

- (10) Kobayashi, A. S., Zii, M., & Hall, L. R.; Approximate stress intensity factor for an embedded elliptical Crack near to parallel free Surface. *Int. J. Fracture Mech.*, 1, pp. 81~95 (1965).
- (11) J.R. Rice, M. Levy; The part-Through Surface Crack in an Elastic Plate. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* pp.185~195 (1975).
- (12) Paris, P.C., Gomez, M.P. and Anderson, W.E.; A rational Analytic Theory of Fatigue. *The Fund in Engineering*, 13, pp.9~14 (1961).
- (13) 小寺澤一, 南坂 繁; 繰返し曲げによる 非貫通疲勞と製の進歩, *日本材料學會誌*, Vol.26, No.280, pp. 955~961 (1977).
- (14) 川原正吉, 栗原正好; 表面と裂の疲勞による傳播成長過程に關する豫備的考察, *日本造船學會 論文集*, Vol.137, pp.297~309 (1975).
- (15) 向井芳彦, 山崎信二; 形狀下連續付平板の非貫通形欠陥に對する曲げ疲勞壽命豫測(第一報), *日本造船學會 論文集*, Vol.151, pp.245~254 (1982).
- (16) W.W. Sanders, Jr., R.H. Day; Fatigue Behavior of Aluminum Alloy Weldments. *J. 輕金屬協會*, Vol.21, No.10, pp.461~466 (1983).
- (17) 金永植, 裴柱惠; 高張力鋼材 大入熱熔接部焊 機械的 特性變化에 關한 研究, *韓國海洋大學 學院*, 孟出, pp.11~13 (1984).
- (18) ASM; Atlas of microstructures of industrial alloys. *Metal Handbook*, Vol.7, ASM, Ohio, pp.211~272 (1975).
- (19) C.F. Price, J.A. Fife; Observations on the Surface Zone hardening rate during the bending fatigue of nickel. *METALLURGICA*, Vol.16, pp.1157~1159 (1982).
- (20) ASM; Fractography and atlas of fractographs, *Metal Handbook*, Vol.9, ASM, Ohio, pp.29~71, 281~296 (1975).
- (21) 金永植, 金英鍾; 平面응력 疲勞荷重에 의한 알루미늄 합금材의 모식균열 傳播率에 관한 研究, *韓國船用機關學會誌*, Vol.8, No.1, pp.49~60 (1984).
- (22) David Broek; *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Sijthoff & Noord-hoff, Netherland, pp. 48~53 (1978).

3次系統의 最適制御에 關한 研究

全 明 吉

(A study on the optimal control of the third order system)

Myeong-kil Cheon

目 次

Abstract

記號說明

1. 序 論
 2. 理論的 考察
 2. 1. 시스템의 狀態方程式
 2. 2. 시스템의 可制御性
 2. 3. 最適制御
 2. 4. 入力에 對한 狀態方程式의 解
 2. 5. 最適制御系統의 安定性
 3. 數直計算 및 檢討
 3. 1. 對稱行列 R의 計算
 3. 2. 시스템의 最適應答 計算
 3. 3. 最適制御 人力과 評價 函數計算
 3. 4. 數值計算을 위한 플로우차아트
 3. 5. $T_a = 0$ 일때 最適制御
 3. 6. 檢討 및 考察

(1) q가 變할 境遇	(4) T가 變할 境遇
(2) K가 變할 境遇	(5) V가 變할 境遇
(3) T_a 가 變할 境遇	
 4. 結 論
- 參考文獻

Abstract

The method of analyzing and designing the control system in time domain using the state vector equation has been developed since about 1960. It describes the system as the state equation and the integration of the quadratic of the state vector and the control input as a criterion function.

In this paper the author proposes a method to find the optimal control input as a function of the state vector by means of maximum principle for the the third order system which is composed of actuator of the first order element and the controlled object of the second order system. Particularly, the effectuation of the time constant of the actuator on the control characteristics is investigated detailly. This method is more convenient than the traditional method of frequency domain analysis.

As the result, it is found that if the time constant of the actuator is small, the response of the system becomes rapid and the optimal control criterion function becomes small, therefore the better is the system, the smaller is the time constant of the actuator and if the weight factor for the control input is large, the response of the system becomes slow, but the control input becomes small.

記 號 說 明

- r ; 目標直
 C ; 制御量
 e ; 誤差
 T_a ; 操作部の 時定數
 K_a ; 操作部の 定常利得
 T ; 制御對象의 時定數
 K ; 制御對象의 定常利得
 U ; 制御入力
 \hat{U} ; 最適制御 入力
 V ; 狀態벡터 X 의 荷重行列
 V_1 ; 狀態벡터 x_1 의 荷重係數
 V_2 ; " x_2 " "
 V_3 ; " x_3 " "
 q ; 制御入力 U 의 荷重係數
 $J(U)$; 評價函數
 $J(\hat{U})$; 最適制御 評價函數

1 . 序 論

最近 産業施設의 高度의 合理化와 더불어 각종의 制御問題에 있어서도 더욱 精密하고 經濟的인 制御方法이 要求되게 되었다.

古典的인 피이드 백 制御(Classical feed back control)는 多少의 外亂(disturbance)이 있더라도 制御量을 目標値에 잘 일치시켜주는 利點이 있어 많이 利用되고 있으나, 이 制御方法으로는 위의 要求條件을 충족시킬 수 없는 境遇가 생기게 되었는데 高度의 精密制御를 行하는 手段으로 1960年代에 들어서면서부터 狀態벡터(state vector)를 利用하여 時間領域에서 制御系統을 解析하고 設計하는 手法이 開發되었다. 즉 시스템(system)을 狀態方程式(state equation)으로 記述하고 피이드 백을 利用하여 制御量을 自動的으로 目標値에 一致시키려는 古典的인 피이드 백 制御와는 달리 基準이 되는 評價函數(criterion function)라는 것을 明確히 數學的으로 記述하여 이 評價函數를 最小로 하는 最適制御人力(optimal control input)을 求하는 最適制御理論(optimal control theory)에 對한 研究⁵⁾가 活發히 行하여서 理論的으로 相當히 發展되고 있지만 一般的으로 實用化되거에는 計算機의 코스트다운(cost down), 實用的인 計算手法등 이 各도 問題點을 많이 지니고 있다. 이 最適制御理論은 最近 開發된 시스템工學(system engineering)을 基礎로 하여 發展되었으며 이에는 變力法, 最大原理(maximum Principle),⁶⁾ 動的計劃法(Dynamic programming)등의 數學的 手法이 有効하게 使用되고 있다.

