G. E. P. BOX의 尤度比分布와 S. S. Wilks의 尤度比分布 $-2\log\lambda$ 와의 比較

李 鍾 厚

Comparison of G. E. P. Box' Likelihood Criteria with S. S. Wilks'

By

Jonghoo Lee

Abstract

Suppose $M=-\log\lambda$ for the likelihood statistic λ, M and ρM $(0<\rho\leqq 1)$ have been found to be asymptotically distributed as χ^2. In this paper, we considered the following two criteria as the generalized tests, called by Box.

(1) The test for the independence of q sets of residuals, the lth set having k_l variates.

(2) The test of constancy of variance and covariance of q sets of k-variate samples.

We obtained probabilities of the asymptotic distributions of M(i. e. Wilks' asymptotic χ^2 distribution) and ρM (i. e. Box' asymptotic χ^2 distribution) by using the expression in "Theorem 2", taken up to γ_2 term.

The following properties were investigated on the above criteria;

a) the agreement of the series solution with the exact distributions,

b) the convergency of the series solution with the limit distributions,

c) the practical use of the test.

Throughout this paper, we assumed that the parent populations were distributed normally or multinormally.

目 次

1. 緖 論

多變量分布에 있어서 Neyman 및 Pearson (1928)의 尤度比方法은 많은 硏究家에 依하여 여러

가지 假說檢定을 하기 위한 適當한 有意基準(criteria)을 誘導하는데 使用되어 왔다. 그러나 Plackett(1946)의 말과 같이 假說檢定을 하는데 있어서 難點은 基準을 誘導해 내는데 있는 것이 아니고 오히려 그 假說이 眞일 때 正確한 分布를 찾아서 適合한 最適有意點域을 決定하는데 있다고 하겠다.

Hartley(1940)는 修正된 尤度比統計量의 積率로부터 出發하여 正確한 分布와 거의 一致하는 對數的 統計量(Hartely 및 Pearson (1946)에 依하여 M라 불리었다.)에 對한 χ^2 積分의 漸近級數를 얻었다. Wald 및 Brookner(1941)는 전혀 다른 問題 즉 m 集團의 變量의 獨立性에 對한 檢定을 하기위한 Wilks 의 統計量의 分布를 調査하고 다시 尤度比統計量 λ의 積率로부터 始作하여 對數的 統計量의 分布에 對한 式이 漸近 χ^2 級數의 形으로 됨을 實際로 얻을 수 있었다. 뒤에 Rao(1948)가 多變量解析의 有意性檢定에 對하여 重要하고 特別한 境遇에는 修正을 加하였다. 그러나 Wald, Brookner 나 Rao 도 이들 級數의 正確性을 調査하지는 못하였으며, 大體로 積率計算의 귀찮은 作業 때문에 通常의 有意性檢定에는 인기가 없었다.

많은 境遇에 있어서 正確한 分布는 實用的인 形으로 얻을 수가 없지만 大概 그 積率은 求할 수가 있다. Box(1949)는 이에 着眼하여 相當히 廣範하게 適用되는 一般的인 漸近展開[定理2]를 얻었다.

여기서는 첫째 [定理2] 즉 식(2·3), (2·4)를 滿足하는 尤度比統計量 W에 對하여 $M=-2\log W$라 두면 統計量 $\rho M(0<\rho\leqq 1)$은 漸近 χ^2 分布를 함을 증명한다. 다음에 Wilks 및 Box 의 漸近 χ^2 分布의 確率은 [定理2]의 漸近展開式

$$
\begin{aligned}
P(\rho M\leq\rho M_0)=&P\{\chi^2{}_f\leq\rho M_0\}+\gamma_1[P\{\chi^2{}_{f+2}\leqq\rho M_0\}-P\{\chi^2{}_f\leqq\rho M_0\}]\\
&+[\gamma_2(P\{\chi^2{}_{f+4}\leq\rho M_0\}-P\{\chi^2{}_f\leq\rho M_0\})\\
&+\tfrac{1}{2}\gamma_1{}^2(P\{\chi^2{}_{f+4}\leq\rho M_0\}-2P\{\chi^2{}_{f+2}\leqq\rho M_0\}+P\{\chi^2{}_f\leqq\rho M_0\})]\\
&+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

에 있어서 $\rho=1$로 두어 Wilks의 漸近 χ^2 分布[定理1]의 確率을 두제項(γ_2')까지 셈하고 Box 의 漸近 χ^2 分布는 $\gamma_1=0$으로 하는 ρ에 對하여 두제項(γ_2)까지 셈하여 이 두 漸近分布를 Box에 依하여 一般化檢定이라고 한 다음 두 가지 目標에 對하여 具體的으로 比較 檢討한다.

1) l번째 集合이 k_l個의 變量을 가질 때 殘差의 集合의 獨立性에 關한 檢定의 比較

2) k變量標本의 集合의 分散 및 共分散의 同時檢定의 比較.

이 두 가지 基準을 各各 獨立性 및 等共分散의 一般化檢定이라고 부르기로 한다.

이 確率을 셈하기 위하여 χ^2 分布에 依한 表 7, 8을 作成하고 γ_t項까지의 確率을 셈하여 正確한 確率(γ_t項까지의 값)과의 一致性, 極限分布에 對한 收斂性 및 檢定의 實用性을 檢討하였다. 그리고 이 論文에서는 原母集團은 正規 또는 多變量正規分布를 하는 것으로 假定한다.

2. 尤度比檢定 統計量의 分布

尤度比統計量의 Wilks 漸近分布 [定理1]의 證明은 省略하고 Box 의 漸近分布 [定理2]에 對해서는 [Lemma 1]을 써서 證明한다.

[Lemma 1] $\log\Gamma(z+a)$의 漸近展開

$$\log\Gamma(z+a)=(z+a-\tfrac{1}{2})\log z-z+\tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}B_{m+1}(a)}{m(m+1)(m+2)z^{m}}+O(z^{-n-1}) \qquad (2.1)$$

(證明) $\left(1+\frac{z}{a}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{a+n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}=\frac{e^{-cz}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}$, C: Euler 常數

는 쉽게 알수 있다. 左邊의 對數의 값은

$$\log\left(1+\frac{z}{a}\right)+\log\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{a+n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-az}{n(a+n)}\right)+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\frac{z^{m}}{(a+n)^{m}}\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{m}\frac{z^{m}}{a^{m}}.$$

만약 $|z|<a$ 이면 二重級數는 絶對收斂하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a|z|}{n(a+n)}-\log\left(1-\frac{|z|}{a+n}\right)+\frac{|z|}{n+a}\right]$$

는 收斂한다. 따라서

$$\log\frac{e^{-cz}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=\frac{z}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{az}{n(a+n)}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}z^{m}\zeta(m,a)$$

$$\text{단}\quad \zeta(m,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^{m}}$$

여기서 $\frac{1}{2\pi i}\int_{k}\frac{\pi z^{s}}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds$를 생각하자. 積分路를 點 2, 3, 4, …를 包含하고 1, 0, −1, −2, …을 包含하지 않게 한다. 整數 $s=m$ $(m\geqq 2)$에 對한 留數는 $\frac{(-1)^{m}}{m}z^{m}\zeta(m,a)$이고 $\sigma\to\infty$ $(s=\sigma+it)$이면 $\zeta(s,a)=O(1)$ (∵E. T. Whittaker [3] p275)이므로 $|z|<1$이면 積分은 收斂한다. 그러므로

$$\log\frac{e^{-cz}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=\frac{z}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{az}{n(a+n)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{k}\frac{\pi z^{s}}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds$$

이고 또 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\log\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=-z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{k}\frac{\pi z^{s}}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds. \qquad (\because \text{E. T. Whittaker p247})$$

지금 中心을 $s=\frac{3}{2}$으로하고 반지름을 充分히 큰 N으로 하는 半圓 D를 생각하자. 이 半圓은 直線 $\sigma=\frac{3}{2}$의 오른쪽에 있게 한다. 半圓위에서는 $\zeta(s,a)=O(1)$, $|z^{s}|=|z|^{\sigma}e^{-t\arg z}$, 그러므로 被積分函數는 $O\{|z|^{\sigma}e^{-\pi|t|-t\arg z}\}$ 또 $|z|<1$ 이고 $-\pi+\delta\leq\arg z\leq\pi-\delta$, $(\delta>0)$이면 被積分函數는 $O(|z|^{\sigma}e^{-\delta|t|})$이므로

$$\int_{D}\frac{\pi z^{s}}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds\to 0\quad(N\to\infty)$$

이 된다.

이에 $|\arg z|\leq\pi-\delta$, 그리고 $|z|<1$ 이면 다음 式을 얻는다.

$$\log\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=-z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds$$

그러나 이 積分은 z의 解析函數이고 $|\arg z|\leqq\pi-\delta$이면 $|z|$의 모든 값에 對하여 定義된다.

Cauchy 의 定理에 依하여 다시 다음과 같이 表示하자.

$$\log\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=-z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-n-\frac{1}{2}-\infty i}^{-n-\frac{1}{2}+\infty i}\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)ds+\sum_{m=-1}^{n}R_m$$

R_m은 $s=-m$에서의 留數이다.

새 積分路 위에서의 被積分函數는 $\zeta(s,a)=O(|t|^{\tau(\sigma)}\log|t|)$ (∵ E. T. Whittaker [3] p276)이므로

$$\left|\frac{\pi z^s}{s\sin\pi s}\zeta(s,a)\right|<Lz^{-n-\frac{1}{2}}e^{-\delta|t|}|t|^{\tau(-n-\frac{1}{2})}$$

단 L은 z와 t에 關係없는 常數이고 $\tau(\sigma)$는 $\tau(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma$ $(\sigma\leq0)$; $\tau(\sigma)=\frac{1}{2}$ $(0\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2})$; $\tau(\sigma)=1-\sigma$ $(\frac{1}{2}\leq\sigma\leq1)$; $\tau(\sigma)=0$ $(\sigma\geq1)$으로 定義된 값이다. (∵ E. T. Whittaker [3] p276) 따라서

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\delta|t|}|t|^{\tau(-n-\frac{1}{2})}dt$$

가 收斂하므로 $|z|$가 充分히 클 때

$$\log\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}=-z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\sum_{m=-1}^{n}R_m+O(z^{-n-\frac{1}{2}})$$

을 얻는다. m이 陽의 整數일 때 $R_m=\dfrac{(-1)^m z^{-m}\zeta(-m,a)}{-m}$이며 Bernoulli 의 多項式의 定義 (E. T. Whittaker. p276)에 依하여 $R_m=\dfrac{(-1)^m z^{-m}B'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)}$가 되며 $B'_{m+2}(a)$는 Bernoulli 의 多項式의 導函數 이다.

