpansive의 不動点定理에 對한 研究

金　　章　　郁

A fixed point theorem for Locally nonexpansive mappings

Kim Chang Wook

目　次

Abstract

If K is a nonempty, bounded, closed and convex subset of a reflexive Banach space, and if K possesses "normal structure", than every nonexpansive mapping T of K into K has a fixed point. This result, also proved independently by $F. E.$ Browder and $D.$ Göhde. In this paper, putting the necessary definition and Lemma to a fixed point theorem, the author tried to explain a fixed point theorem for locally nonexpansive mapping in Banach space and to expand the above theorem and furthermore that of Hilbert space.

Ⅰ. 緖　　論

K는 Banach space B의 nonempty, bounded, closed, convex subset이고, K는 normal stucture이면 K에 關한 모든 nonexpansive mapping T는 K의 안으로 fixed point를 갖는다. 이 結果는 $F. E.$ Browder 와 $D.$ Göhde에 의해서 獨立的으로 證明되었다.

本論文에서는 다음의 定理를 考察하려한다.

i) B는 Banach space이고, K는 B의 weakly compact의 convex set이라 둘때

$T: K \to K$이 locally nonexpansive mapping이면 T는 K안에서 fixed point를 갖는다.

ii) X는 reflexive Banach space이고, X안의 closed convex set H에 關한 空이 아닌 有界인 closed convex subset K를 둘때

$T: K \to H$이 locally nonexpansive이고,

$T: \partial_H K \to K$이면, T는 K안에서 fixed point를 갖는다.

iii) H는 Hilbert space이고, K는 有界인 closed convexset이라 둘때

$T: K\to H$이 locally nonexpansive mapping이면, $\|Tx_o-x_o\|=\min_{y\epsilon k}\|Tx_o-y\|$ 이되는 $x_o\epsilon k$가 存在한다.

Ⅱ. 定義와 補助定理

$\delta(A)$는 A의 diameter를 表示한다.

即 $\delta(A)=\sup\{\|x-y\| : x,y\epsilon A\}$

H와 K는 Banach space B의 subset이고

H는 bounded이다

$r_x(H)=\sup\{\|x-y\| : y\epsilon H\}$

$r(H,K)=\inf\{r_x(H) : x\epsilon k\}$

$c(H,K)=\{x\epsilon k: r_x(H)=r(H,k)\}$

Banach space B의 convex set x가 normal structure를 갖는다는 것은 X의 두점이상 포함하는 任意의 有界인 convex set H가 $r_x(H)<\delta(H)$이 되는点 $x\epsilon H$를 包含할때를 말한다.

$\cup(z;r)$는 반경 $r>0$에 對한 Z의 spherical neighborhood를 表示한다.

$\cup(z;r)=\{x\epsilon X: \|z-x\|<r\}$

같은 방법으로

$\overline{\cup}(z;r)=\{x\epsilon X: \|x-x\|\leq r\}$

Def X이 Banach space B의 nonempty subset이라 하자. $T:X\to X$이 X에서 모든 $x.y$에 對하여 $\|Tx-Ty\|\leq K\|x-y\|$인 常數 $K=1$이면 nonexpansive이라한다.

Def X이 Banach space X의 nonempty subset이라 하자. $T:X\to X$이 X에서 모든 $x.y$에 對하여 $\|Tx-Ty\|\leq K\|x-y\|$인 常數 $0<K<1$이면 contraction이라 한다.

分明하게 nonexpansive mapping은 proper subset class으로써 모든 contraction mapping에 包含한다. 그리고 이들은 모든 연속사상의 collection의 proper subclass형으로 이룬다.

Lemma K를 Banach space B의 weakly compact인 convex set이라 할때 $C(K)$는 空이 아닌 closed convex set이다.

證明 $x\epsilon k$와 自然數 n에 對하여

$$F(x.n)=\{y\epsilon k: \|x-y\|\leq r(k)+\frac{1}{n}\}$$

이라 한다. 이때 $C_n=\bigcap_{x\in k}F(x.n)$은 空이 아닌 closed convex set이다.

$C_n\supset C_{n+1}$ $(n=1,2,)$이다.

지금 K의 weakly compact性의 使用으로 $\bigcap_n C_n\neq\phi$이 알수있다.

역시 $C(K)=\bigcap_n C_n$은 명확하다.

Lemma K를 normal structure를 갖는 weakly compact의 convex set이라 한다.

이때 $\delta[c(k)]<\delta(k)$이다.

證明 K는 normal structure를 갖게되고 $z.w\epsilon(k)$이라 할때

$\|z-w\|\leq r_z(k)<\delta(k)$

이므로

$\delta[c(k)]=\sup\{\|z-w\|;z.w\epsilon c(k)\}\leq r(k)\leq r_z(k)<\delta(k)$

Ⅲ. 不動点定理

定理 3·1 〔8〕X는 Banach space이고, C는 X의 compact convex subset이라 두자.

T: $C \to C$이 nonexpansive mapping이면 T는 C안에서 fixed point를 갖는다.

