

# FDM에 의한 음향전달모델 개발 및 근거리 음향토모그래피에 응용

이 용 곤<sup>1)</sup>, 김 재 수<sup>2)</sup>

Sound Propagation Model Based on FDM and  
Application to Simple Acoustic Tomography

Yong-Gon Lee, Jea-Soo Kim

## Abstract

In this thesis, the wave propagation problem is studied by solving the 2-dimensional wave equation based on the explicit and inhomogeneous finite difference method, which is widely used in the area of short range or low frequency wave propagation problems such as scattering by complex bodies and seismo-acoustic propagation.

The development of computer code involves the treatment of source injection and numerical boundary reflections. In this study, the source injection algorithm and its error analysis is discussed in detail, and the numerical boundary is treated based in the earlier studies.

The developed model is applied to the short range acoustic tomography, which involves weakly inhomogeneous media. The numerical examples show that the short scale acoustic tomography is possible under limited conditions.

1) 한국해양대학교 해양공학과 석사과정 수중음향 전공

2) 한국해양대학교 해양공학과 교수

## 1. 서 론

이 논문에서는 기존의 유한차분법(finite difference method)과 파동방정식(wave equation)을 바탕으로 하여 음향전달모델을 개발하고, 이를 해양학적 역추정 방법인 음향토폴로그래피에 적용하여, 음향전달모델에 의한 음향현상의 이해 및 그 응용성을 알아보는 데에 그 목적이 있다. 이러한 FDM모델은 해양음향현상의 정확한 예측을 위한 요구에 대해 다른 기존 모델들에 비교하여 대단히 적합한 모델이며 앞으로의 음향연구분야에서도 많은 발전 가능성이 있는 모델이다.

해양의 물리적인 성질이 음향신호의 전파에 대하여 어떠한 영향을 주는가를 명확히 알 수 있으면, 수신된 음향신호로부터 해양에 관한 정보를 역으로 뽑아낼 수 있다. 이와 같은 생각으로부터 Munk와 Wunsch[10]가 음향전달을 이용하여 해양변동을 파악할 수 있는 해양 음향 토폴로그래피(ocean acoustic tomography)를 제안하였다. 이 논문에서는 이러한 실제적인 해양음향토폴로그래피를 모방한 단거리 음향토폴로그래피로서, 현실적인 응용면보다는 토폴로그래피의 원리에 충실한 것으로서 그 의의를 가질 수 있을 것이다.

## 2. 유한차분법에 의한 파동방정식 해석

### 2.1 파동방정식(Wave Equation)

일반적으로 음파는 유체매질에서의 탄성파(elastic wave)이기 때문에 음파는 이러한 탄성파의 파동방정식에 지배를 받는다. 매질의 특성변수인 Lamé의 탄성계수  $\lambda, \mu$ 가 공간적으로 변화되는 불균질 탄성매질에서의 운동방정식은 다음과 같은 식이 된다(Kelly[6]).

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x, z$ 는 각각 2차원 직각 좌표계에서 직교하는 두 좌표축을 나타내며,  $u$ ,

$w$ 는 각각 두 좌표축 방향으로의 변위를 나타낸다. 균질한 수중환경에서 음파의 전달현상은 앞에서 구한 식 (1)로부터 다음의 벡터에 의한 파동방정식에 의해 지배받는다.

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{a(\vec{r}, t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \quad (2)$$

여기서  $\vec{r}$ 은 공간에서의 위치벡터이고,  $\psi$ 는 시간 및 공간변수로 결정되는 변위포텐셜로 표현되는데, 이와 동가의 물리량으로서 음압을 이용하여 유도할 수도 있다(Burdic[3]). 그리고 우변의  $f(r,t)$ 는 음원함수를 나타낸다.

## 2.2 유한차분식 (Finite Difference Formula)

유한차분정식화는 파동방정식 (1)을 시간 및 공간에 대해 각 항별로 중앙차분법에 의해 차분화시켜 양적차분식(explicit finite difference scheme)으로 유도한다. 이 과정은 Kelly[8]에 자세히 나와 있다. 이 차분식에 대한 안정성 해석(stability analysis)은 균질매질에서의 안정조건에서 가장 보수적인 경우를 취하여 수치시뮬레이션을 수행한 기존의 논문들을 근거로 하여  $\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{2\alpha_{\max}}$ 을 안정조건으로 사용하였다(Kelly[6]).