또 R_0은 $s=0$에서의 留數이며 R_0을 求하기 위하여 被積分函數를 展開하면

$$\frac{1}{s}\left(1+\frac{\pi^2s^2}{6}+\cdots\cdots\right)\left(1+s\log z+\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{2}-a+s\zeta'(0,a)+\cdots\cdots\right),$$

이다. 이에서 R_0은

$$\begin{aligned}R_0&=(\tfrac{1}{2}-a)\log z+\zeta'(0,a)\\&=(\tfrac{1}{2}-a)\log z+\log\Gamma(a)-\tfrac{1}{2}\log(2\pi)\quad(\because\ \text{E. T. Whrttaker p271})\end{aligned}$$

또 R_{-1}은 $S=0$ 즉 $s=S+1=1$ 에서의 留數이다.

$$\lim_{s\to1}\left\{\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right\}=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\qquad(\because\ \text{E. T. Whittaker p 271})$$

이므로 亦是 被積分函數를 展開하면

$$-\frac{1}{S}(1-S+S^2-\cdots)\left(1+\frac{\pi^2S^2}{6}+\cdots\right)z(1+S\log z+\cdots)\left(\frac{1}{S}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\cdots\right),$$

이에서

$$R_{-1}=-z\log z+z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+z.$$

를 얻는다.

이 結果에서 $|\arg z|\leq\pi-\delta$ 이고 $|z|$ 가 充分히 크면

$$\log\Gamma(z+a)=(z+a-\tfrac{1}{2})\log z-z+\tfrac{1}{2}\log(2\pi)+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}B'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)z^{m}}+O(z^{-n-1})$$

$$=(z+a-\tfrac{1}{2})\log z-z+\tfrac{1}{2}\log(2\pi)+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}B_{m+1}(a)}{m(m+1)(m+2)z^{m}}+O(z^{-n-1}).$$

[定理1] Ω 를 m 次元 母數空間, ω 를 Ω 中의 s 次元超平面이라하고 假說 $H_0: \theta\varepsilon\omega$ 를 檢定하기 위한 尤度比規準을

$$\lambda=\max_{\theta\varepsilon\omega}L(\theta)\Big/\max_{\theta\varepsilon\Omega}L(\theta) \tag{2·2}$$

라 하면 假說 H_0 가 眞일 때 $-2\log\lambda$ 는 漸近的으로 自由度 $m-s$ 의 χ^2 分布를 한다. (∵ S. S. Wilks; Mathematical Statistics. John Wiley & Sons. (1962). p416)

[定理2] 統計量 $W(0\leqq W\leqq 1)$ 의 h 次의 moment 가

$$E(W^h)=K\left(\frac{\prod_{j=1}^{b}y_j^{y_j}}{\prod_{k=1}^{a}x_k^{x_k}}\right)^h\frac{\prod_{k=1}^{a}\Gamma[x_k(1+h)+\xi_k]}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma[y_j(1+h)+\eta_j]},\ h=0,1,\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2·3}$$

이라한다. 단 K 는 $E(W^0)=1$ 로 하는 常數이고

$$\sum_{k=1}^{a}x_k=\sum_{j=1}^{b}y_j \tag{2·4}$$

일 때

$$M=-2\log W \tag{2·5}$$

로 두면 $0<\rho\leqq 1$ 인 ρ 에 對하여

$$\begin{aligned}P\{M\leqq M_0\}&=P\{\rho M\leqq\rho M_0\}\\&=P\{\chi_f^2\leqq\rho M_0\}+\gamma_1(P\{\chi^2_{f+2}\leqq\rho M_0\}-P\{\chi^2_f\leqq\rho M_0\})\\&\quad+[\gamma_2(P\{\chi^2_{f+4}\leqq\rho M_0\}-P\{\chi^2_f\leqq\rho M_0\})\\&\quad+\frac{\gamma_1^2}{2}(P\{\chi^2_{f+4}\leqq\rho M_0\}-2P\{\chi^2_{f+2}\leqq\rho M_0\}\\&\quad+P\{\chi^2_f\leqq\rho M_0\})]+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

인 漸近展開가 成立한다. 여기서 χ^2_{f+m} 은 自由度 $f+m$ 의 χ^2 變量이며

$$f=-2\left\{\sum_{k=1}^{a}\xi_k-\sum_{j=1}^{b}\eta_j-\frac{1}{2}(a-b)\right\} \tag{2·6}$$

$$\gamma_r=\frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)}\left\{\sum_{k=1}^{a}\frac{B_{r+1}(u_k)}{(\tau x_k)^r}-\sum_{j=1}^{b}\frac{B_{r+1}(u_j^*)}{(\tau y_j)^r}\right\} \tag{2·7}$$

$B_r(u)$는 r 次의 Bernoulli 의 多項式 $[B_0(u)=1,\ B_1(u)=u-\frac{1}{2},\ B_2(u)=u^2-u+\frac{1}{6},\ B_3(u)=u^3-\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}u, \cdots\cdots]$ $u_k=(1-\rho)x_k+\xi_k$, $u_j^*=(1-\rho)y_j+\eta_j$ 이다.

(證明) $\rho M=-2\rho\log W$ 의 特性函數는

$$\phi(t)=E(e^{it\rho M})=E(W^{-2it\rho})$$

$$=K\left(\frac{\prod_{j=1}^{b} y_j^{y_j}}{\prod_{k=1}^{a} x_k^{x_k}}\right)^h \frac{\prod_{k=1}^{a}\Gamma[x_k(1-2it\rho)+\xi_k]}{\prod_{j=1}^{b}\Gamma[y_j(1-2it\rho)+\eta_j]} \tag{2·8}$$

이므로 $\beta_k=(1-\rho)x_k$, $\varepsilon_j=(1-\rho)y_j$ 로 두면 ρM 의 cumulant 母函數는

$$\Phi(t)=\log\phi(t)=g(t)-g(0) \tag{2·9}$$

이다. 여기의

$$g(t)=2i\rho t\left(\sum_{k=1}^{a}x_k\log x_k-\sum_{j=1}^{b}y_j\log y_j\right)+\sum_k\log\Gamma[\rho x_k(1-2it)+\beta_k+\xi_k]$$
$$-\sum_j\log\Gamma[\rho y_j(1-2it)+\varepsilon_j+\eta_j]$$

이고 $g(t)-g(0)$은 $\Phi(0)=0$ 을 滿足시킨다.

앞 Lemma 1 에서 求한 Gamma 函數의 漸近展開式 (2·1)

$$\log\Gamma(x+h)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x+h-\frac{1}{2}\right)\log x-x$$
$$-\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\frac{B_{r+1}(h)}{r(r+1)x^r}+R_{m+1}(x) \tag{2·10}$$

을 使用하자. 단 $R_{m+1}(x)=O(x^{-(m+1)})$. $x=\rho x_k(1-2it)$, $\rho y_j(1-2it)$ 그리고 $h=\beta_k+\xi_k$, $\varepsilon_j+\eta_j$ 로 둠으로써 다음식을 얻는다.

$$\Phi(t)=Q-g(0)-\frac{f}{2}\log(1-2it)+\sum_{r=1}^{m}\gamma_r(1-2it)^{-r}$$
$$+\sum O(x_k^{-(m+1)})+\sum O(y_j^{-(m+1)}) \tag{2·11}$$

$$Q=\frac{1}{2}(a-b)\log 2\pi-\frac{f}{2}\log\rho+\sum_k\left(x_k+\xi_k-\frac{1}{2}\right)\log x_k$$
$$-\sum\left(y_j+\eta_j-\frac{1}{2}\right)\log y_j \tag{2·12}$$

$$\Phi(t)=-\frac{f}{2}\log(1-2it)+\sum_{r=1}^{m}\gamma_r[(1-2it)^{-r}-1]+R'_{m+1} \tag{2·13}$$

$$R'_{m+1}=\sum O(x_k^{-(m+1)})+\sum O(y_j^{-(m+1)}) \tag{2·14}$$

따라서

$$\phi(t)=e^{\Phi(t)}$$
$$=(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}\exp\left[\sum_{r=1}^{m}\gamma_r(1-2it)^{-r}-\sum_{r=1}^{m}\gamma_r+R'_{m+1}\right]$$

$$=(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}\left\{\prod_{r=1}^{m}\left[1+\gamma_r(1-2it)^{-r}+\frac{1}{2!}\gamma_r^2(1-2it)^{-2r}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots\right]\prod_{r=1}^{m}\left(1-\gamma_r+\frac{1}{2!}\gamma_r^2-\cdots\cdots\right)+R''_{m+1}\right\}$$

$$=(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}[1+T_1(t)+T_2(t)+\cdots\cdots+T_m(t)+R'''_{m+1}] \quad (2\cdot15)$$

단 $T_r(t)$ 는 項 $\gamma_1^{s_1}$, $\gamma_2^{s_2},\cdots$, $\gamma_r^{s_r}$, $\sum is_i=r$ 에 關해서 展開한 式이다. 보기를 들면

$$T_1(t)=\gamma_1[(1-2it)^{-1}-1]$$

$$T_2(t)=\gamma_2[(1-2it)^{-2}-1]+\frac{1}{2}\gamma_1^2[(1-2it)^{-2}-2(1-2it)^{-1}+1]$$

$$T_3(t)=\gamma_3[(1-2it)^{-3}-1]+\gamma_1\gamma_2[(1-2it)^{-3}-(1-2it)^{-2}-(1-2it)^{-1}+1]$$

$$+\frac{1}{6}\gamma_1^3[(1-2it)^{-3}-3(1-2it)^{-2}+3(1-2it)^{-1}-1] \quad (2\cdot16)$$

大部分의 境遇 常數 c_k, d_j 에 對하여 $x_k=c_k\theta$, $y_j=d_j\theta$ 로 두면 θ 는 標本의 크기에 따라 變한다. 이 때 ρ 를 $(1-\rho)x_k$, $(1-\rho)y_j$ 가 極限을 가지도록 取하면 R'''_{m+1} 는 $O(\theta^{-(m+1)})$이다. 그리고 (2·15)에서 모든 項이 $\gamma_1^{s_1},\cdots\cdots$, $\gamma_r^{s_r}$, $\sum is_i=r$ 되게 取하면 이들 項은 $O(\theta^{-r})$이다.