系 3·2 B는 Banach space이고, K는 B의 weakly compact의 convexset이라 말하고, normal structure를 갖는다고 한다.

T: $K \to K$이 locally nonexpansive mapping이면 T는 K안에서 fixed point를 갖는다.

證明, $\rho = \{X_\alpha\}$를 $TX_\alpha \subset X_\alpha$에서 찾아내는 K에 있어서의 空이 아닌 closed convex set X_α의 族이 입증된다.

Zorn의 補題를 利用하여 ρ의 minimal set X의 存在를 알게된다. 이 集合X가 1点인 것을 밝힌다. 혹은 X가 2点 이상을 包含한다고하자.

X는 weakly compact인 convex set이므로 $c(X) \neq \phi$이다.

$x \epsilon c(X)$에 對하여, 任意의 $y \epsilon X$를 取하면 $\| Tx - Ty \| \leqq \| x - y \| \leqq r_x(X) = r(X)$로 부터 $T(X) \subset \{ y \epsilon B : \| Tx - y \| \leqq r(X) \} = s$이다.

다시 $T(X \cap s) \subset X \cap s$이다.

K는 ρ의 minimal 集合이므로, $X \subset s$를 갖는다. 여기서 $Tx \epsilon c(X)$를 밝힌다.

$X \subset s$이고, $\gamma_{Tx}(X) \leqq \gamma(X)$이다

정의에 의하여 $\gamma(X) \leqq \gamma_{Tx}(X)$이므로

$\gamma_{Tx}(X) = \gamma(X)$가 된다.

$Tx \ \epsilon c(X)$를 얻는다.

그리고 X가 2点이상 包含한다고하면

ρ의 중에 X보다 完全히 작은 $c(X)$가 存在한다. X의 mnimal性에 反한다.

그러므로 X는 1点이다. 이 点이 T의 不動点이다.

X의 subset H와 K에 對하여, $\partial_H k$는 H에 關聯하는 K의 boundary를 表示한다.

$H - K$는 K안에 없는 H의 point를 表示한다. K이 closed이면

$\partial_H k = \{ z \epsilon k : \cup(z;r) \cap (H-K) \neq \phi \ r > 0 \}$

定理3·3 X는 reflexive Banach space이고, X안의 closed convexset H에 關한 空이 아닌 有界인 closed convex subset K는 normal structure이라 두자.

T: $K \to H$이 locally nonexpansive이고

T: $\partial_H K \to K$이면

T는 K안에서 fixed point를 갖는다.

위의 증명은 곧 $H = K$를 주어 〔1〕의 정리로 만든다. 이 정리의 더욱 재미 있는 결론은 $H = X$를 주므로써 일어난다.

證明 B는 H의 모든 closed convex subset의 族이고, $R \epsilon B$, $R \cap K \neq \phi$

T: $R \cap K \to R$이라하자.

그래서 $H \epsilon B$, $B \neq \phi$

$\{R_\alpha\}$는 B에 關한 집합의 descending chain 이고, $R = \cap_\alpha R_\alpha$이라 하자.

$R \cap K$는 nonempty이고, 집합 $R_\alpha \cap K$의 모든 것은 X의 nonempty weakly compact subset이된다.

역시 모든 α에 對하여

T: $R_\alpha \cap K \to R_\alpha$이된다.

明白히 T: $R \cap K \to R$

R는 closed이고, convex이니까,

$R\epsilon B$, 그리고 zorn의 補題에서 B는 minimal element를 갖는다.

R는 B의 minimal element이라 하면 최초에 $\partial_R K \neq \phi$를 정한다.

다른 式으로 $R \subset K$와 T: $R \cap K \to R$는 T: $R \to R$으로 包含한다.

지금 $\rho(R \cap K) > 0$ 이라하고 그 모순을 얻는다.

$\rho = \rho(R \cap K)$이라 하고 K는 normal structure를 갖이니까 点 $C \epsilon R \cap K$이 존재하고

$sup\{\|c-Z\| : Z \epsilon R \cap K\} = r > \rho$

$C = \{x \epsilon X: R \cap K \subset \overline{U}(x;r)\}$이라 두자. C는 closed이고 convex임이 쉽게 알 수 있고, 그래서 $C \epsilon R \cap C$, $(R \cap C) \cap K \neq \phi$이 된다. 역시 点 $xy \epsilon R \cap K$이 存在하니 $\|x-y\| > r$, 그래서 点은 C의 element가 될 수 없다. 그러므로 $R \cap C$는 R의 proper subset이다.

$R \cap C \epsilon B$를 관찰 함으로써 증명이 완성된다. 그러니까 이미 $(R \cap C) \cap K \neq \phi$임을 알았다.

$T:(R \cap C) \cap K \to R \cap C$인 것을 알 필요가 있다.

$z \epsilon (R \cap C) \cap K$이면

$W = \overline{U}(Tz;r) \cap R$이라 두자.