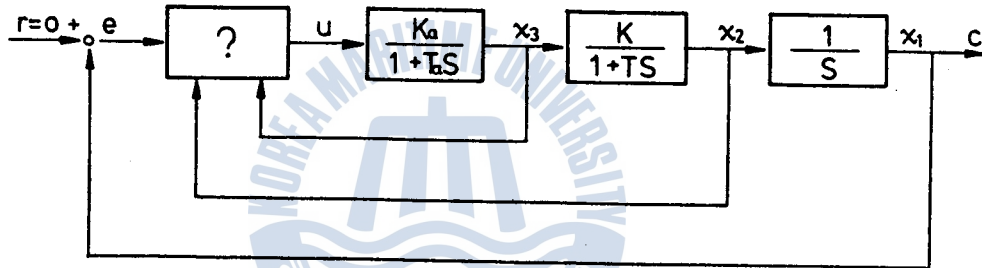
本 研究에서는 1次系統과 積分器로 構成되는 2次系統에 對하여 1次系統의 操作部(actuator)가 結合된 3次系統을 狀態方程式으로 表示하고 狀態벡터와 制御人力에 對한 2次型式(quadratic form)의 加重合의 積分을 評價函數로써 導入하여 最大原理를 利用하여 最適制御入力와 시스템의 應答을 求하는 問題에 對하여 考察하기로 한다.

2. 理論的 考察

서어보머캐니즘(Servomechanism)에 있어서 制御對象에는 여러가지가 있을 수 있으나 서어보모터(Servomotor)를 利用하는 단순한 位置制御系統이나 自動操舵裝置 等に 있어서 볼 수 있듯이 一般的으로는 一次要素와 積分器가 結合된 2次系統과 같다.

本 研究에서는 Fig.1의 블록線圖와 같이 2次系統에 操作部를 通하여 制御入力を 作用하는 境遇에 對하여 最適制御問題를 考察해 보기로 한다.

2.1. 시스템의 狀態方程式



< Fig.1 Block diagram of the feed back system >

위의 블록線圖로 부터 이 系統의 狀態方程式을 求하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = \dot{C} = \dot{x}_1 \\ T\dot{x}_2 + x_2 = Kx_3 \\ Ta\dot{x}_3 + x_3 = KaU \end{cases} \quad (1)$$

式(1)을 行列로 고치면

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & \frac{K}{T} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Ka}{Ta} \end{bmatrix} U \quad (2)$$

$$X = AX + BU \quad (3)$$

단, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & \frac{K}{T} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Ta} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Ka}{Ta} \end{pmatrix}$$

2·2. 시스템의 可制御性

行列 \mathbf{M} 을 다음과 같이 定義하면

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{KaK}{TaT} \\ 0 & \frac{KaK}{TaT} & -\frac{KaK}{TaT} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Ta} \right) \\ \frac{Ka}{Ta} & \frac{Ka}{Ta^2} & \frac{Ka}{Ta^3} \end{pmatrix} \quad (4)$$

시스템이 可制御性일 必要充分條件은 \mathbf{M} 이 full rank 이어야 하므로

$$\text{Rank}(\mathbf{M}) = 3 \quad (5)$$

式 (5)는 $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ 와 同値이므로

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{Ka^3K^2}{Ta^3T^2} = -\left(\frac{Ka}{Ta}\right)^3 \left(\frac{K}{T}\right)^2 \neq 0 \quad (6)$$

따라서 可制御性이 되기위한 必要充分 條件은

$$\frac{Ka}{Ta} \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{K}{T} \neq 0 \quad (7)$$

2·3. 最適制御^{1,2,5)}

式 (3)의 狀態方程式으로 表示되는 시스템에 對하여 式 (8)과 같이 表示되는 狀態 벡터 \mathbf{X} 와 制御入力 U 의 2次型式의 加重合을 評價函數로 導入하고 最大原理를 利用하여 最適制御入力 \hat{U} 를 求하여 보기로 한다.

狀態方程式 : $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U$

評價函數 : $J(U) = \int_0^\infty \frac{1}{2} (\mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X} + qU^2) dt \quad (8)$

$$\text{단, } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

補助變數를 벡터를 ψ 라하면 해밀토니안函數 (Hamiltonian function) H 와 ψ 는

$$H = -\frac{1}{2} (\mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X} + qU^2) + (\mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{U})^T \psi \quad (9)$$

$$\text{단, } \psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3]^T$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \quad (10)$$

最適制御 入力 \hat{U} 는 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 로 부터

$$\hat{U} = \frac{1}{q} \mathbf{B}^T \psi \quad (11)$$

式 (11)을 式 (3)에 代入하고 ψ 와 \mathbf{X} 와의 關係를 求하면 式 (12)를 얻는다.

$$\psi = -\mathbf{R} \mathbf{X} \quad (12)$$

式 (12)를 式 (11)에 代入하면

$$\hat{U} = -\mathbf{K} \mathbf{X} \quad (13)$$

$$\text{단, } \mathbf{K} = \frac{1}{q} \mathbf{B}^T \mathbf{R}$$

여기서 \mathbf{R} 은 다음의 定常狀態의 리카치 (Riccati) 方程式을 만족해야 한다.

$$\mathbf{R} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{V} - \mathbf{R} \mathbf{B} \frac{1}{q} \mathbf{B}^T \mathbf{R} = 0 \quad (14)$$

最適評價函數 $J(\hat{U})$ 는

$$J(\hat{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}(0)^T \mathbf{R} \mathbf{X}(0) \quad (15)$$

式 (14)를 만족하는 \mathbf{R} 을 求하기 위하여 對稱行列 \mathbf{R} 을

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \quad (16)$$

라 놓으면 式 (14)에서 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & \frac{K}{T} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{T} & 0 \\ 0 & \frac{K}{T} & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{q} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Ka}{Ta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{Ka}{Ta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

위 式을 풀면

$$\begin{pmatrix} 0 & a - \frac{1}{T}b & \frac{K}{T}b - \frac{1}{Ta}c \\ 0 & b - \frac{1}{T}d & \frac{K}{T}d - \frac{1}{Ta}e \\ 0 & c - \frac{1}{T}e & \frac{K}{T}e - \frac{1}{Ta}f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a - \frac{1}{T}b & b - \frac{1}{T}d & c - \frac{1}{T}e \\ \frac{K}{T}b - \frac{1}{Ta}c & \frac{K}{T}d - \frac{1}{Ta}e & \frac{K}{T}e - \frac{1}{Ta}f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Ka^2}{qTa^2} \begin{pmatrix} c^2 & ce & cf \\ ce & e^2 & ef \\ cf & ef & f^2 \end{pmatrix}$$

위 式을 다시 고치면

$$V_1 = \frac{Ka^2}{qTa^2} c^2 \quad (17-1)$$

$$a - \frac{1}{T}b = \frac{Ka^2}{qTa^2} ce \quad (17-2)$$

$$\frac{K}{T}b - \frac{1}{Ta}c = \frac{Ka^2}{qTa^2} cf \quad (17-3)$$

$$2\left(b - \frac{1}{T}d\right) + V_2 = \frac{Ka^2}{qTa^2} e^2 \quad (17-4)$$

$$\frac{K}{T}d - \frac{1}{Ta}e = \frac{Ka^2}{qTa^2} ef \quad (17-5)$$

$$2\left(\frac{K}{T}e - \frac{1}{Ta}f\right) + V_3 = \frac{Ka^2}{qTa^2} f^2 \quad (17-6)$$