$T_r(t)$는 $(1-2it)^{-1}$ 에 關해서 r 次의 多項式이고 $(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}T_r(t)$ 의 各項은 하나의 整數 v 에 對하여 $(1-2it)^{-\frac{1}{2}v}$ 의 一定한 倍數로 되어있다. $(1-2it)^{-\frac{1}{2}v}$ 는 自由度 v 인 χ^2 分布의 特性函數이므로

$$\varphi_v(z)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}v}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}z^{\frac{1}{2}v-1}e^{-\frac{1}{2}z}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}(1-2it)^{-\frac{1}{2}v}e^{-itz}dt \quad (2\cdot17)$$

이다. 그리고

$$S_r(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}\,T_r(t)e^{-itz}dt \quad (2\cdot18)$$

$$R^{iv}_{m+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}(1-2it)^{-\frac{1}{2}f}R'''_{m+1}e^{-itz}dt$$

으로 두면 ρM의 密度函數는

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\phi(t)e^{-itz}dz=\sum_{r=0}^{m}S_r(z)+R^{iv}_{m+1}$$

$$=\varphi_f(z)+\gamma_1[\varphi_{f+2}(z)-\varphi_f(z)]+\{\gamma_2[\varphi_{f+4}(z)-\varphi_f(z)]$$

$$+\frac{1}{2}\gamma_1^2[\varphi_{f+4}(z)-2\varphi_{f+2}(z)+\varphi_f(z)]\}$$

$$+\cdots+S_m(z)+R^{iv}_{m+1} \quad (2\cdot19)$$

또

$$\left.\begin{aligned} U_r(z_0) &= \int_0^{z_0} S_r(z)dz \\ R^V{}_{m+1} &= \int_0^{z_0} R^{iv}{}_{m+1}dz \end{aligned}\right\} \tag{2·20}$$

로 두면 $M_0=-2\log W$의 分布函數는 $\rho M_0=-2\rho\log W$ 의 分布函數의 項으로 表示된다. 即

$$\begin{aligned} P\{M\leq M_0\} &= P\{\rho M\leq\rho M_0\} \\ &= \sum_{r=0}^{m} U_r(\rho M_0)+R^V{}_{m+1} \\ &= P\{\chi_f{}^2\leqq\rho M_0\}+\gamma_1(P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leqq\rho M_0\}) \\ &\quad +[\gamma_2(P\{\chi_{f+4}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\}) \\ &\qquad +\frac{1}{2}\gamma_1{}^2(P\{\chi_{f+4}{}^2\leqq\rho M_0\}-2P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}+P\{\chi_f{}^2\leqq\rho M_0\})] \\ &\quad +[\gamma_3(P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\}) \\ &\quad +\gamma_1\gamma_2(P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_{f+4}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}+P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\}) \\ &\quad +\frac{1}{6}\gamma_1{}^3(P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\}-3P\{\chi_{f+4}{}^2\leq\rho M_0\}+3P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\})] \\ &\quad +[\gamma_4(P\{\chi_{f+8}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leqq\rho M_0\}) \\ &\qquad +\gamma_1\gamma_3(P\{\chi_{f+8}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\} \\ &\qquad +P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\})+\frac{1}{2}\gamma_2{}^2(P\{\chi_{f+8}{}^2\leq\rho M_0\}-2P\{\chi_{f+4}{}^2\leqq\rho M_0\} \\ &\qquad +P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\})+\frac{1}{2}\gamma_1{}^2\gamma_2(P\{\chi_{f+8}{}^2\leq\rho M_0\}-2P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\} \\ &\qquad +2P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}-P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\}) \\ &\qquad +\frac{1}{24}\gamma_1{}^4(P\{\chi_{f+8}{}^2\leq\rho M_0\}-4P\{\chi_{f+6}{}^2\leq\rho M_0\}+6P\{\chi_{f+4}{}^2\leqq\rho M_0\} \\ &\qquad -4P\{\chi_{f+2}{}^2\leq\rho M_0\}+P\{\chi_f{}^2\leq\rho M_0\})]+\cdots \\ &\qquad +U_m(\rho M_0)+R^V{}_{m+1} \end{aligned} \tag{2·21}$$

剩餘項 $R^V{}_{m+1}$ 는 $O(\theta^{-(m+1)})$ 이다.

3. 獨立性의 檢定規準의 漸近分布

A. 尤度比檢定規準

確率 Vector $x(1\times k)\sim N(\mu,\Lambda)$에 있어서 $x=(x_1(1\times k_1),\cdots,\ x_m(1\times k_m))$, $k=k_1+k_2+\cdots+k_m$ 이라 한다. 이에 對應하는 μ,Λ 의 分割을 各各

$$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m),\qquad \Lambda=\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12}\cdots\Lambda_{1m} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}\cdots\Lambda_{2m} \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot \\ \Lambda_{m1} & \Lambda_{m2}\cdots\Lambda_{mm} \end{pmatrix} \tag{3·1}$$

이라 두고 假設 H_0 ; $\Lambda_{ij}=0$, $i\neq j$에 對한 尤度比規準을 求하자. H_0가 眞일 때 尤度比函數는

$$L(\mu,\Lambda)=\text{const}\prod_{i=1}^{m}|\Lambda_{ii}|^{-\frac{1}{2}n}\exp\left[-\frac{1}{2}\text{tr}\Lambda_{ii}^{-1}\{V_{ii}+n(\bar{x}_i-\mu_i)'(\bar{x}_i-\mu_i)\}\right]$$

으로 表示되므로

$$\max_{\omega}L(\mu,\Lambda)=\prod_{i=1}^{m}\max_{\mu_i\Lambda_{ij}}L_i(\mu_i,\Lambda_{ii})=\text{const}\left(\prod_{i=1}^{m}|V_{ii}|^{-\frac{1}{2}n}\right)n^{\frac{1}{2}kn}e^{-\frac{1}{2}kn}$$

이 된다. 단 $\bar{x}_i=\sum_{\alpha=1}^{n}x_{i\alpha}/n$, $V_{ii}=\sum_{\alpha=1}^{n}(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)'(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)$ 따라서 H_0의 尤度比規準$=\lambda=\max_{\omega}L(\mu,\Lambda)/\max_{\Omega}L(\mu,\Lambda)$에 對해서

$$\lambda^{\frac{2}{n}}=w=\frac{|V|}{\prod_{i=1}^{m}|V_{ii}|}=|VD_V^{-1}|,\ D_V=\text{diag}(V_{11},\cdots,V_{mm}) \qquad (3\cdot2)$$

이 얻어진다. 또 假設 H를 다음과 같이 取할 때

H ; $\Lambda_{ij}\neq0$, $i\neq j$가 眞일 때 式 (3·2)의 w의 h次 積率은 Wilks(1935) (∵ 北川 [5] p58)에 依하여 다음 式으로 주어진다.

$$E(w^h)=\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+1-i)+h]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+1-i)]}\prod_{j=1}^{m}\prod_{\alpha=1}^{k_j}\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+1-\alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu+1-\alpha)+h]} \qquad (3\cdot3)$$

B. 漸近分布

다시 假設 H_0; $\Lambda_{ij}=0$, $i\neq j$가 眞일 때 尤度比檢定規準 $\lambda=w^{\frac{n}{2}}$ (式 (3·2))의 積率은 式 (3·3)에서

$$E(\lambda^h)=E\left(w^{\frac{hn}{2}}\right)=c\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\{n(1+h)-i\}]}{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\Gamma[\frac{1}{2}\{n(1+h)-j\}]} \qquad (3\cdot4)$$

으로 表示된다. (c는 $E(\lambda^0)=1$ 되는 常數) 이 λ의 漸近分布는 [定理2]에 對應시킬 수 있다. 즉

$$a=k,\ x_i=\frac{n}{2},\quad \xi_i=-\frac{i}{2},$$

$$b=k,\ y_j=\frac{n}{2},\ \eta_j=(k_1+\cdots+k_{i-1}-j)/2$$

$$j=k_1+\cdots+k_{i-1}+1,\ \cdots,\ k_1+\cdots+k_i;\quad i=1,\cdots,m$$

으로 두면 $f=\frac{1}{2}\{k(k+1)-\sum_i k_i(k_i+1)\}=\frac{1}{2}(k^2-\sum k_i^2)$ 이다. $\gamma_1=0$ 이 되는 ρ는

$$\rho=1-\frac{2(k^3-\sum k_i^3)+9(k^2-\sum k_i^2)}{6n(k^2-\sum k_i^2)}.$$

이 때

$$-2\rho\log\lambda=-\left\{n-\frac{3}{2}-\frac{k^3-\sum k_i^3}{3(k^2-\sum k_i^2)}\right\}\log\frac{|V|}{\prod_{i=1}^{m}|V_{ii}|} \qquad (3\cdot5)$$

는 漸近的으로 自由度 $\frac{1}{2}(k^2-\Sigma k_i^2)$인 χ^2 分布를 한다.

이 漸近分布의 確率을 求하기 위하여 $\rho(0<\rho<1)$의 任意의 값에 對한 γ_r과 $\rho=1$에 對한 γ_r의 값을 $r=1, 2, 3, 4$ 까지 求하면 다음과 같다.

$$\gamma_1=\frac{1}{n\rho}\Big[\frac{n}{4}(1-\rho)\Big(\sum_{i=1}^{m}k_i^2-k^2\Big)+\frac{1}{24}\Big(2k^3+3k-2\sum_{i=1}^{m}k_i^3-3\sum_{i=1}^{m}k_i^2\Big)+\frac{1}{4}\Big(k^2-\sum k_i^2\Big)\Big]$$

$$\begin{aligned}\gamma_2=\frac{2}{3n^2\rho^2}\Big[&\frac{1}{16}\{3(1-\rho)^2n^2-6(1-\rho)n+2\}\Big\{k(k+1)-\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)\Big\}\\&+\frac{1}{16}\{(1-\rho)n-1\}\Big\{\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)(2k_i+1)-k(k+1)(2k+1)\Big\}\\&+\frac{1}{32}\Big\{k^2(k+1)^2-\sum_{i=1}^{m}k_i^2(k_i+1)^2\Big\}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3=\frac{2}{3n^3\rho^3}\Big[&\frac{1}{8}\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)-k(k+1)\Big]\Big[(1-\rho)^2n^2-3(1-\rho)n+2\Big](1-\rho)n\\&+\Big[\frac{1}{2}(1-\rho)^2n^2+(1-\rho)n+\frac{1}{3}\Big]\Big[k(k+1)(2k+1)-\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)(2k_i+1)\Big]\\&+\frac{1}{2}\Big[(1-\rho)n+1\Big]\Big[\sum_{i=1}^{m}k_i^2(k_i+1)^2-k^2(k+1)^2\Big]\Big\}\\&+\frac{1}{16}\Big\{\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}-\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{k_i^5}{5}+\frac{k_i^4}{2}+\frac{k_i^3}{3}-\frac{k_i}{30}\Big)\Big\}\Big]\end{aligned} \quad (3\cdot6)\cdots$$

$$\begin{aligned}\gamma_4=\frac{4}{5\rho^4n^4}\Big[&\Big\{k(k+1)-\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)\Big\}\Big(\frac{5}{64}(1-\rho)^4n^4-\frac{5}{16}(1-\rho)^3n^3+\frac{5}{16}(1-\rho)^2n^2-\frac{1}{6}\Big)\\&+\Big\{\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)(2k_i+1)-k(k+1)(2k+1)\Big\}\Big(\frac{5}{96}(1-\rho)^3n^3-\frac{5}{32}(1-\rho)^2n^2+\frac{5}{48}(1-\rho)n\Big)\\&+\frac{1}{32}\Big\{k^2(k+1)^2-\sum_{i=1}^{m}k_i^2(k_i+1)^2\Big\}\Big(\frac{5}{2}(1-\rho)^2n^2-5(1-\rho)n+\frac{5}{3}\Big)\\&+\frac{1}{192}\Big\{\sum_{i=1}^{m}(6k_i^4+15k_i^3+10k_i^2-1)k_i-(6k^4+15k^3+10k^2-1)k\Big\}\{(1-\rho)n-1\}\\&+\frac{1}{384}\Big\{(2k^4+6k^3+5k^2-1)k^2-\sum_{i=1}^{m}(2k_i^4+6k_i^3+5k_i^2-1)k_i^2\Big\}\Big]\end{aligned}$$