## 2.3 수치경계 (Numerical Boundary)

전체 수치계산 영역의 제일 바깥 경계면을 표현하는 것이 수치경계조건이다. 이 논문에서는 Reynolds[9]가 제안한 투명경계(transparent boundary)조건을 수정 없이 도입하였다.

# 3. 음원분사법(Source Injection)

## 3.1 음원분사법

점음원은 그 특성상 음원에서 근거리에서 구형전파를 하고 에너지의 공간적인 확산이 충분히 되지 않은 상태이므로 좁은 공간에 큰 에너지를 포함하고 있는 상태이다. 이는 일정한 격자간격을 가진 유한차분법에서 격자와 격자 사이의 변위차도 커지게 하므로 연속계의 이산화에 의한 오차와 지배방정식을 차분식으로 근사화하는 과정에서 발생하는 절단오차(truncation error)를 증폭시킨다. 이들 오차를 줄이기 위해 음원 주위에 음원영역(source region)이라 하여 구형의 작은 영역(spherical region)을 설정하고 이 영역을 유한차분법에 의한 음원으로 하여 파를 전달시킨다.

### 3.2 음원분사법 알고리즘

그림 1과 같이 음원을 중심으로 한 수치영역을 두 부분으로 분리하여 고려한다. 음원을 포함한 균질의 유체영역을 내부영역(interior domain)으로 하고, 음원으로부터 일정한 거리의 격자들을 경계로 하여 그 바깥의 불균질한 영역을 외부영역(exterior domain)으로 정의하여 음원분사법 알고리즘을 적용한다.

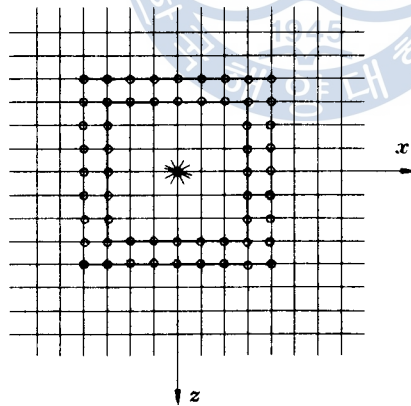


그림 1. 음원분사법의 격자 및 음원경계.

그림 1과 같은 음원영역에서 음원신호가 유한차분법에 의해 전파되는 과정을 계산하는 알고리즘은 다음과 같다. ①외부영역에서 전체변위(total field)를 계산.

②경계 B에서 여분변위값(residual field)을 계산,  $U_R = U_T - U_S$  ③경계 A에서

의 여분변위값을 이용하여 유한차분법에 의해 내부영역에서의 여분변위값 계산. ④ 경계  $B$ 에서 전체변위값을 계산,  $U_T = U_R + U_S$  ⑤ 경계  $B$ 의 전체변위값을 이용하여 유한차분법에 의해 외부영역에서 전체변위값을 계산.

### 3.2 해석적 음원신호

음원영역은 균질유체영역으로 가정하며 이 영역의 경계에서 해석적 음원함수를 계산한다. 음원함수의 계산시에는 불균질 매질에 대한 2차원 파동방정식을 균질유체매질에 적용하여 적분변환에 의해 폰다(Frickel[5]). 식 (2)의 변위포텐셜로부터 변위  $d_s$ 를 구하면,

$$d_s(r, t) = -\frac{1}{2\pi C_p} A \pi \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega t} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{C_p} |r-r_0|\right) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega \quad (3)$$

이 식에서 각주파수  $\omega$ 에 관한 적분은 역푸리에변환에 의해 시간영역에서의 해석적 음원변위가 계산된다. 그림 2는 식 (3)에 의한 근거리 영역과 원거리 영역에서의 음원신호를 보여준다.

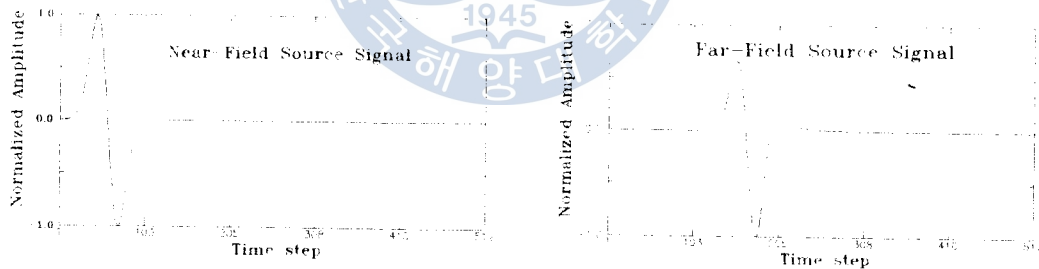


그림 2. 근거리 및 원거리 음원신호의 시간 및 주파수 영역에서의 모양.