式 (17-1)에서

$$c = \frac{Ta \sqrt{qV_1}}{Ka} \quad (18)$$

式 (17-3, 5, 6)을 式(17-4)에 代入하여 f에 관한 式으로 表示하면 式 (19)와 같
이된다.

$$f^4 + A_1 f^3 + A_2 f^2 + A_3 f + A_4 = 0 \quad (19)$$

$$\text{단, } \begin{cases} A_1 = \frac{4qTa(Ta+T)}{Ka^2T} \\ A_2 = \frac{2q^2Ta^2}{Ka^4} \left\{ 2 + \frac{4Ta}{T} + \frac{2Ta(Ta+T)}{T^2} - \frac{2q^2Ta^2V_3}{Ka^4} \right\} \\ A_3 = \frac{4q^3Ta^4}{Ka^6} \left\{ \frac{2(Ta+T)}{T^2} - \frac{2KaKTa\sqrt{V_1}}{\sqrt{q}T} - \frac{Ka^2V_3(Ta+T)}{qTaT} \right\} \\ A_4 = \frac{q^3Ta^6}{Ka^6} \left\{ \frac{Ka^2V_3}{qTa^2} - \frac{4K^2V_2}{T^2} - \frac{4}{TaT}(Ta+T) \left(\frac{1}{T} + \frac{2KTa\sqrt{qV_1}}{TKa} \right) \right\} \end{cases}$$

式 (19)은 f에 관한 4次代數方程式이므로 이의 解를 解析的으로 求하기는 困難하
나 數直的으로는 容易하게 求할 수 있다.

式 (17-2,3,5,6)에서

$$b = \frac{Ka^2T}{qKTa^2} cf + \frac{T}{KTa} c \quad (20)$$

$$e = \frac{Ka^2T}{2qKTa^2} f^2 + \frac{1}{Ta} f - \frac{V_3}{2} \quad (21)$$

$$a = \frac{Ka^2}{qTa^2} ce + \frac{1}{T} b \quad (22)$$

$$d = \frac{Ka^2T}{qKTa^2} ef + \frac{1}{T} e \quad (23)$$

따라서 f 를 解析的으로 求하면 a, b, d, e 를 求할 수 있다.

2.4. 人力에 對한 狀態方程式의 解

式 (13)의 最適制御時 入力 U 를 式 (3)의 狀態方程式에 代入하여 最適制御時 狀態方程式을 求하면

$$\begin{aligned} X &= AX + BU \\ &= \left(A - \frac{1}{q} BB^T R \right) X \\ &= CX \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{단, } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} & \frac{K}{T} \\ -\frac{Ka^2}{qTa^2}c & -\frac{Ka^2}{qTa^2}e & -\left(\frac{1}{Ta} + \frac{Ka^2}{qTa^2}f \right) \end{pmatrix}$$

最適制御狀態方程式의 解를 求하려면 解析的으로 求하기는 어려워 數值的으로 求하기로 한다.

最適制御時 狀態方程式의 解

$$X(t) = e^{ct} X_0 \quad (25)$$

$$\text{단, } e^{ct} = I + Ct + \frac{1}{2!} C^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} C^k t^k + \dots$$

$t = K\tau$ 의 $X(t)$ 를 X_K 라 하고 이 解를 差分方程式(differential equation) 으로 表示하면

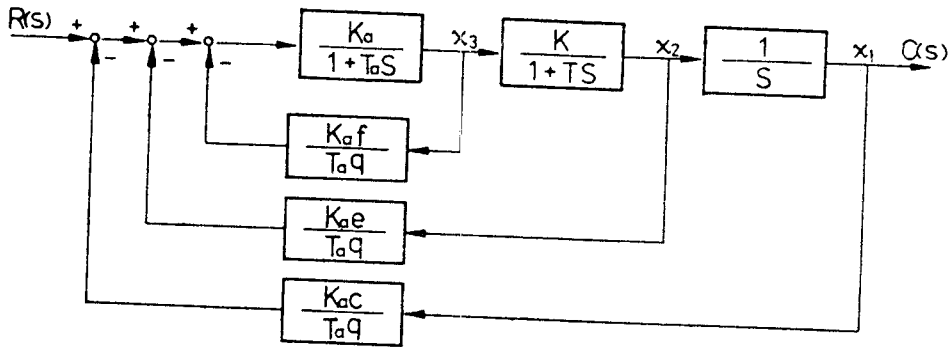
$$X_{K+1} = PX_K = P^k X_0 \quad (26)$$

$$\text{단, } P = e^{c\tau} = I + C\tau + \frac{1}{2!} C^2 \tau^2 + \dots + \frac{1}{k!} C^k \tau^k + \dots$$

2.5. 最適制御系統의 安定性

最適피드백 制御된 시스템의 傳達函數를 求하기 위해서 블록線度를 그리면 Fig.2

와 같이 되고 閉回路傳達函數를 $G(S)$ 라 하면 $G(S)$ 는 式 (27)과 같이된다.



< Fig.2 Block diagram of the optimal feed back system >

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{b_0}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (27)$$

단,

$$\begin{cases} a_0 = TaT \\ a_1 = Ta + T + \frac{Ka^2 Tf}{Ta q} \\ a_2 = 1 + \frac{Ka^2 f}{Ta q} + \frac{Ka^2 Ke}{Ta q} \\ a_3 = \frac{Ka^2 Kc}{Ta q} \\ b_0 = KaK \end{cases}$$

式 (27)에서 特性方程式은

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

홀비쓰 (Hurwitz) 安定條件에서

係數 $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

홀비쓰行列式 $H_1 = a_1 > 0$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

따라서 시스템이 安定性일 條件은 다음과 같다.

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_0 a_3$$

(28)

3. 數值計算 및 檢討

3.1. 對稱行列 R의 計算

式 (19)에서 f에 관한 4次代數方程式을 베어스토우方法 (Bairstow's method)으로 數值數를 求하면 f에 關하여 式이 4개가 되나 對稱行列 R이 正定(positive definite)이므로 式 (29)를 만족하는 f(단, f는 實數)를 求하여 式 (18),(20),(21),(22),(23)에서 a, b, c, d, e를 求한다.

對稱行列 R이 正定일 條件은

$$\begin{aligned} |a| &> 0 \\ \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} &> 0 \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (29)$$

3.2. 시스템의 最適應答 計算

式 (26)에서 $P = e^{C\tau}$ 를 計算¹⁾하기 위해서 C의 要素중에서 絶對值가 最大인 것을 $|am|$ 이라 하고 $\delta = |am|\tau$ 라 두면

$$(1/k!) (n\delta)^k e^{n\delta} = 0.01$$

을 만족하는 整數 k로 하면 P의 精度는 充分하다.