다음에 $\rho=1$ 일 때의 값 γ_r'를 求하면

$$\begin{aligned}\gamma_1'&=\frac{1}{24n}\Big\{2\Big(k^3-\sum_{i=1}^{m}k_i^3\Big)+9\Big(k^2-\sum_{i=1}^{m}k_i^2\Big)\Big\}\\\gamma_2'&=\frac{1}{12n^2}\Big[k(k+1)-\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)-\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=1}^{m}(2k_i^3+3k_i^2+k_i)-k(k+1)(2k+1)\Big\}\\&\qquad+\frac{1}{4}\Big\{k^2(k+1)^2-\sum_{i=1}^{m}k_i^2(k_i+1)^2\Big\}\Big]\\\gamma_3'&=\frac{2}{3n^2}\Big[\frac{1}{24}\Big\{k(k+1)(2k+1)-\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)(2k_i+1)\Big\}\\&\qquad+\frac{1}{16}\Big\{\sum_{i=1}^{m}k_i^2(k_i+1)^2-k^2(k+1)^2\Big\}\end{aligned} \quad (3\cdot7)$$

$$+\frac{1}{16}\left\{\frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{k_i^5}{5}+\frac{k_i^4}{2}+\frac{k_i^3}{3}-\frac{k_i}{30}\right)\right\}\Bigg]$$

$$\gamma'_4=\frac{2}{15n^4}\Bigg[\Big[\sum_{i=1}^{m}k_i(k_i+1)-k(k+1)+\frac{5}{16}\{k^2(k+1)^2-\sum k_i^2(k_i+1)^2\}$$

$$-\frac{1}{32}\left\{\sum_{i=1}^{m}(6k_i^4+15k_i^3+10k_i^2-1)k_i-(6k^4+15k^3+10k^2-1)k\right\}$$

$$+\frac{1}{64}\left\{(2k^4+6k^3+5k^2-1)k^2-\sum_{i=1}^{m}(2k_i^4+6k_i^3+5k_i^2-1)k_i^2\right\}\Big]\Bigg]$$

이 된다. 다음에 式 (3·2)의 尤度比 λ에 對한 [定理1]의 漸近分布의 自由度를 셈 한다.

[Lemma 2] 尤度比規準

$$\lambda=\frac{|V|^{\frac{n}{2}}}{\prod_{i=1}^{m}|V_{ii}|^{\frac{n}{2}}} \tag{3·8}$$

에 對해서 H_0 ; $\Lambda_{ij}=0$, $i\neq j$가 眞이면 $M=-2\log\lambda$ 즉 Wilks 의 漸近分布 [定理1]의 自由度는 $\frac{1}{2}(k^2-\sum k_i^2)$이다.

(證明) $E(\lambda^h)$은 式 (3·4)로 주어지므로 H_0; $\Lambda_{ij}=0$, $i\neq j$가 眞일 때 $M=-2\log\lambda$ 의 特性函數 $\phi(t)=E(e^{itM})$은

$$\phi(t)=E(e^{-2it\log\lambda})=E(\lambda^{-2it})$$

$$=C\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma\left[\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}\right]}{\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_\mu}\Gamma\left[\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}\right]} \tag{3·9}$$

으로 表示된다. 여기서 Gamma 函數의 漸近公式

$$\Gamma\left[\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}\right]\sim\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}\right]^{\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\{n(1-2it)-j\}}$$

을 適用하여

$$C=\frac{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-j)\right\}}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-j)\right\}}\sim\frac{\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\left[\frac{1}{2}(n-j)\right]^{\frac{1}{2}(n-j)-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(n-j)}}{\prod_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2}(n-j)\right]^{\frac{1}{2}(n-j)-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(n-j)}}$$

$$=\frac{e^{+\frac{1}{2}n\sum k_i}\,e^{+\frac{1}{4}\sum k_i(k_i+1)}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\left\{\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{n}{j}}\right\}^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{1+j}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}nk}\,e^{+\frac{1}{4}k(k+1)}\prod_{j=1}^{k}\left\{\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{n}{j}}\right\}^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{1+j}{2}}} \tag{3·10}$$

$$=\frac{e^{+\frac{1}{4}\sum k_i(k_i+1)}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_i}\left\{\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{n}{j}}\right\}^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{1+j}{2}}}{e^{+\frac{1}{4}k(k+1)}\prod_{j=1}^{k}\left\{\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{n}{j}}\right\}^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{-\frac{1+j}{2}}}$$

$$\to \frac{e^{\frac{1}{2}\Sigma k_i(k_i+1)}\; e^{\frac{1}{2}\Sigma k_i(k_i+1)}}{e^{\frac{1}{2}k(k+1)}\; e^{\frac{1}{2}k(k+1)}}=1 \qquad (n\to\infty)$$

따라서 C의 漸近式을 C'라 두면

$$\phi(t)\sim C'\frac{\prod_{j=1}^{k}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j]\right\}^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j]-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j]}}{\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_\mu}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j]\right\}^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]} e^{-\frac{1}{2}[n(1-2it)-j]}}$$

$$=C'\frac{\prod_{j=1}^{k}[n(1-2it)-j]^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]}\, e^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_\mu}[n(1-2it)-j]^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]}\, e^{\frac{1}{2}\Sigma k_\mu(k_\mu+1)}}$$

$$=C'\frac{[n(1-2it)]^{\sum_{j}^{k}\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]}\prod_{j=1}^{k}\left[1-\frac{j}{n(1-2it)}\right]^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]} e^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{\left[n(1-2it)\right]^{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_\mu}\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]}\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_\mu}\left[1-\frac{1}{n(1-2it)}\right]^{\frac{1}{2}[n(1-2it)-j-1]} e^{\frac{1}{2}\Sigma k_\mu(k_\mu+1)}}$$

$$=C'\frac{(1-2it)^{-\frac{1}{2}k(k+1)}\prod_{j=1}^{k}\left[\left(1-\frac{j}{n(1-2it)}\right)^{-\frac{n(1-2it)}{j}}\right]^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n(1-2it)}\right)^{-\frac{1+j}{2}} e^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{(1-2it)^{-\frac{1}{2}\Sigma k_i(k_i+1)}\prod_{\mu=1}^{m}\prod_{j=1}^{k_\mu}\left[\left(1-\frac{j}{n(1-2it)}\right)^{-\frac{n(1-2it)}{j}}\right]^{-\frac{j}{2}}\left(1-\frac{j}{n(1-2it)}\right)^{-\frac{1+j}{2}} e^{\frac{1}{2}\Sigma k_\mu(k_\mu+1)}}$$

$$\to (1-2it)^{-\frac{1}{2}(k^2-\Sigma k_\mu^2)} \qquad (n\to\infty)$$

이것은 自由度 $\frac{1}{2}\left(k^2-\sum_{i=1}^{m}k_i^2\right)$의 χ^2分布의 特性函數이다.

以上의 關係에서 獨立性의 檢定規準의 漸近分布의 確率을 $k=k_1+k_2$의 境遇에 對해서 比較하면 다음 表 1, 2와 같다.

表 1. 5% 有意點에 對한 獨立性檢定에 比較

i	k_1	k	f	n	ρ	χ^2 (Wilks) M	χ^2 (Wilks) 正確	χ^2 (Wilks) 級數	χ^2 (Box) M	χ^2 (Box) 正確	χ^2 (Box) 級數
1	1	2	1		$1-\frac{5}{2n}$						
				9	0.7222	3.841	0.0948	0.0921	5.318	0.0492	0.0492
1	5	6	5		$1-\frac{9}{2n}$	11.070					
				10	0.5500		0.3089	0.2238	20.127	0.0678	0.0660
				20	0.7750		0.1226	0.1138	14.284	0.0520	0.0520
				30	0.8500		0.0904	0.0879	13.024	0.0508	0.0508
				40	0.8875		0.0775	0.0765	12.473	0.0504	0.0504
				60	0.9250		0.0667	0.0664	11.968	0.0502	0.0502

1	10	11	10		$1-\frac{7}{n}$	18.307					
				20	0.6500		0.4316	0.2459	28.165	0.0695	0.0669
				40	0.8250		0.1381	0.1238	22.190	0.0527	0.0526
				60	0.8833		0.0971	0.0938	20.726	0.0510	0.0510
				80	0.9125		0.0830	0.0817	20.062	0.0505	0.0505
				100	0.9300		0.0750	0.0745	19.685	0.0503	0.0503
2	2	4	4		$1-\frac{7}{2n}$	9.488					
				9	0.6111		0.1597	0.1252	15.526	0.0521	0.0521
				20	0.8250		0.0789	0.0762	11.501	0.0502	0.0502
				40	0.9125		0.0618	0.0615	10.398	0.0501	0.0501
2	5	7	10		$1-\frac{5}{n}$	18.307					
				10	0.5000		0.4962	0.3225	36.614	0.0859	0.0786
				20	0.7500		0.1717	0.1536	24.409	0.0533	0.0532
				30	0.8333		0.1169	0.1118	21.969	0.0511	0.0511
				40	0.8750		0.0957	0.0936	20.922	0.0506	0.0506
				60	0.9167		0.0787	0.0781	19.971	0.0502	0.0502
2	10	12	20		$1-\frac{7.5}{n}$	31.410					
				20	0.6250		0.5066	0.3515	50.256	0.0797	0.0744
				40	0.8125		0.1782	0.1619	38.658	0.0537	0.0536
				60	0.8750		0.1197	0.1152	35.897	0.0514	0.0514
				80	0.9063		0.0918	0.0899	34.657	0.0507	0.0507
				100	0.9250		0.0858	0.0849	33.957	0.0504	0.0504
4	4	8	16		$1-\frac{11}{2n}$	26.296					
				10	0.4500		1.0774	0.5709	58.436	0.1203	0.0972
				20	0.7250		0.3694	0.2277	36.270	0.0548	0.0545
				30	0.8167		0.1645	0.1501	32.198	0.0516	0.0516
				60	0.9083		0.0926	0.0909	28.951	0.0503	0.0503
				100	0.9450		0.0726	0.0723	27.825	0.0501	0.0501

$\gamma_1=0$ 되는 ρ 값에 對하여 γ의 홀수차례 값은 0이된다.