### 3.3 선배열음원(Line Array Source)

단일 음원에 의한 경우보다는 여러개의 단일음원을 특정 형태로 배치한 배열(array)음원을 사용하는 것이 실제적인 경우에 보다 가까울 것이다. 배열에 의한 빔을 이용함으로써 수신시 얻을 수 있는 잇점은 다음과 같다. ㉑ 신호에 대한 방위정보(direction information)를 알 수 있다. ㉒ 신호대잡음비(SNR)가 좋아진다. ㉓ 신호의 해상도(resolution)가 좋아진다. 이 논문에서는 앞에서 구현한 점음원 알고리즘을 이용하여 그림 3과 같은 결과로써 FDM에 의한 선배열음원의 적용가

능성을 알아보았다. 다음의 그림 3은 중심 주파수 100Hz, 파장당격자수 20개이고 크기가 8 격자인 5 개의 점음원을 전체길이 L=50격자인 선배열 음원에 의해 시간  $50\Delta t$ 에서 음장을 보여주고 있다.

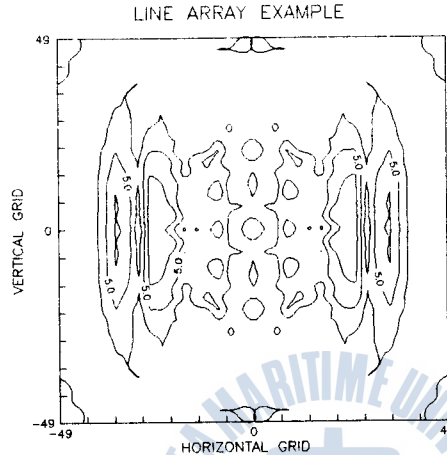


그림 3. 유한차분법으로 구현한 선배열 음원에 의한 실행예.

#### 4. 음원분사법 오차해석

##### 4.3 절단오차

차분정식화 과정에서 고차항의 무시로 인해 발생하는 오차로서 절단오차를 다 음과 같이 음원함수값의 최대값에 대한 오차의 비로서 정의하였다.

$$ERROR = \left| \frac{U_{12SRC} - U_{12}}{U_{12SRC}_{max}} \right| \quad (4)$$

이 계산과정과 동일한 방법으로 각 시간에 따른 오차를 계산하여 그림으로 나타낸 것이 그림 4이다. 이 그림에서 볼 때 오차는 해석적 음원의 최대값에 비하여 근거리 영역에서는 0.2%, 원거리 영역에서는 0.08% 이내의 값을 가진다.

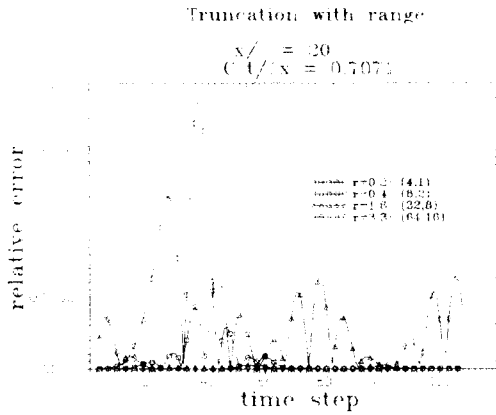
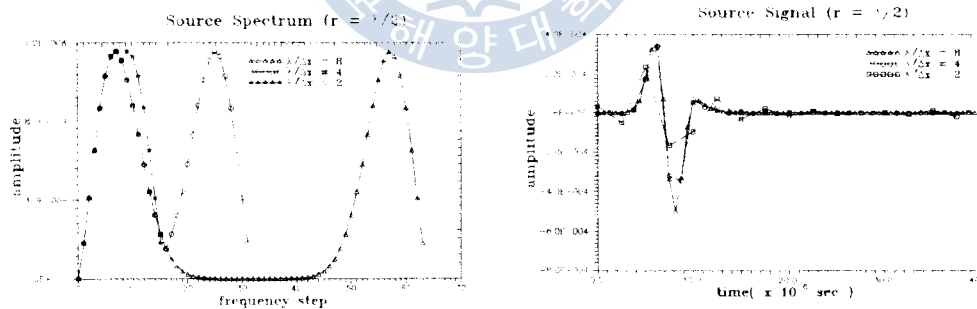


그림 4. 각각의 거리에서 절단오차의 계산 및 비교.