(단, n은 C의 次數이다.)

初期直 $X_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ 라 하면 式 (27)에서 最適制御時 시스템의 應答 X_k 가 求하여 진다.

3.3. 最適制御 入力과 評價函數 計算

i) 最適制御 入力 計算

式 (13)에서

$$\begin{aligned} \hat{U} &= -\frac{Ka}{qTa} [c \ e \ f] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{Ka}{qTa} (cx_1 + ex_2 + fx_3) \end{aligned} \quad (30)$$

이므로 c, e, f와 x_1, x_2, x_3 가 定하여지므로 入力 \hat{U} 가 求하여진다.

ii) 最適制御 評價函數 計算

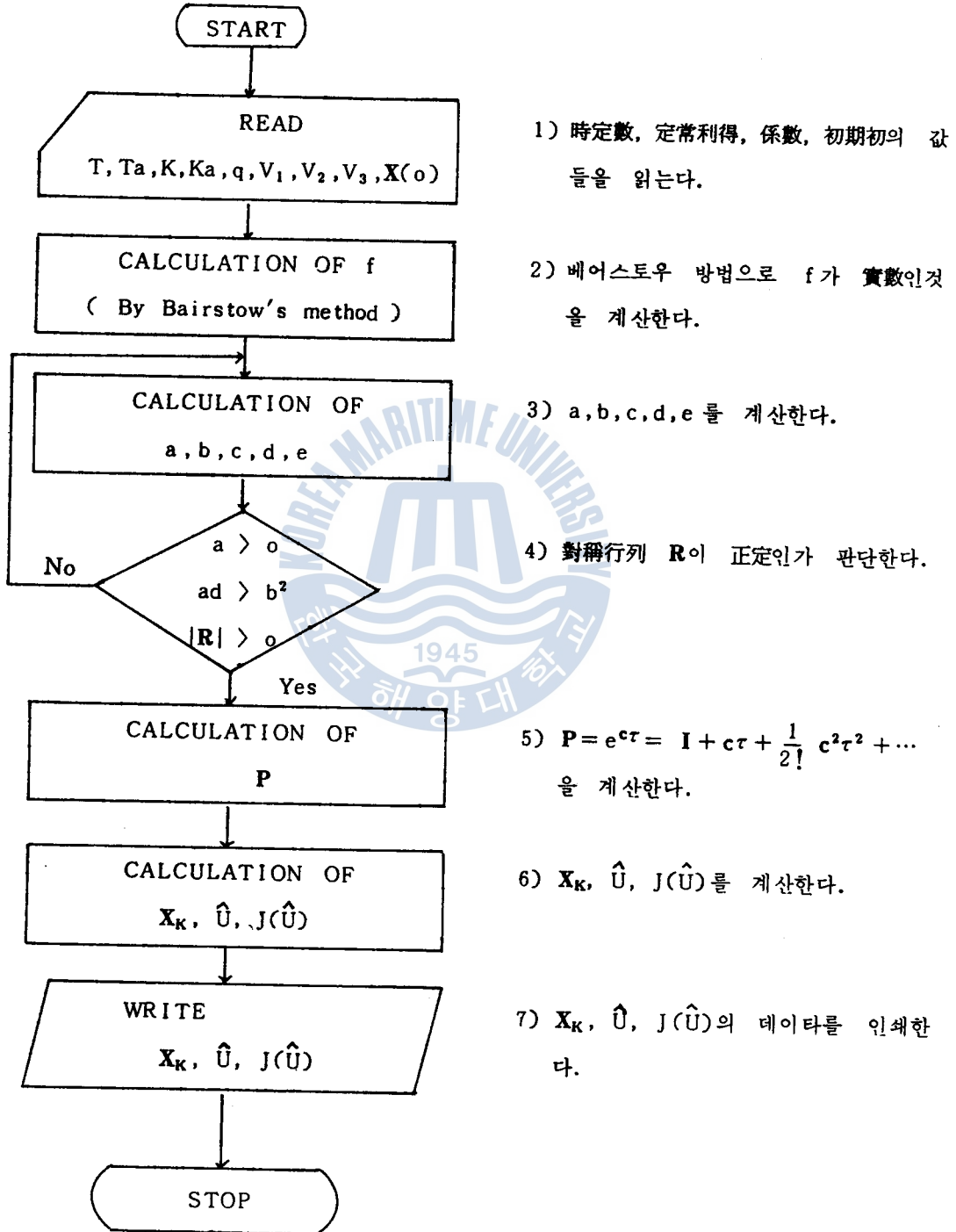
式 (15)에서

$$\begin{aligned}
 J(\hat{U}) &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^T(o) \mathbf{R} \mathbf{X}(o) \\
 &= \frac{1}{2} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} a
 \end{aligned} \tag{31}$$

어므로 a 가 定하여 지므로 $J(\hat{U})$ 가 求하여 진다.



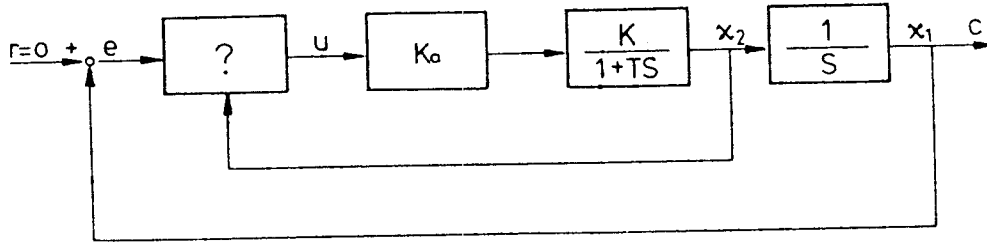
3·4 數值計算을 위한 플로우차아트



3·5 $T_a = 0$ 일때 最適制御

$T_a = 0$ 가 되면 Fig. 3과 같이 2次系統이 된다.

이 시스템을 最適制御하여 3·2, 3·3에서 求한 3次系統에서의 $X(t)$, \hat{U} , $J(\hat{U})$ 를 比較하여 操作部の 時定數 T_a 에 對한 一般적인 特性을 알고져 한다.



< Fig.3 Block diagram of the feed back control system when T_a is zero >

위의 블록線圖와 같이 狀態벡터를 취하면

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = C \\ \dot{x}_2 = \dot{C} = x_1 \\ T\dot{x}_2 + x_2 = KaKu \end{cases}$$

가 되어 이 系統의 狀態方程式을 求하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{KaK}{T} \end{pmatrix} U \tag{32}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \tag{33}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{KaK}{T} \end{pmatrix}$$

狀態벡터의 荷重行列

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

라 두고 對稱行列 \mathbf{R} 을

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & e \end{pmatrix}$$

라 하면 式 (14)의 定常狀態 리카치方程式에서 式 (34)가 求해진다.