表 2. 1% 有意點에 對한 獨立性檢定의 比較

k_1	k_2	k	f	n	ρ	χ^2 (Wilks)			χ^2 (Box)		
						M	正 確	級 數	M	正 確	級 數
1	1	2	1		$1-\frac{5}{2n}$	6.635					
				9	0.7222		0.0277	0.0256	9.187	0.0096	0.0096
1	5	6	5		$1-\frac{9}{2n}$	15.086					
				10	0.5500		0.1257	0.0717	27.429	0.0169	0.0157
				20	0.7750		0.0374	0.0313	19.466	0.0107	0.0107
				30	0.8500		0.0239	0.0223	17.748	0.0103	0.0103
				40	0.8875		0.0191	0.0184	16.998	0.0101	0.0101
				60	0.9250		0.0153	0.0151	16.309	0.0101	0.0101

1	10	11	10		$1-\frac{7}{n}$	23, 209					
				20	0. 6500		0. 1813	0. 0777	35. 706	0. 0169	0. 0156
				40	0. 8250		0. 0422	0. 0339	28. 132	0. 0109	0. 0109
				60	0. 8833		0. 0257	0. 0237	26. 275	0. 0103	0. 0103
				80	0. 9125		0. 0202	0. 0195	25. 435	0. 0102	0. 0102
				100	0. 9300		0. 0175	0. 0172	24. 956	0. 0101	0. 0101
2	2	4	4		$1-\frac{7}{2n}$	13, 277					
				9	0. 6111		0. 0851	0. 0573	21. 726	0. 0108	0. 0108
				20	0. 8250		0. 0271	0. 0251	16. 093	0. 0101	0. 0101
				40	0. 9125		0. 0165	0. 0163	14. 550	0. 0100	0. 0100
2	5	7	10		$1-\frac{5}{n}$	23, 209					
				10	0. 5000		0. 2347	0. 1092	46. 418	0. 0233	0. 0194
				20	0. 7500		0. 0563	0. 0447	30. 945	0. 0111	0. 0110
				30	0. 8333		0. 0330	0. 0299	27. 852	0. 0104	0. 0104
				40	0. 8750		0. 0249	0. 0237	26. 525	0. 0102	0. 0102
				60	0. 9167		0. 0186	0. 0183	25. 318	0. 0101	0. 0101
2	10	12	20		$1-\frac{7.5}{n}$	37, 566					
				20	0. 6250		0. 2418	0. 1151	60. 106	0. 0201	0. 0175
				40	0. 8125		0. 0583	0. 0461	46. 235	0. 0112	0. 0111
				60	0. 8750		0. 0337	0. 0304	42. 933	0. 0104	0. 0104
				80	0. 9063		0. 0253	0. 0240	41. 450	0. 0102	0. 0102
				100	0. 9250		0. 0212	0. 0205	40. 612	0. 0101	0. 0101
4	4	8	16		$1-\frac{11}{2n}$	32, 000					
				10	0. 4500		0. 6490	0. 1961	71. 111	0. 0361	0. 0248
				20	0. 7250		0. 1103	0. 0697	44. 138	0. 0115	0. 0114
				30	0. 8167		0. 0529	0. 0424	39. 182	0. 0105	0. 0105
				60	0. 9083		0. 0236	0. 0225	35. 231	0. 0101	0. 0101
				100	0. 9450		0. 0168	0. 0166	33. 862	0. 0100	0. 0100

$\gamma_1=0$ 되는 ρ값에 對하여 γ의 홀수차례 값은 0이 된다.

4. 等共分散行列의 假說檢定

A. 檢定統計量

$X'_{(h)}(k\times n_h)=(x'_{(h)1}\cdots\cdots x'_{(h)n_h})$, $h=1,\cdots\cdots,q$ 를 各各 $N(\mu_{(h)},\Lambda_{(h)})$, $h=1,\cdots\cdots,q$ 에서의 任意標本이라 한다. 이에 對해서 假說 H_0; $\Lambda_{(1)}=\cdots\cdots=\Lambda_{(q)}$ 를 檢定하는 尤度比規準을 求하자. 各 標本에 있어서의 積和行列을 $V_{(h)}=X'_{(h)}X_{(h)}-n_h\bar{x}'_{(h)}\bar{x}_{(h)}=\sum_{\alpha=1}^{n_h}(x_{(h)\alpha}-\bar{x}_{(h)})'(x_{(h)\alpha}-\bar{x}_{(h)})$, $\sum_{h=1}^{q}V_{(h)}=V$,

$\sum_{h=1}^{q} n_h = n$ 으로 두면

$$\lambda = \frac{\prod_{h=1}^{q} |V_{(h)}|^{\frac{1}{2}n_h}}{|V|^{\frac{1}{2}n}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}kn}}{\prod_{h=1}^{q} n_h^{\frac{1}{2}kn_h}} \tag{4·1}$$

을 얻는다. 그러나 實際는 Bartlett 方法에 따라 常數因子를 없애고, n_h 代身에 自由度 $\nu_h = n_h - 1$, $\nu = n - q$ 를 使用하여

$$w = \frac{\prod_{h=1}^{q} |V_{(h)}|^{\frac{1}{2}\nu_h}}{|V|^{\frac{1}{2}\nu}} \tag{4·2}$$

를 檢定統計量으로 한다.

B. 漸近分布

假說 H_0; $\Lambda_{(1)} = \Lambda_{(2)} = \cdots \Lambda_{(q)} = \Lambda_{(0)}$ 이 眞일때 Wishart 分布 $V_{(h)} \sim W(\Lambda_{(0)}, k, \nu_h)$,

$V = \sum_{h=1}^{q} V_{(h)} \sim W(\Lambda_{(0)}, k, \sum_{1}^{q}\nu_h)$ 이므로 $r = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ 에 對해서

$$E(w^r) = \prod_{\alpha=1}^{k} \left\{ \prod_{h=1}^{q} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu_h + r\nu_h + 1 - \alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu_h + 1 - \alpha)]} \right\} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu + 1 - \alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(\nu + r\nu + 1 - \alpha)]} \tag{4·3}$$

이다. 다시 統計量

$$\lambda^* = w \frac{\nu^{\frac{1}{2}k\nu}}{\prod_{h=1}^{q} \nu_h^{\frac{1}{2}k\nu_h}} = \frac{\prod_{h=1}^{q} |V_{(h)}|^{\frac{1}{2}\nu_h}}{|V|^{\frac{1}{2}\nu}} \prod_{h=1}^{q} \left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^{\frac{1}{2}k\nu_h} \tag{4·4}$$

를 생각하여 漸近展開를 求한다. λ^*의 積率은 式 (4·3)에서

$$E(\lambda^{*r}) = c \left[\frac{\prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{2}\nu)^{\frac{1}{2}\nu}}{\prod_{h=1}^{q}\prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{2}\nu_h)^{\frac{1}{2}\nu_h}}\right]^r \frac{\prod_{h=1}^{q}\prod_{i=1}^{k} \Gamma[\frac{1}{2}\nu_h(1+r) + \frac{1}{2}(1-i)]}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma[\frac{1}{2}\nu(1+r) + \frac{1}{2}(1-j)]} \tag{4·5}$$

으로 表示된다. 이것은 [定理 2]의 型으로 表示할 수 있다. 記號의 對應은

$a = kq$, $x_i = \frac{1}{2}\nu_h$, $i = (h-1)k + 1, \cdots, hk$, $h = 1, \cdots, q$

$\xi_i = \frac{1}{2}(1-i)$, $\xi_{k+i} = \frac{1}{2}(1-i), \cdots, \xi_{(q-1)k+i} = \frac{1}{2}(1-i)$, $i = 1, \cdots, k$

$b = k$, $y_j = \frac{1}{2}\nu$, $\eta_j = \frac{1}{2}(1-j)$, $j = 1, \cdots, k$

이며, $\gamma_1 = 0$으로 두면 自由度 f 및 ρ 는

$$f = \frac{1}{2}(q-1)k(k+1) \tag{4·6}$$

$$\rho=1-\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)\frac{2k^2+3k-1}{6(k+1)(q-1)} \qquad (4\cdot7)$$

이다. 이 ρ와 f를 使用하면 $-2\rho\log\lambda^*$의 分布는 漸近的으로 自由度 f의 χ^2分布가 된다. $\rho(0<\rho\leq1)$에 對하여 γ_r, $r=1,2,3,4$를 셈하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=\frac{k}{24\rho}\left[(2k^2+3k-1)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)-6(1-\rho)(q-1)(k+1)\right]\\
\gamma_2&=\frac{k}{48\rho^2}\left[6(1-\rho)^2(q-1)(k+1)-2(1-\rho)(2k^2+3k-1)\left(\sum_{h}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)\right.\\
&\qquad\left.+(k-1)(k+1)(k+2)\left(\sum_{h}^{1}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)\right]\\
\gamma_3&=\frac{1}{12\rho^3}\left[-(1-\rho)^3k(k+1)(q-1)+\frac{1}{2}(1-\rho)^2k(2k^2+3k-1)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)\right.\\
&\qquad-\frac{1}{2}(1-\rho)(k-1)k(k+1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)\\
&\qquad\left.+\frac{1}{60}k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^3}-\frac{1}{\nu^3}\right)\right]\\
\gamma_4&=\frac{-1}{20\rho^4}\left[-\frac{5}{4}(1-\rho)^4k(k+1)(q-1)+\frac{5}{6}(1-\rho)^3k(2k^2+3k-1)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)\right.\\
&\qquad-\frac{5}{4}(1-\rho)^2(k-1)k(k+1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{12}(1-\rho)k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^3}-\frac{1}{\nu^3}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{1}{24}(k-1)\left\{2k^5+8k^4+3k^3-17k^2-14k\right\}\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^4}-\frac{1}{\nu^4}\right)\right]
\end{aligned}\right\}(4\cdot8)$$

$\gamma_1=0$을 滿足하는 ρ에 對하여는

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_2&=\frac{k(k+1)}{48\rho^2}\left[(k-1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)-6(1-\rho)^2(q-1)\right]\\
\gamma_3&=\frac{k}{12\rho^3}\left[2(1-\rho)^3(q-1)(k+1)\right.\\
&\qquad-\frac{1}{2}(1-\rho)(k-1)(k+1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)\\
&\qquad\left.+\frac{1}{60}(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^3}-\frac{1}{\nu^3}\right)\right]\\
\gamma_4&=\frac{-1}{20\rho^4}\left[\frac{15}{4}(1-\rho)^4k(k+1)(q-1)\right.
\end{aligned}\right\}(4\cdot9)$$

$$-\frac{5}{4}(1-\rho)^2(k-1)k(k+1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)$$

$$+\frac{1}{12}(1-\rho)k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^3}-\frac{1}{\nu^3}\right)$$

$$-\frac{1}{24}(k-1)(2k^5+8k^4+3k^3-17k^2-14k)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^4}-\frac{1}{\nu^4}\right)\Bigg]$$

이며 $\rho=1$일 때의 γ_r의 값 γ'_r는

$$\gamma'_1=\frac{k}{24}(2k^2+3k-1)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h}-\frac{1}{\nu}\right)$$

$$\gamma'_2=\frac{k}{48}(k^2-1)(k+2)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)$$

$$\gamma'_3=\frac{k}{720}(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^3}-\frac{1}{\nu^3}\right) \qquad (4\cdot10)$$

$$\gamma'_4=\frac{1}{480}(k-1)(2k^5+8k^4+3k^3-17k^2-14k)\left(\sum_{h=1}^{q}\frac{1}{\nu_h^4}-\frac{1}{\nu^4}\right)$$

이다. 이들을 利用하여 두 漸近分布의 確率을 比較하면 다음 表 3, 4와 같다.