#### 4.4 혼성오차 (Aliasing Error)

해석적 음원신호를 계산하는 과정에서 주파수영역의 해석적 음원함수를 의해 표본화(sampling)하면 시간영역으로 변환할 때 고주파 신호가 혼성되고, 이 혼성에 의해 음원신호가 왜곡되어 나타나는 현상이다.



(a) 해석적 음원 스펙트럼.

(b) 해석적 음원 신호.

그림 5. 거리  $\lambda/2$ 에서 파장당 격자수  $\lambda/\Delta x=2, 4, 8$ 일 때 해석적 음원신호

이 신호에서 보면  $\lambda/\Delta x=4$ 일 때는 나이퀴스트 표본화주파수 (nyquist sampling frequency) 부근에서 약간의 주파수가 겹쳐짐을 볼 수 있는데, 이와같은 혼성에도 불구하고 그림 5.(b)의 시간영역신호에서는  $\lambda/\Delta x=8$ 인 신호에 비해 큰 차이는 없다. 그러나 그림 5.(a)에서 일 때는 신호의 절반 이상이 혼성되어 시간영역에서는 많은 차이를 가진다. 이러한 결과로부터 시간 영역에서 정확한 신호를

얻기 위해서는 파장당격자수가 최소한 4개 이상이 요구됨을 알 수 있다.

## 5. 음향토모그래피에의 응용

토모그래피에 응용하기 위해 음원과 수신기 각각 두 개씩으로 구성된 그림 6의 수치모델을 대상으로하여 유한차분법에 의해 각 음원-수신기 사이의 전달시간을 계산하고, 이를 SVD법에 의한 역추정방법으로 음속변화를 추정하였다. 음원은 그림에서 보듯이 왼쪽의 두 격자의 왼쪽 경계 중앙에, 그리고 수신기는 오른쪽 두 격자의 오른쪽 경계 중앙에 위치시켰다.

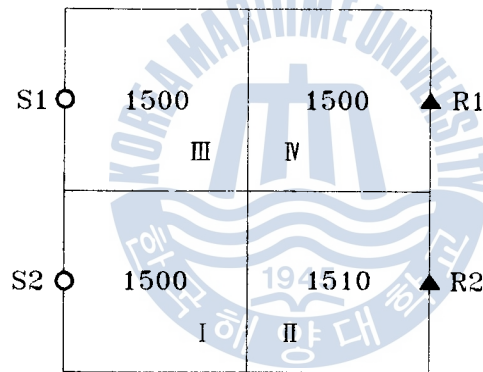


그림 6. 토모그래피를 위한 송수신기의 배치도.

그림 6에서는 모두 4개의 경로가 존재한다. 이 경로들이 각각 4개의 구역을 거쳐가는 길이들을 연립방정식의 계수행렬  $A$ 의 요소들이라고 하면 이들을 유효숫자 4자리만으로 표시한 행렬과 이 행렬을 SVD법에 의해 분해하였을 때 나오는 고유치 벡터  $w$ 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 67.50 & 67.50 \\ 0.00 & 75.47 & 75.47 & 0.00 \\ 75.47 & 0.00 & 0.00 & 75.47 \\ 67.50 & 67.50 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 143.189123 \\ 0.000000 \\ 106.726081 \\ 95.459416 \end{bmatrix}$$

여기서, 고유치 행렬  $w$ 의 값 중에서 영인 요소는 행렬  $A$ 의 계수(rank)가 낮아 짐을 의미하며 음파의 전달시간 벡터  $b$ 의 정확한 계산에 의한 값은



$$\mathbf{b}^T = [ 0.090000 \ 0.100290 \ 0.100623 \ 0.089702 ]$$

이를 근거로 SVD에 의하여 연립방정식의 정확치에 의한 결과와 FDM에 의한 결과를 비교하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1502.5 & 1497.5 \\ 1502.5 & 1507.5 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1505.8 & 1500.6 \\ 1506.5 & 1511.7 \end{bmatrix}$$