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{q}}{KKa} \sqrt{1 + 2TKaK \sqrt{V_1} / \sqrt{q} + Ka^2K^2V_2/q} \\ c = \frac{T\sqrt{qV_1}}{KaK} \\ e = \frac{qT}{Ka^2K^2} (\sqrt{1 + 2TKaK \sqrt{V_1} / \sqrt{q} + Ka^2K^2V_2/q} - 1) \end{cases} \quad (34)$$

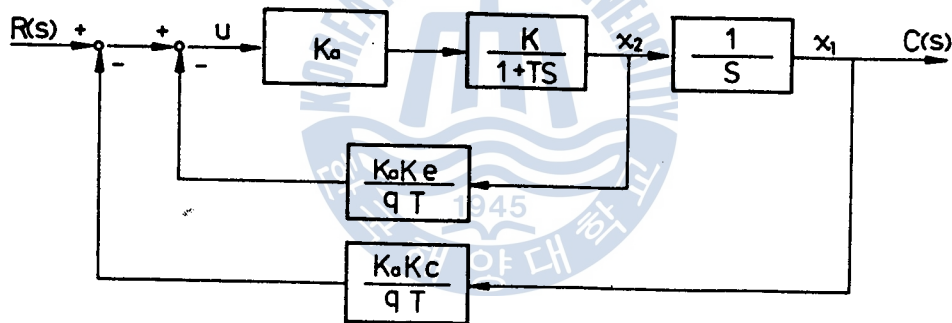
式 (13)에서

$$U = -\frac{KaK}{qT} [c \ e] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

가 되고 $x_1 = C = x$ 라 두면 $x_2 = \dot{C} = \dot{x}$ 가 되어 入力 U 는 다음과 같이 된다.

$$U = -\left[\frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{\dot{x}}{KaK} (\sqrt{1 + 2KaK \sqrt{V_1} / \sqrt{q} + Ka^2K^2V_2/q} - 1) \right] \quad (36)$$

式 (36)은 $\Delta(S) = -Kp(1 + T_D S) X(S)$ 의 形이므로 PD制御와 유사하다.



< Fig.4 Block diagram of the optimal feed back control system When T_a is zero >

$T_a = 0$ 일때 最適피드백(feed back) 制御된 시스템(system)의 傳達函數를 求하기 위해서 블록 線圖를 그리면 Fig.4와 같이 되고 閉回路傳達函數를 $G(S)$ 라 하면 $G(S)$ 는 式 (37)과 같이된다.

$$G(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{b_0}{S^2 + a_1 S + a_0} \quad (37)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{T} + \frac{Ka^2K^2e}{qT^2} \\ a_0 = \frac{Ka^2K^2c}{qT^2} \\ b_0 = \frac{KaK}{T} \end{cases}$$

$R(S) = 0$ 이므로 式 (38)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + a_1 \dot{x}_1(t) + a_0 x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \end{aligned} \quad (38)$$

初期值 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ 라 두고 式 (38)의 解를 求하면 式 (39-1), (39-2), (39-3)과 같이된다.

i) $a_1^2 > 4a_0$ 일때

$$x_1(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \quad (39-1)$$

$$x_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{단, } \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \\ \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \end{cases}$$

ii) $a_1^2 = 4a_0$ 일때

$$x_1(t) = (1 - \lambda_{12} t) e^{\lambda_{12} t} \quad (39-2)$$

$$x_2(t) = -\lambda_{12} e^{\lambda_{12} t} + \lambda_{12} (1 - \lambda_{12} t) e^{\lambda_{12} t}$$

$$\text{단, } \lambda_{12} = -\frac{a_1}{2}$$

iii) $a_1^2 < 4a_0$

$$x_1(t) = e^{\sigma t} (\cos wt - \frac{\sigma}{w} \sin wt) \quad (39-3)$$

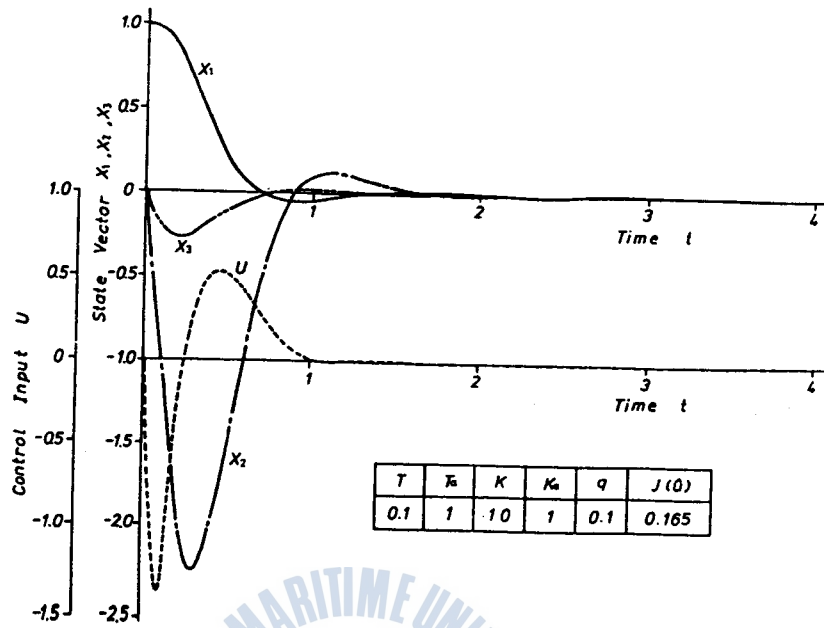
$$x_2(t) = \sigma e^{\sigma t} (\cos wt - \frac{\sigma}{w} \sin wt) - e^{\sigma t} (w \sin wt - \sigma \cos wt)$$

$$\text{단, } \begin{cases} \sigma = -\frac{a_1}{2} \\ w = \frac{1}{2} \sqrt{4a_0 - a_1^2} \end{cases}$$

3·6 檢討 및 考察

以上の 式들을 數值計算하여 그 結果를 圖示하면 Fig.5, 6, 7, 8, 9와 같다.