表 3. $k=4$. $q=5$. $\nu=\sum_i \nu_i$ 일 때 5% 및 1% 有意點에 對한 等共分散檢定의 比較

ν	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	f	ρ		5% M	5% 正確	5% 級數	1% M	1% 正確	1% 級數
95	19	19	19	19	19	40	1.0000	W	55.76	0.1223	0.1167	63.70	0.0339	0.0302
							0.9095	B	61.31	0.0515	0.0515	70.04	0.0104	0.0104
200	40	40	40	40	40	40	1.0000	W	55.76	0.0772	0.0767	63.70	0.0180	0.0177
							0.9570	B	58.27	0.0503	0.0503	66.56	0.0101	0.0101
95	9	9	19	29	29	40	1.0000	W	55.76	0.1591	0.1400	63.70	0.0522	0.0403
							0.8806	B	63.32	0.0576	0.0562	72.34	0.0123	0.0118
200	20	20	40	60	60	40	1.0000	W	55.76	0.0878	0.0862	63.70	0.0216	0.0206
							0.9451	B	59.00	0.0511	0.0511	67.40	0.0103	0.0103
95	9	9	9	9	59	40	1.0000	W	55.76	0.2207	0.1801	63.70	0.0845	0.0569
							0.8384	B	66.51	0.0609	0.0594	75.98	0.0133	0.0128
200	20	20	20	20	120	40	1.0000	W	55.76	0.1071	0.1011	63.70	0.0274	0.0252
							0.9272	B	60.14	0.0516	0.0516	68.70	0.0105	0.0105

45	9	9	9	9	9	40	1.0000	W	55.76	0.2678	0.2084	63.70	0.1111	0.0696
							0.8089	B	68.93	0.0600	0.0586	78.75	0.0130	0.0125
200	50	10	60	20	60	40	1.0000	W	55.76	0.1067	0.1012	63.70	0.0283	0.0253
							0.9289	B	60.03	0.0543	0.0535	68.58	0.0113	0.0110

表 4. k=6, q=3 일 때 5% 및 1% 有意點에 對한 等共分散檢定의 比較

ν	ν_1	ν_2	ν_3	f	ρ	γ_2	γ_1'	γ_2'		5%		1%	
										M	確 率	M	確 率
60	20	20	20	42	1.0000		2.9659	0.2520	W	58.12	0.1746	66.21	0.0496
					0.8588	0.0577			B	67.68	0.0534	77.10	0.0110
120	40	40	40	42	1.0000		1.4841	0.0630	W	58.12	0.0999	66.21	0.0249
					0.9293	0.0122			B	62.54	0.0507	71.25	0.0102
60	10	10	40	42	1.0000		4.6347	0.7105	W	58.12	0.2942	66.21	0.0901
					0.7793	0.3278			B	74.58	0.0691	84.96	0.0156
120	20	20	80	42	1.0000		2.3207	0.1785	W	58.12	0.1404	66,21	0.0380
					0.8895	0.0635			B	65.34	0.0537	74.44	0.0111
30	10	10	10	42	1.0000		5.9341	1.0115	W	58.12	0.3995	66.21	0.1274
					0.7174	0.3363			B	81.01	0.0696	92.29	0.0157
60	10	20	30	42	1.0000		3.7091	0.4655	W	58.12	0.2257	66.21	0.0665
					0.8238	0.2033			B	70.55	0.0619	80.37	0.0135

5. 等平均假說 및 等平均, 等共分散 同時假說檢定

A. $\mu_1=\cdots=\mu_q$의 檢定

$$x_{t\alpha}(k\times 1),\quad \alpha=1,2,\cdots,\nu_t,\quad \sum_{t=1}^{q}\nu_t=\nu. \tag{5·1}$$

를 k 變量 正規母集團 $N(\mu_t,\ \Lambda_t)$에서 抽出된 크기 ν_t의 放意標本이라 한다. 여기서 $t=1,\cdots,q$에 對한 歸無假說

$$H_0;\mu_1=\cdots=\mu_q,\quad (\Lambda_1=\cdots=\Lambda_q=\Lambda) \tag{5·2}$$

(단 Λ는 未知)를 둔다. 이 때 尤度函數는

$$L(\mu_1,\cdots,\mu_q,\Lambda) = (2\pi)^{-\frac{k\nu}{2}}|\Lambda|^{-\frac{\nu}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{\nu_i}(x_{i\alpha}-\mu_i)'\Lambda^{-1}(x_{i\alpha}-\mu_i)\right\} \tag{5·3}$$

이므로 尤度比統計量(伊藤 〔6〕 p125)은

$$\lambda=\frac{\max_{\mu,\Lambda} L(\mu,\cdots,\mu,\Lambda)}{\max_{\mu_1,\cdots,\mu_q,\Lambda} L(\mu_1,\cdots,\mu_q,\Lambda)}=\frac{|Q_W|^{\frac{\nu}{2}}}{|Q_W+Q_B|^{\frac{\nu}{2}}} \tag{5·4}$$

단 $Q_W(k\times k)=\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{\nu_i}(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)'$

$$Q_B(k\times k)=\sum_{i=1}^{q}\nu_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{x}_i-\bar{x})'$$

이다. λ의 h次 積率은

$$E(\lambda^h)=c\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}(\nu-q+1-i+\nu h)]}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}(\nu-j+\nu h)]} \tag{5·5}$$

이므로 [定理2]가 適用된다.

$$a=b=k,\quad x_i=y_j=\nu/2,\quad \xi_i=-\tfrac{1}{2}(q-1+i),$$
$$\eta_j=-j/2,\quad i=1,\cdots,k,\quad j=1,\cdots,k,$$

로 두면

$$f=k(q-1) \tag{5·6}$$
$$\rho=1-(k+q+2)/2\nu$$

를 얻는다. $\gamma_r, r=1,2,3,4$를 셈하면

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=\frac{-1}{4\rho\nu}k(q-1)\{2(1-\rho)\nu-(k+q+2)\}\\
\gamma_2&=\frac{-1}{4\rho^2\nu^2}\Big[-(1-\rho)^2\nu^2k(q-1)-\{(1-\rho)\nu-1\}k(q^2+kq-k-q)\\
&\quad+2\{(1-\rho)\nu-\tfrac{1}{3}\}(q-1)k-\frac{1}{12}\{(k+q-1)^2(k+q)^2-(q-1)^2q^2-k^2(k+1)^2\}\Big]\\
\gamma_3&=\frac{1}{12\rho^3\nu^3}\Big[-2\nu^3(1-\rho)^3(q-1)k+3\nu^2(1-\rho)^2(q-1)k(q+k+2)\\
&\quad-\nu(1-\rho)(q-1)k(3kq+2q^2+3k+5q+3)\\
&\quad+\frac{1}{2}(q-1)k(k+1)(k^2+2q^2+2kq-9q-k+11)+\frac{1}{2}(q-1)^2k(q+1)^2\Big]\\
\gamma_4&=\frac{1}{40\nu^4\rho^4}\Big[5\nu^4(1-\rho)^4(q-1)k-10\nu^3(1-\rho)^3(q-1)k(q+9)
\end{aligned}\right\} \tag{5·7}$$

$$+5\nu^2(1-\rho)^2(q-1)k(2k^2+3kq+2q^2+4k+5q+2)$$
$$-\frac{5}{2}\nu(1-\rho)(q-1)k(k^3+2q^3+4k^2q+6k^2+10kq+7k+4q+6q^2+4kq^2)$$
$$+\frac{5}{2}(q-1)(q+1)k^2(k+1)^2+\frac{5}{2}(q-1)^4k(k+1)+\frac{5}{3}q(q-1)(q+1)k(k+1)(2k+1)$$

$$+\frac{1}{3}(q-1)k(3q^4+3q^3-7q^2-7q+104)+5(q-1)k\left(\frac{1}{5}k^4+\frac{1}{2}k^3+\frac{1}{3}k^2-\frac{1}{30}\right)\Big]$$

$\rho=1$일 때

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1' &= \frac{1}{4\nu}k(q-1)(k+q+2)\\
\gamma_2' &= \frac{1}{4\nu^2}\Big[k\left(q^2+kq-k-\frac{1}{3}q-\frac{2}{3}\right)\\
&\qquad +\frac{1}{12}\{(q+k-1)^2(k+q)^2-(q-1)^2q^2-k^2(k+1)^2\}\Big]\\
\gamma_3' &= \frac{1}{12\nu^3}\Big[\frac{1}{2}(q-1)k(k+1)(k^2+2q^2+2kq-9q-k+11)+\frac{1}{2}(q-1)^2k(q+1)^2\Big]\\
\gamma_4' &= \frac{1}{40\nu^4}\Big[\frac{5}{2}(q-1)(q+1)k^2(k+1)^2+\frac{5}{2}(q-1)^4k(k+1)\\
&\qquad +\frac{5}{3}q(q-1)(q+1)k(k+1)(2k+1)\\
&\qquad +\frac{1}{3}(q-1)k(3q^4+3q^3-7q^2-7q+104)\\
&\qquad +5(q-1)k\left(\frac{1}{5}k^4+\frac{1}{2}k^3+\frac{1}{3}k^2-\frac{1}{30}\right)\Big]
\end{aligned}\right\} \quad (5\cdot 8)$$

이 때의 確率은 k, q가 定해지면 總標本數 ν에만 關係된다.

$k=4$, $q=5$, $f=16$ 및 $k=3$, $q=6$, $f=15$일 때의 두 檢定統計量의 確率을 比較하면 表 5와 같다

表 5. k=4, q=5 및 k=3, q=6 일 때 等平均假說檢定의 比較

ν	f	ρ	γ_2	γ_1'	γ_2'		5 % M	5 % 確率	1 % M	1 % 確率
40	16	1.0000		1.1000	0.0813	W	26.296	0.1182	32.000	0.0316
		0.8625	0.0076			B	30.488	0.0508	37.101	0.0103
	15	1.0000		1.1000	0.0813	W	24.996	0.1210	30.578	0.0326
		0.8625	0.0076			B	30.488	0.0508	35.453	0.0103
50	16	1.0000		0.8800	0.0520	W	26.296	0.1012	32.000	0.0259
		0.8900	0.0045			B	29.546	0.0505	35.955	0.0101
	15	1.0000		0.8800	0.0520	W	24.966	0.1034	30.578	0.0266
		0.8900	0.0045			B	29.546	0.0505	34.357	0.0102
60	16	1.0000		0.7333	0.0361	W	26.296	0.0909	32.000	0.0224
		0.9083	0.0030			B	28.951	0.0503	35.231	0.0101
	15	1.0000		0.7333	0.0361	W	24.996	0.0925	30.578	0.0230
		0.9083	0.0030			B	28.951	0.0503	33.665	0.0101
80	16	1.0000		0.5500	0.0230	W	26.296	0.0789	32.000	0.0185
		0.9313	0.0016			B	28.236	0.0502	34.361	0.0101
	15	1.0000		0.5500	0.0230	W	24.996	0.0801	30.578	0.0190
		0.9313	0.0016			B	28.236	0.0502	32.834	0.0101

100	16	1.0000 0.9450	 0.0010	0.4400	0.0130	W B	26.296 27.827	0.0723 0.0501	32.000 33.862	0.0165 0.0100
	15	1.0000 0.9450	 0.0010	0.4400	0.0130	W B	24.996 27.827	0.0732 0.0501	30.578 32.358	0.0168 0.0100

B. $\mu_1=\cdots=\mu_q$, $\Lambda_1=\cdots=\Lambda_q$ 의 檢定

$x_{t\alpha}$, $\alpha=1,2,\cdots,n_t$ 를 p 變量 正規母集團 $N(\mu_t, \Lambda_t)$에서 抽出한 크기 n_t의 放意標本이라 한다. $t=1,\cdots,q$일 때 歸無假說

$$\mathrm{H}_0;\ \mu_1=\cdots=\mu_q,\quad \Lambda_1=\cdots=\Lambda_q \tag{5·9}$$

을 檢定하기 위한 尤度比統計量 (伊藤[6] p136)은

$$\lambda=\left(\prod_{t=1}^{q}\frac{|V|^{\frac{1}{2}n_t}}{n_t^{\frac{1}{2}pn_t}}\right)\frac{n^{\frac{1}{2}pn}}{|V+B|^{\frac{1}{2}n}} \tag{5·10}$$

$$V_t=\sum_{\alpha=1}^{n_t}(x_{t\alpha}-\bar{x}_t)(x_{t\alpha}-\bar{x}_t)',\quad V=\sum_{t=1}^{q}V_t,\quad n=\sum_{t=1}^{q}n_t$$

$$B=\sum_{t=1}^{q}n_t(\bar{x}_t-\bar{x})(\bar{x}_t-\bar{x})',\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{q}n_t\bar{x}_t.$$