여기서 정확치에 의한 결과  $\mathbf{u}$ 의 값이 원래의 값과 부정확한 이유는 연립방정식에서 계수(rank)가 1이 감소한 원인때문인 것으로 판단된다. 이 때 FDM에 의한 결과의 평균오차는 3.65 m/s로서 정확한 계산에 의한 평균오차 2.5 m/s와 더불어 둘 다 작은 오차로 볼 수는 없다. 이 논문에서는 토폴로그라피의 성능을 위한 논의는 하지 않았으며, 또한 Munk and Wunsch(1978)에서도 지적한 바 있지만 충분히 신뢰성있는 토폴로그라피를 위해서는 해결해야할 문제점들이 많이 있기 때문에 이 오차의 타당성에 대하여는 구체적으로 논의하지 않았다.

## 6. 결 론

FDM에 의한 수중음향전달모델 개발에는 우선 파동방정식의 이해와 차분방법의 연구가 있어야 한다. 이 논문에서는 우선 불균질매질에서의 파동방정식을 간단히 유도함으로써 이해를 도왔고, 이를 차분화하는 과정을 설명하였다. 그리고 차분화로 인한 오차로서 절단오차는 음원신호에 비해 근거리에서도 0.2% 미만의 작은 오차로서 작용하기 때문에 큰 문제가 없을 것으로 판단되었다.

음향토폴로그라피에의 응용에서는 유한차분법에 의한 계산결과가 얼마나 충분히 정확한 해상도를 가지고 있는지는 판단하기 어렵지만, 성능을 위한 알고리즘의 도입과 개선을 한다면 음향토폴로그라피의 모의실험에도 응용할 수 있을 것으로 판단된다. 유한차분법에 의한 응용에서 가장 큰 문제는 차분식에서 사용하는 시간증분이 토폴로그라피에서 요구하는 해상도에 따라가지 못하는 점이다. 다른 문제점으로는 유한차분 계산시에 발생하는 수치적인 파의 분산(dispersion)에 의해 장거리 토폴로그라피에는 적용이 어려운 점이다.

모델의 개발시 충분히 고려되지 못하여 보충해야 할 점들과 앞으로의 과제로서

는 우선 유한차분 알고리즘의 변화를 통한 개선점의 모색이다. Staggered Grid를 이용한 알고리즘의 도입을 생각할 수 있고 효율적인 수치 경계조건의 구현으로 경계에서의 반사에 의한 오차를 줄이는 것이다. 이는 정교한 분야에의 응용이나 장시간의 실행을 할 경우에는 필수적으로 고려하여야 할 사항으로서 이 논문에서는 충분히 다루지 못한 분야이다.

### 참 고 문 헌

- [1] 송희천외 7명, 1994, **해양에서의 음파전파 수치모델 연구(II)**, 한국해양연구소, 과학기술처 특정연구개발사업 보고서.
- [2] Alterman, Z. and Karal, F. C. Jr., 1968, "Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods," Vol. 58, No.1, pp.367-398, Bulletin of the Seismological Society of America.
- [3] Burdic, W. S., **Sound Propagation in the Sea**, Peninsula Publishing, chap 2, 1982.
- [4] Burdic, W. S., **Underwater Acoustic System Analysis** - 2nd ed., Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey,
- [5] Fricke, J. Robert, 1991, **Acoustic scattering from elastic ice: A Finite Difference solution**, Ph.D. Thesis, MIT/WHOI Joint Program in Oceanography.
- [6] Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S. and Alford, R. M. "Synthetic seismograms: A finite-difference approach.", Geophysics, Vol. 41, pp2-27, 1976.
- [7] Levander, A. R., "Finite Difference Calculations of dispersive Rayleigh wave propagation", Tectonophysics, 113, 1-30, 1985.
- [8] Nielsen, Richard O., **Sonar Signal Processing**, pp.51-94, 1991, Artec House Inc.
- [9] Reynolds, A. C. , "Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems", Geophysics, Vol. 43, No. 6, 1978.
- [10] Walter Munk, Carl Wunsch, "Ocean acoustic tomography: a scheme for large scale monitoring", Vol. 26A, pp123-161, Deep-Sea Res., 1978.