(1) q 가 變할 境遇



$R(S) = 0$ 이므로 式 (38)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + a_1 \dot{x}_1(t) + a_0 x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \end{aligned} \quad (38)$$

初期值 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ 라 두고 式 (38)의 解를 求하면 式 (39-1), (39-2), (39-3)과 같이된다.

i) $a_1^2 > 4a_0$ 일때

$$x_1(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \quad (39-1)$$

$$x_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{단, } \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \\ \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \end{cases}$$

ii) $a_1^2 = 4a_0$ 일때

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (1 - \lambda_{12} t) e^{\lambda_{12} t} \\ x_2(t) &= -\lambda_{12} e^{\lambda_{12} t} + \lambda_{12} (1 - \lambda_{12} t) e^{\lambda_{12} t} \end{aligned} \quad (39-2)$$

$$\text{단, } \lambda_{12} = -\frac{a_1}{2}$$

iii) $a_1^2 < 4a_0$

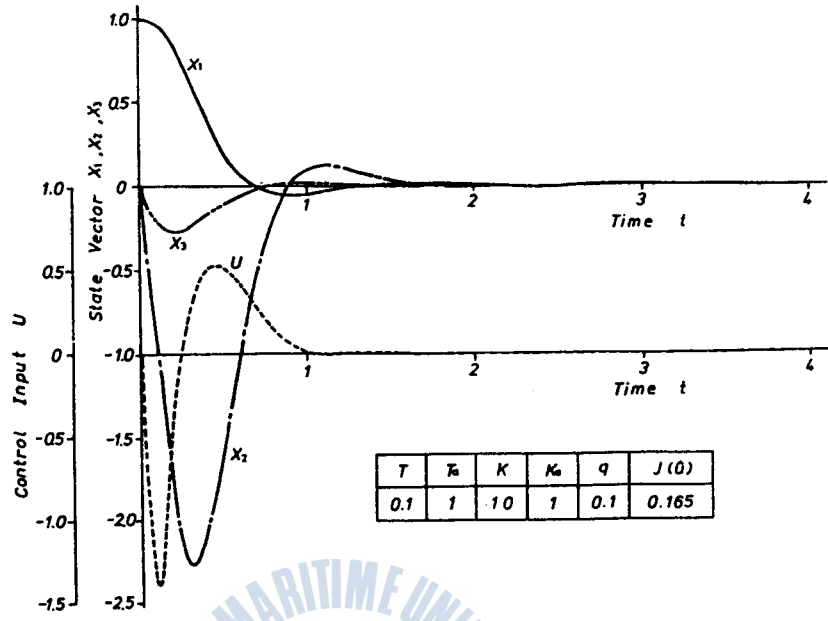
$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\sigma t} (\cos wt - \frac{\sigma}{w} \sin wt) \\ x_2(t) &= \sigma e^{\sigma t} (\cos wt - \frac{\sigma}{w} \sin wt) - e^{\sigma t} (w \sin wt - \sigma \cos wt) \end{aligned} \quad (39-3)$$

$$\text{단, } \begin{cases} \sigma = -\frac{a_1}{2} \\ w = \frac{1}{2} \sqrt{4a_0 - a_1^2} \end{cases}$$

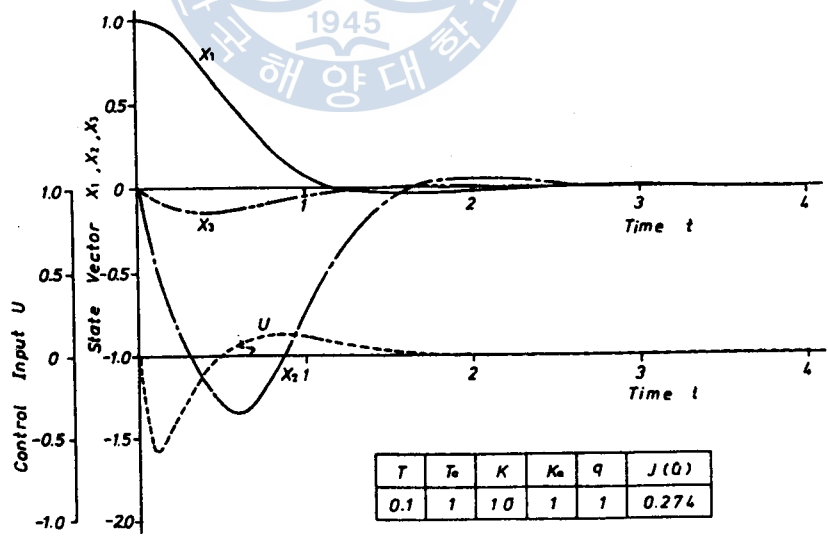
3·6 檢討 및 考察

以上の 式들을 數値計算하여 그 結果를 圖示하면 Fig.5,6,7,8,9와 같다.

(1) q 가 變할 境遇

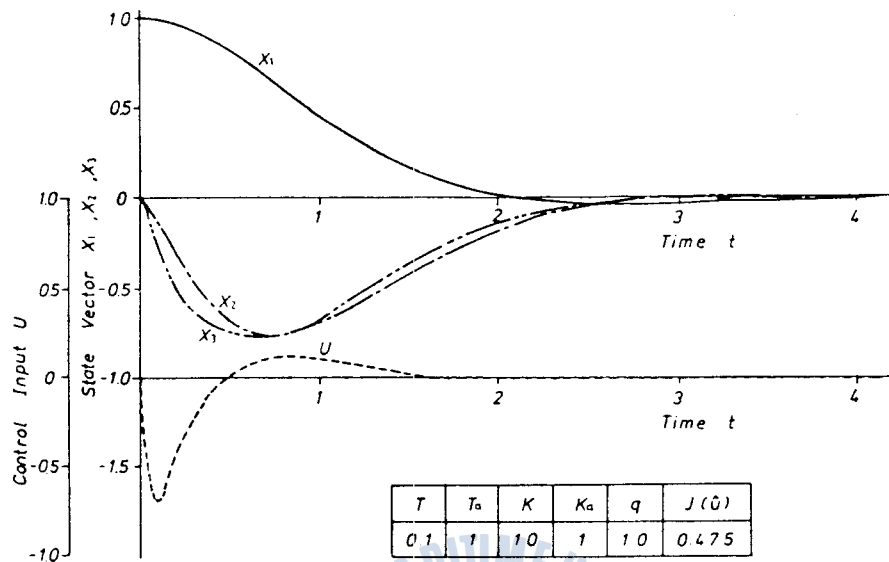


(a)



(b)





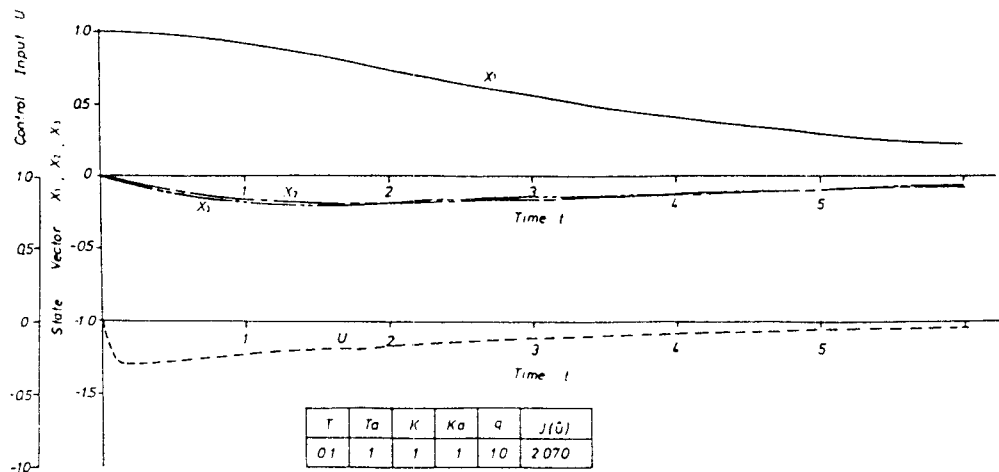
(c)