λ를 若干 修正한 統計量

$$\lambda_1=\frac{\prod_{t=1}^{q}|V_t|^{\frac{1}{2}\nu_t}}{|V+B|^{\frac{1}{2}\nu}}\quad (\text{단 } \nu_t=n_t-1,\ \ \nu=\sum_{t=1}^{q}\nu_t=n-q) \tag{5·11}$$

를 使用하여

$$w=\lambda_1\nu^{\frac{1}{2}k\nu}\prod_{t=1}^{q}\nu_t^{-\frac{1}{2}k\nu_t} \tag{5·12}$$

라 두면

$$E(w^h)=c\left(\frac{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\prod_{t=1}^{q}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\nu_t}{2}\right)^{\frac{\nu_t}{2}}}\right)^h\frac{\prod_{t=1}^{q}\prod_{i=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\nu_t(1+h)+\frac{1}{2}(1-i)]}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma[\frac{1}{2}\nu(1+h)+\frac{1}{2}(q-j)]} \tag{5·13}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} f&=\frac{1}{2}(q-1)k(k+3)\\ \rho&=1-\left(\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{\nu_t}-\frac{1}{\nu}\right)\frac{2k^2+3k-1}{6(q-1)(k+3)}-\frac{k-q+2}{\nu(k+3)} \end{aligned} \tag{5·14}$$

일 때 $-2\rho\log w$ 는 漸近的으로 自由度 f의 χ^2 分布를 한다. [定理2]에 對應시키면

$$a=kq,\quad x_i=\tfrac{1}{2}\nu_t,\quad i=(t-1)k+1,\cdots,\ tk,\quad t=1,\cdots,q,$$

$$\xi_i=\xi_{k+i}=\cdots=\xi_{(q-1)k+i}=\tfrac{1}{2}(1-i),\quad i=1,2,\cdots,k$$

$$b=k,\quad y_j=\tfrac{1}{2}\nu,\quad \eta_j=\tfrac{1}{2}(q-j),\quad j=1,\cdots,k.$$

와 같다. γ_r, $r=1,2,3,4$를 求하면

$$
\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{24\rho}\Big[-6(1-\rho)k(k+3)(q-1)+k(2k^2+3k-1)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big) \\
&\qquad +6(q-1)(k-q+2)\frac{1}{\nu}\Big] \\
\gamma_2 &= \frac{k}{48\rho^2}\Big[6(1-\rho)^2(q-1)(k+3)-2(1-\rho)(2k^2+3k-1)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big) \\
&\qquad +(k-1)(k+1)(k+2)\Big(\sum\frac{1}{\nu_i^2}-\frac{1}{\nu^2}\Big)+12(1-\rho)(q-1)(k-q+2)\frac{1}{\nu} \\
&\qquad -2(q-1)(3kq-2k^2-2q^2-6k+7q-4)\frac{1}{\nu^2}\Big] \\
\gamma_3 &= \frac{1}{24\rho^3}\Big[-2(1-\rho)^3k(k+3)(q-1)+(1-\rho)^2k(2k^2+3k-1)\Big(\sum\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big) \\
&\qquad -(1-\rho)(k-1)k(k+1)(k+2)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^2}-\frac{1}{\nu^2}\Big) \\
&\qquad +\frac{1}{30}k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^3}-\frac{1}{\nu^3}\Big) \\
&\qquad +6(1-\rho)^2(q-1)k(k-q+2)\frac{1}{\nu} \\
&\qquad -2(1-\rho)(q-1)k(2k^2+2q^2-3kq+6k-7q+4)\frac{1}{\nu^2} \\
&\qquad +(q-1)k(k^3-q^3-2k^2q+2kq^2+4k^2+5q^2+4k-6q-7kq)\frac{1}{\nu^3}\Big] \\
\gamma_4 &= \frac{-1}{20\rho^4}\Big[-\frac{5}{4}(1-\rho)^4k(k+3)(q-1) \\
&\qquad +\frac{5}{6}(1-\rho)^3k(2k^2+3k-1)\Big(\sum\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big) \\
&\qquad -\frac{5}{4}(1-\rho)^2(k-1)k(k+1)(k+2)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^2}-\frac{1}{\nu^2}\Big) \\
&\qquad +\frac{1}{12}(1-\rho)k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^3}-\frac{1}{\nu^3}\Big) \\
&\qquad -\frac{1}{24}k(2k^5+6k^4-5k^3-20k^2+3k+14)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^4}-\frac{1}{\nu^4}\Big)
\end{aligned}\right\} \quad (5\cdot15)
$$

$$
\begin{aligned}
&+5(1-\rho)^3(q-1)k(k-q+2)\frac{1}{\nu} \\
&-\frac{5}{2}(1-\rho)^2(q-1)k(2k^2+2q^2-3kq+6k-7q+4)\frac{1}{\nu^2} \\
&-\frac{5}{2}(1-\rho)(q-1)k(-k^3+q^3+2k^2q-2kq^2+7kq-4k^2-5q^2-4k+6q)\frac{1}{\nu^3} \\
&-\frac{1}{12}(q-1)(6k^5+30k^4+40k^3-16k-15k^4q+20k^3q^2-70k^3q
\end{aligned}
$$

$$-15k^2q^3+75k^2q^2-90k^2q+6\,kq^4-39\,q^3+71\,kq^2-19kq)\frac{1}{\nu^4}\Big]$$

$\gamma_1=0$ 되는 ρ에 對하여

$$\gamma_2=\frac{k}{288\rho^2}\Big[\,6(k-1)(k+1)(k+2)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^2}-\frac{1}{\nu^2}\Big)$$

$$-\frac{(2k^2+3k-1)^2}{(q-1)(k+3)}\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big)^2-12\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big)\frac{(2k^2+3k-1)(k-q+2)}{\nu(k+3)}$$

$$-36\frac{(q-1)(k-q+2)^2}{\nu^2(k+3)}-\frac{12(q-1)}{\nu^2}(3kq-2k^2-2q^2-6k+7q-4)\Big] \qquad (5\cdot16)$$

$\rho=1$ 일 때

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1'&=\frac{1}{24}\Big[\,k(2k^2+3k-1)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i}-\frac{1}{\nu}\Big)+6k(q-1)(k-q+2)\frac{1}{\nu}\Big]\\
\gamma_2'&=\frac{1}{48}\Big[\,(k-1)(k+1)(k+2)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^2}-\frac{1}{\nu^2}\Big)\\
&\qquad-2(q-1)(3kq-2k^2-2q^2-6k+7q-4)\frac{1}{\nu^2}\Big]\\
\gamma_3'&=\frac{1}{24}\Big[\,\frac{1}{30}k(6k^4+15k^3-10k^2-30k+3)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^3}-\frac{1}{\nu^3}\Big)\\
&\qquad+(q-1)k(k^3-q^3-2k^2q+2kq^2+4k^2+5q^2+4k-6q-7kq)\frac{1}{\nu^3}\Big]\\
\gamma_4'&=\frac{1}{20}\Big[\,\frac{k}{24}(2k^5+6k^4-5k^3-20k^2+3k+14)\Big(\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\nu_i^4}-\frac{1}{\nu^4}\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{12}(q-1)(6k^5+30k^4+40k^3-16k-15k^4q+20k^3q^2-70k^3q\\
&\qquad-15k^2q^3+75k^2q^2-90k^2q+6kq^4-39q^3+71kq^2-19kq)\frac{1}{\nu^4}\Big]
\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot17)$$

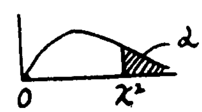
이 때 $k=5$, $q=5$인 두 漸近分布의 確率을 比較하면 다음 表 6과 같다.

表 6. $k=5$. $q=5$ 일 때 等平均 및 等共分散檢定의 比較

ν	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	f	ρ	γ_1	γ_1'	γ_2'		5 % M	5 % 確率	1 % M	1 % 確率
100	20	20	20	20	20	80	1.0000		3.3000	0.2190	W	101.88	0.1405	112.33	0.0376
							0.9225	0.0974			B	110.44	0.0539	121.77	0.0111
150	30	30	30	30	30	80	1.0000		2.2000	0.0888	W	101.88	0.1029	112.33	0.0257
							0.9484	0.0418			B	107.42	0.0517	118.44	0.0105
200	40	40	40	40	40	80	1.0000		1.6500	0.0543	W	101.88	0.0872	112.33	0.0208
							0.9613	0.0407			B	105.98	0.0516	116.85	0.0105
100	10	10	20	20	40	80	1.0000		4.3000	0.4483	W	101.88	0.1837	112.33	0.0514
							0.8975	0.2696			B	113.52	0.0607	125.16	0.0130

150	15	15	30	30	60	80	1.0000		2.8670	0.1980	W	101.88	0.1263	112.33	0.0330
							0.9317	0.1116			B	109.35	0.0546	120.56	0.0113
200	20	20	40	40	80	80	1.0000		2.1500	0.1121	W	101.88	0.1024	112.33	0.0255
							0.9488	0.0603			B	102.82	0.0524	118.39	0.0107
50	10	10	10	10	10	80	1.0000		6.2000	0.8760	W	101.88	0.2772	112.33	0.0823
							0.8449	0.4550			B	120.58	0.0681	132.95	0.0151
150	10	40	20	50	30	80	1.0000		2.9614	0.2556	W	101.88	0.1314	112.33	0.0346
							0.9278	0.1644			B	109.81	0.0565	121.07	0.0119
100	10	10	10	10	60	80	1.0000		5.5227	0.7055	W	101.88	0.2413	112.33	0.0704
							0.8669	0.4313			B	117.52	0.0671	129.58	0.0149
200	20	20	20	20	120	80	1.0000		2.7607	0.1678	W	101.88	0.1219	112.33	0.0316
							0.9335	0.0936			B	109.14	0.0537	120.33	0.0111