$W \epsilon B$이면, $W \subset R$, R는 minimal이니까

$W = R$ 이는 $R \cap K \subset R \subset \overline{U}(Tz;r)$에 包含한다. 여기서 $Tz \epsilon C$ 그러니까.

T: $R \cap K \to R$

서로 交代하여 산출하면 $T_z \epsilon R \cap C$

그러므로 모든 $z \epsilon (R \cap C) \cap K$에 대하여

$W \epsilon B$이면 $T:(R \cap C) \cap K \to R \cap C$

이것이 理由가 되는 것을 관찰하므로써 증명이 완성된다.

첫째 $x \epsilon W \cap K$이면 $x \epsilon R \cap K$는

$\|x-z\| \leqq r$ $(Z \epsilon C)$

여기서 $\|Tx - Tz\| \leqq r$, $Tx \epsilon \overline{U}(Tz;r)$

그러나 $x \epsilon W \cap K$ 역시 $x \epsilon R \cap K$에 포함한다. 그리고 여기서 $Tx \epsilon R$

그러므로 $Tx \epsilon \overline{U}(Tz;r) \cap R = W$,

即 T: $W \cap K \to W$

결국 $\partial_R k \neq \phi$이니까. 그것은 $W \cap K \neq \phi$에 따른다. 이를 보기 위하여,

$y \epsilon \partial_R k$이면 $y \epsilon R \cap K$이고 $\|y-z\| \leqq r$

으로 된다. 이는 $\|Ty - Tz\| \leqq r$으로 포함하고, 그러므로 $Ty \epsilon W$이다.

그러나 역시 $\partial_R k \subset \partial_H k$는 $Ty \epsilon k$에 包含한다 여기서 부터 $Ty \epsilon W \cap K$, $W \cap K \neq \phi$이는 逆으로 $\rho(R \cap C) > 0$를 가정하면 $R \cap C \epsilon B$인 것을 完成한다.

그러므로 single point를 構成하는

$\rho(R \cap C) = 0$, $R \cap C$는 $T: \partial_R K \to K$

이므로 T아래에 fixed이다.

Schauder의 不動点定理에서 다음의 定理를 列擧하기로 한다.

定理 3·4 B는 Banach space이고, X를 compact convex set이라 하자.

$T: X \to B$이 연속사상이면

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x \epsilon X} \|x - Tx_0\|$$

이 되는 $x_0 \epsilon X$가 存在한다.

系 3·5 H는 Hilbert space이고, K는 有界인 closed convex set이라 두자.

T; $K \to H$이 locally nonexpansive mapping이면

$$\| Tx_o - x_o \| = \min_{y \epsilon k} \| Tx_o - y \|$$

證明 $x \epsilon H$에 對하여 $\| z - x \| = \min_{y \epsilon k} \| y - x \|$이 되는点 $z \epsilon k$를 Px로 한다.

(存在하여, 一意인 것은 明白), Px는 nonexpansive인 사상이다. 여기서 K에서 K으로의 사상 PT는 nonexpansive가 된다. 系 3·2를 利用하여 $x_o = PTx_o$이되는点 $x_o \epsilon k$이 존재한다.

여기서 点 x_o이 $\| Tx_o - x_o \| = \min_{y \epsilon k} \| Tx_o - y \|$를 보여 주는 것은 明白하다.

Ⅳ. 結 論

T가 K로 부터 K으로의 locally nonexpansive mapping이면 系 3·2가 成立하며 T가 $T(\partial_H k) \subset K$ 되는 K로 부터 H에로의 사상일때 定理 3·3이 되는것이 明白하며, 系 3·2에서 Banach space가 Hilbert space인 경우 系 3·5으로 擴張되는 것이 明白하다.

참 고 문 헌

[1] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappigs which do not increase distances, Amer Math Monthly, 72 (1965), 1004—1006.

[2] W. A. Kirk, Fixed point theorems for nonlinear nonexpansive and generalized contraction mappings Pacific J. Math, 38(1971), 89—94.

[3] Y. Kijima—W. Takahashi, A fixed point theorem for nonexpansive mappings in metric space, Kōdai Math Sem Rep., 21 (1969), 326—330.

[4] H. V. Machado, Fixed point theorems for nonexpansive mappings in metric Spaces with normal Structure, A thesis for the doctorate, Chicago University(1971)

[5] W. Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mappings 1. Kōda Math. Sem. Rep., 22 (1970)

[6] F, E Browder, nonexpansive nonlinear operators in a Banach Space, Proc Nat. Acad. sci, 54 (1965), 1041—1044.

[7] R. P. Phelps, Convex sets and nearest Points, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), 790—797.

[8] W. G. Dotson, JR and W. R. Mann. The Schauder fixed point theorem for nonexpansive mappings,
The Amer. Math. Monthly Vol. 84, No. 5. May (1977) 363—364.

[9] S. H. RHEE. A NOTE ON PSEUDO contractive mappings, Bull. Korean Math. Soc. Vol. 14, No. 2, 1978. 85—88.