< Fig.5 >

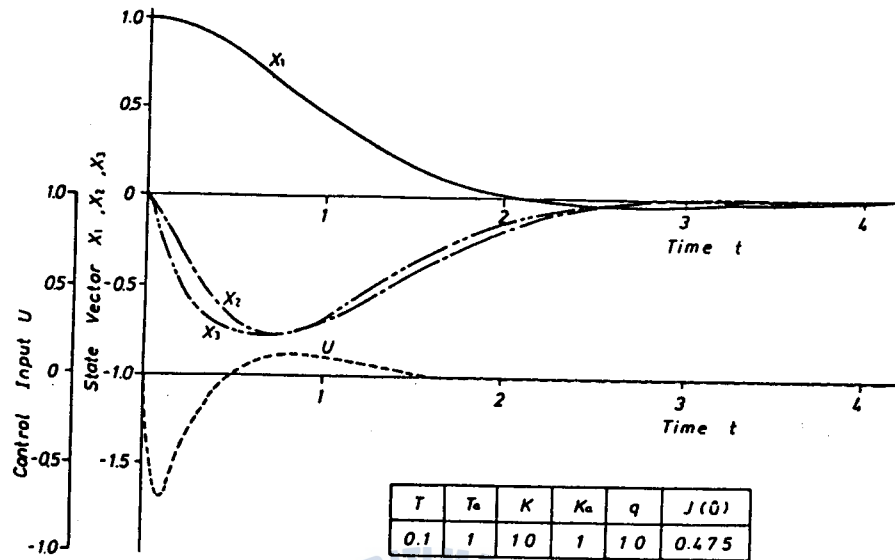
(a) 는 制御入力 荷重係數가 0.1 이므로 評價函數에서 制御入力は 큰 영향을 못미치므로 시스템의 應答은 빠르나 制御入力は 크다.

(c) 는 制御入力 荷重係數가 (a), (b) 보다 크므로 시스템의 應答은 늦어지나 制御入력은 작아진다.

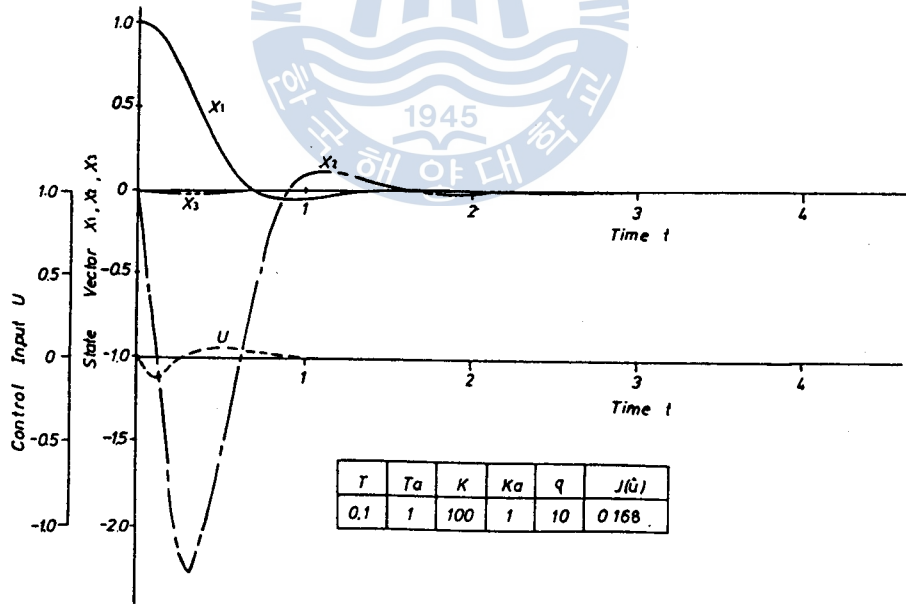
(2) K가 變할 境遇



(a)



(b)

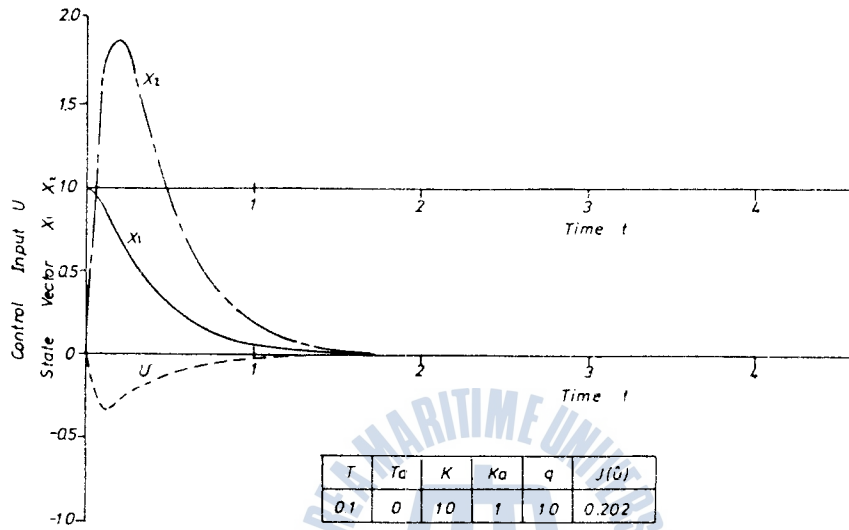


(c)

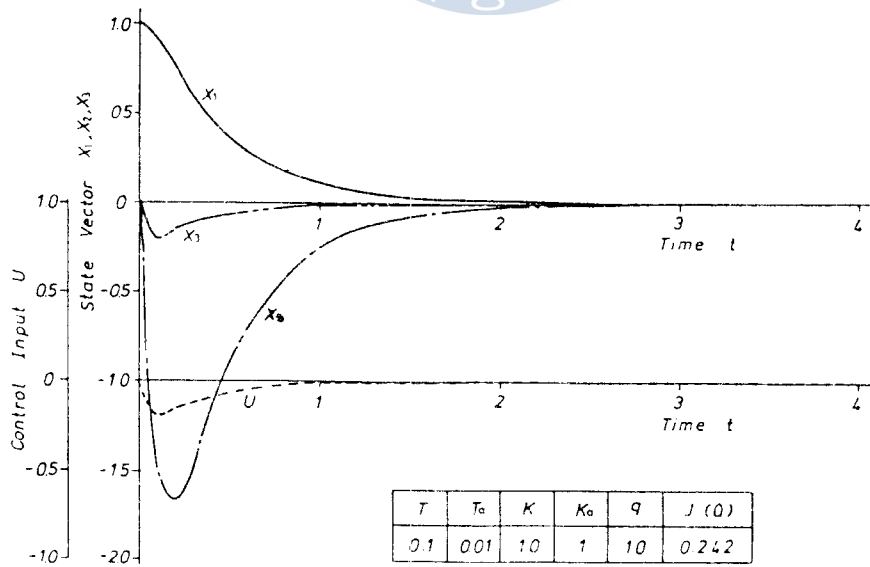
< Fig. 6 >

K가 커지면 시스템의 應答은 빨라져서 $J(\hat{U})$ 의 값이 感少된다.