表 7. $\alpha=0.05$, f; 自由度, χ^2: 自由度 f, 危險率 0.05 에 對한 有意點



f	χ^2	f+2	確 率	f+4	確 率	f+6	確 率	f+8	確 率
1	3.841	3	0.2792	5	0.5725	7	0.7979	9	0.9216
2	5.991	4	0.1998	6	0.4242	8	0.6482	10	0.8160
3	7.815	5	0.1667	7	0.3492	9	0.5529	11	0.7298
4	9.488	6	0.1479	8	0.3028	10	0.4865	12	0.6608
5	11.070	7	0.1356	9	0.2709	11	0.4374	13	0.6050
6	12.592	8	0.1267	10	0.2474	12	0.3994	14	0.5589
7	14.067	9	0.1200	11	0.2293	13	0.3691	15	0.5205
8	15.507	10	0.1146	12	0.2149	14	0.3444	16	0.4879
9	16.919	11	0.1103	13	0.2030	15	0.3237	17	0.4599
10	18.307	12	0.1067	14	0.1932	16	0.3062	18	0.4356
11	19.675	13	0.1036	15	0.1848	17	0.2912	19	0.4144
12	21.026	14	0.1010	16	0.1775	18	0.2781	20	0.3956
13	22.362	15	0.0987	17	0.1712	19	0.2666	21	0.3789
14	23.685	16	0.0966	18	0.1656	20	0.2564	22	0.3640
15	24.996	17	0.0948	19	0.1607	21	0.2473	23	0.3505
16	26.296	18	0.0932	20	0.1563	22	0.2392	24	0.3383
17	27.587	19	0.0917	21	0.1523	23	0.2318	25	0.3272
18	28.869	20	0.0904	22	0.1486	24	0.2251	26	0.3171
19	30.144	21	0.0891	23	0.1453	25	0.2189	27	0.3077
20	31.410	22	0.0880	24	0.1423	26	0.2134	28	0.2992

21	32.671	23	0.0870	25	0.1395	27	0.2081	29	0.2912
22	33.924	24	0.0860	26	0.1369	28	0.2034	30	0.2839
23	35.172	25	0.0851	27	0.1346	29	0.1989	31	0.2770
24	36.415	26	0.0843	28	0.1323	30	0.1948	32	0.2706
25	37.652	27	0.0835	29	0.1303	31	0.1910	33	0.2647
26	38.885	28	0.0828	30	0.1283	32	0.1873	34	0.2591
27	40.113	29	0.0821	31	0.1265	33	0.1840	35	0.2538
28	41.337	30	0.0815	32	0.1248	34	0.1808	36	0.2489
29	42.557	31	0.0808	33	0.1232	35	0.1778	37	0.2442
30	43.773	32	0.0803	34	0.1217	36	0.1750	38	0.2398
40	55.76	42	0.0758	44	0.1100	46	0.1534	48	0.2061
42	58.12	44	0.0752	46	0.1084	48	0.1503	50	0.2011
50	67.51	52	0.0728	54	0.1024	56	0.1394	58	0.1841
60	79.08	62	0.0707	64	0.0971	66	0.1296	68	0.1687
70	90.53	72	0.0690	74	0.0929	76	0.1222	78	0.1570
80	101.88	82	0.0677	84	0.0897	86	0.1163	88	0.1479
90	113.15	92	0.0666	94	0.0870	96	0.1116	98	0.1405
100	124.34	102	0.0657	104	0.0849	106	0.1077	108	0.1346

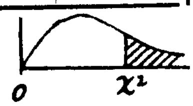


表 8. $\alpha=0.01$. f: 自由度, χ^2: 自由度 f, 危險率 0.01에 對한 有意點

f	χ^2	f+2	確 率	f+4	確 率	f+6	確 率	f+8	確 率
1	6.635	3	0.0845	5	0.2492	7	0.4678	9	0.6751
2	9.210	4	0.0561	6	0.1621	8	0.3249	10	0.5123
3	11.341	5	0 0450	7	0.1244	9	0.2531	11	0.4152
4	13.277	6	0.0388	8	0.1027	10	0.2086	12	0.3492
5	15.086	7	0.0349	9	0.0886	11	0.1786	13	0.3020
6	16.812	8	0.0321	10	0.0786	12	0.1568	14	0.2663
7	18.475	9	0.0300	11	0.0712	13	0.1403	15	0.2385
8	20.090	10	0.0284	12	0.0654	14	0.1273	16	0.2162
9	21.666	11	0.0271	13	0.0608	15	0.1169	17	0.1979
10	23.209	12	0.0260	14	0.0570	16	0.1083	18	0.1827
11	24.725	13	0.0251	15	0.0538	17	0.1010	19	0.1698
12	26.217	14	0.0243	16	0.0511	18	0.0949	20	0.1588
13	27.688	15	0.0236	17	0.0487	19	0.0896	21	0.1492
14	29.141	16	0.0230	18	0.0467	20	0.0850	22	0.1409
15	30.578	17	0.0225	19	0.0449	21	0.0810	23	0.1335
16	32.000	18	0.0220	20	0.0433	22	0.0774	24	0.1270
17	33.409	19	0.0216	21	0.0419	23	0.0742	25	0.1212
18	34.805	20	0.0212	22	0.0406	24	0.0713	26	0.1159
19	36.191	21	0.0208	23	0.0394	25	0.0688	27	0.1112
20	37.566	22	0.0205	24	0.0384	26	0.0664	28	0.1069

21	38.932	23	0.0202	25	0.0374	27	0.0643	29	0.1030
22	40.289	24	0.0199	26	0.0365	28	0.0623	30	0.0994
23	41.638	25	0.0197	27	0.0357	29	0.0605	31	0.0961
24	42.980	26	0.0194	28	0.0350	30	0.0588	32	0.0930
25	44.314	27	0.0192	29	0.0343	31	0.0573	33	0.0902
26	45.642	28	0.0190	30	0.0336	32	0.0559	34	0.0876
27	46.963	29	0.0188	31	0.0330	33	0.0545	35	0.0852
28	48.278	30	0.0186	32	0.0324	34	0.0533	36	0.0829
29	49.588	31	0.0184	33	0.0319	35	0.0521	37	0.0808
30	50.892	32	0.0183	34	0.0314	36	0.0510	38	0.0788
40	63.70	42	0.0170	44	0.0275	46	0.0429	48	0.0641
42	66.21	44	0.0168	46	0.0270	48	0.0417	50	0.0620
50	76.15	52	0.0162	54	0.0252	56	0.0379	58	0.0552
60	88.38	62	0.0156	64	0.0235	66	0.0344	68	0.0490
70	100.43	72	0.0151	74	0.0222	76	0.0318	78	0.0446
80	112.33	82	0.0148	84	0.0213	86	0.0300	88	0.0414
90	124.12	92	0.0144	94	0.0204	96	0.0283	98	0.0385
100	135.81	102	0.0142	104	0.0198	106	0.0270	108	0.0364

6. 結 論

確率을 求함에 있어서 小數点아래 4자리까지 셈하였으나 다른 因子關係로 確率은 곳에 따라서는 誤差가 끝자리에 影響을 미친 곳도 있다. 그리고 表에서 級數라 한 것은 γ_2 項까지의 漸近確率이고 正確한 確率이라 함은 γ_4 項까지의 漸近確率을 셈한 것이다. 이 때 Box의 漸近分布에서는 거의 正確한 값과 一致한다. 或 若干의 誤差가 있다해도 우리들의 結論을 얻는 데는 支障이 없다.

1. 獨立性檢定에서는 表 1, 2에서 보는 바와 같이 Box의 漸近 χ^2 分布는 $\gamma_1=0$으로 하는 ρ 값을 取하면 收斂이 빨라서 작은 標本數로도 γ_2 項까지 셈하여 確率이 잘 一致한다. 大多數의 境遇는 이로서 充分하다. 다시 γ_4 項까지 計算을 하면 거의 모든 境遇에 對해서 小數点아래 4자리까지는 正確하다. 特히 自由度가 작을 때는 작은 標本數로도 收斂이 大端히 빠르다.

그러나 極限分布와는 若干의 距離가 있으므로 檢定에 實用되기에는 標本數가 相當히 커야 된다는 것도 알 수 있다.

2. 等共分散檢定에도 Box의 漸近 χ^2 分布는 大端히 잘 收斂한다. 表 3에 의하면 各 母集團에서의 標本數가 같을 때는 比較的 確率이 잘 收斂하나 標本數가 均一하지 않을 때에는 確率의 收斂이 느리다. 따라서 큰 標本數를 要하며 γ_4 項까지 셈하여도 正確한 確率과의 一致는 疑心스러울 때가 있다.

表 4에 의하면 母數가 많고 母集團의 數가 작을 때는 確率의 收斂이 더욱 緩慢하며 實用性이 멀다.

檢定에 實用되기에는 獨立性의 檢定 때 보다 훨씬 더 큰 標本數를 要한다.

3. 等平均檢定에서는 表 5에 依하면 Box의 漸近χ^2分布는 比較的 잘 收斂한다. 더욱 이 때에는 標本의 總數에만 關係되므로 總數만 크게하면 確率은 빨리 收斂한다. 그러나 等平均 및 等共分散檢定은 確率의 收斂이 大端히 느리다. 그러므로 아직 實用性에는 距離가 먼 것 같다.

4. Wilks의 漸近分布는 獨立性의 境遇나 等共分散의 境遇나 다 確率의 收斂이 너무 緩慢하여 檢定에 利用할 수가 없다.

한편 Box의 漸近 χ^2 分布는 $\gamma_1=0$으로 둘 때 γ_2項까지만 셈하여도 大端이 收斂이 빨라 相當히 正確한 確率을 求할 수 있으며 實用性이 있다고 보아진다. 그러나 Box의 境遇도 獨立性 檢定의 特殊한 境遇 外에는 아직도 많은 問題가 남아 있다고 思慮된다.

끝으로 이 論文에 必要한 文獻蒐集에 많은 協助를 해주신 釜山大學校 尹鍾柄教授와 確率計算을 위하여 많은 수고를 해주신 東亞大學校 崔在龍教授에게 深甚한 感謝를 드리는 바이다.

參考文献

(1) G. E. P. Box: A general distribution theory for a class of likelihood criteria, Biometrika (1949) 36. p. 317～346.

(2) Anderson: An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, (1958) John Wiley & Sons.

(3) E. T. Whittaker & G. N. Watson: A course of Modern Analysis, Cambridge University. (1952)

(4) 鹽谷 實: 多變數解析論の最近の10年間における歩み, 統計數理研究所彙報(1961) 第3卷, 第2號 p. 95～142.

(5) 北川敏男: 多變量解析論, 情報科學講座 A. 5. 3. 共立社, 1966.

(6) 伊藤孝一: 多變量解析の理論, 新統計學シリーズ=5 培風館, 1970.

(1)

美國 俗語의 造語法에 關한 研究

朴 培 英

A STUDY ON WORD-FORMATION IN AMERICAN SLANG

By

Pak, Bae-yung

目 次

Abstract

In this paper American slang is collected and analyzed by linguistic processes in order to find out how it is created and used.

Among many linguistic processes by which slang is formed, compounding is most common and used so often and its tendency is that more words consisted of different parts of speech are used, which is a very rare phenomenon in standard speech.

1. 緖 言

本論文에서는 美國國民들이 使用하고 있는 slang을 廣範圍하게 수집해서 그것을 linguistic process에 依據해서 分析하고 分類함으로써 slang이 어떻게 조어되고 있는가를 규명하고자 한다. 많은 조어방법 中에서 가장 많이 普遍的으로 使用되고 있는것은 compounding이며 最近에는 사람들의 지나친 조어 의욕의 발휘까닭으로 여러가지 다른 品詞로 된 낱말이 使用되어 가는 傾向을 나타내고 있으며 이러한 現象은 standard speech에서는 보기 어려운 것이라고 생각된다.

slang이 무엇이냐 물으면 정의 하기가 대단히 어려운 것이며, Paul Roberts는 Understanding English에서 이렇게 말하고 있다. "Slang is one of those things that everybody can recognize and