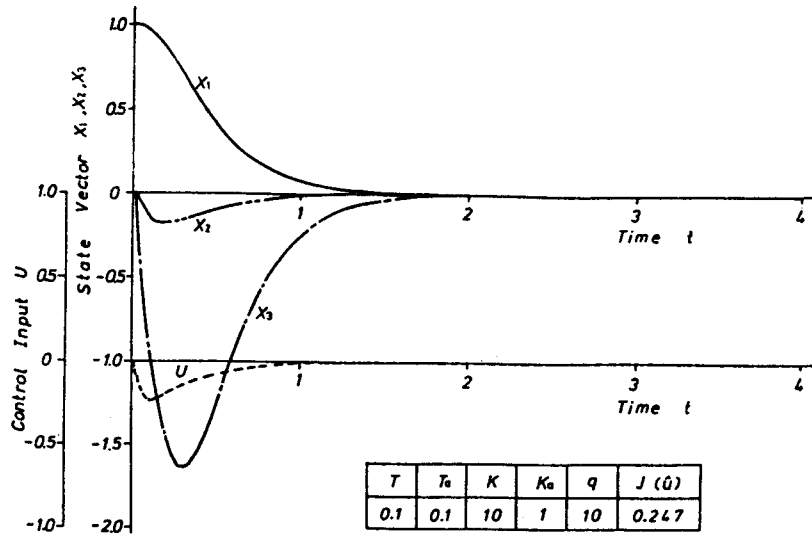
(3) T_a 가 變할 境遇



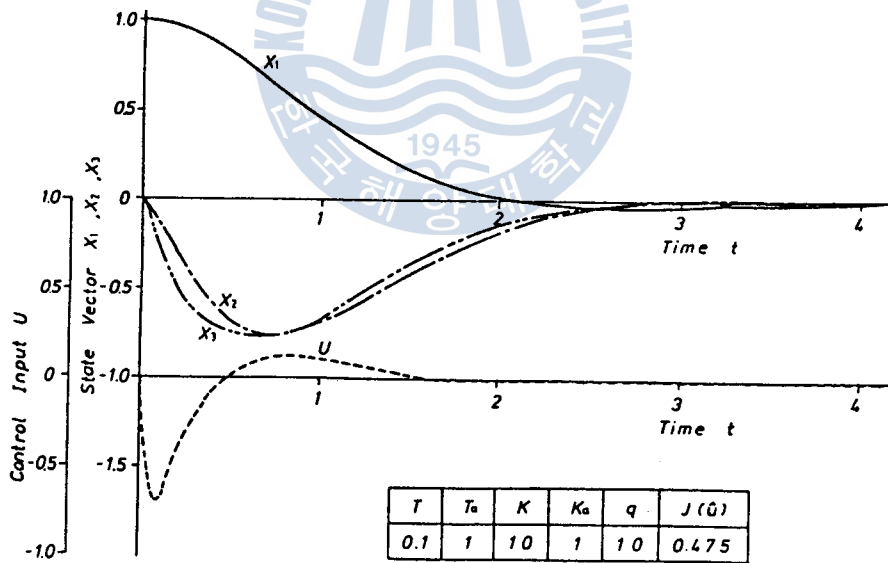
(a)



(b)



(c)

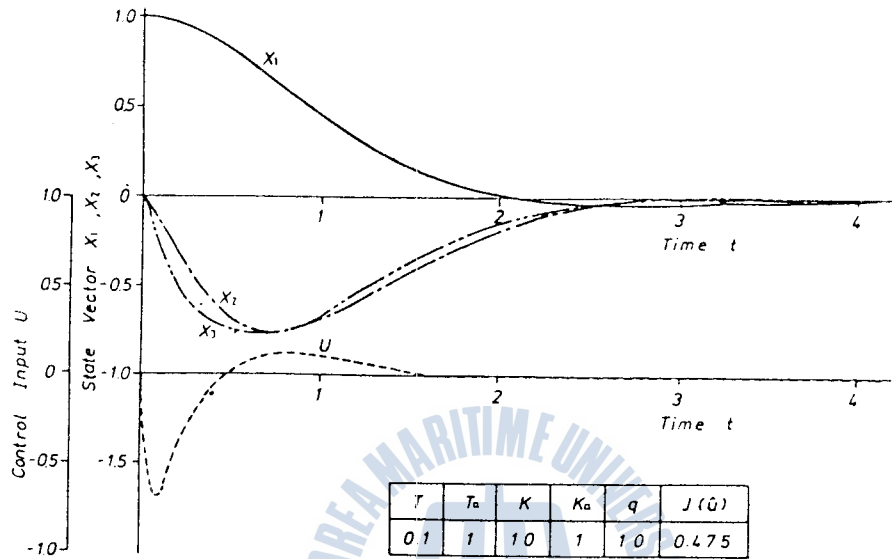


(d)

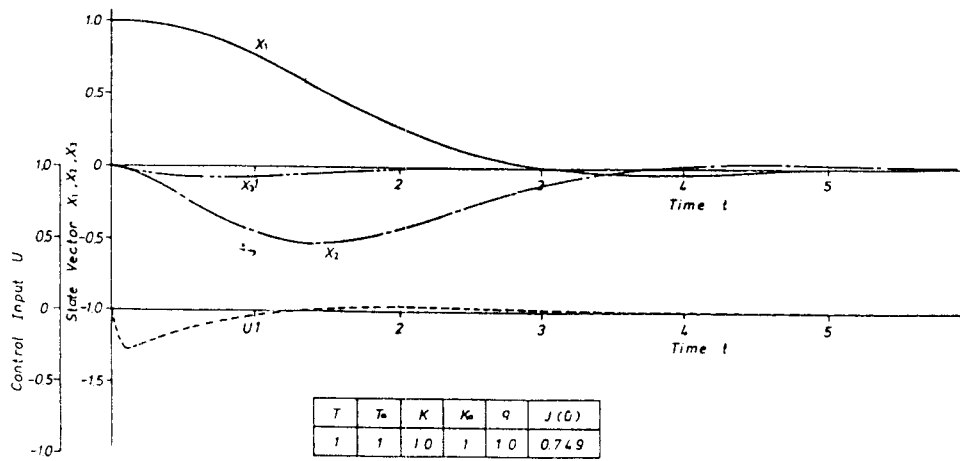
< Fig. 7 >

T_a 가 커질수록 시스템의 應答은 늦어져 $J(\hat{U})$ 의 값이 增加하고 T_a 의 값이 0에 가까워지면 K_a 의 값이 1이므로 x_3 의 應答과 入力이 거의 같게된다.

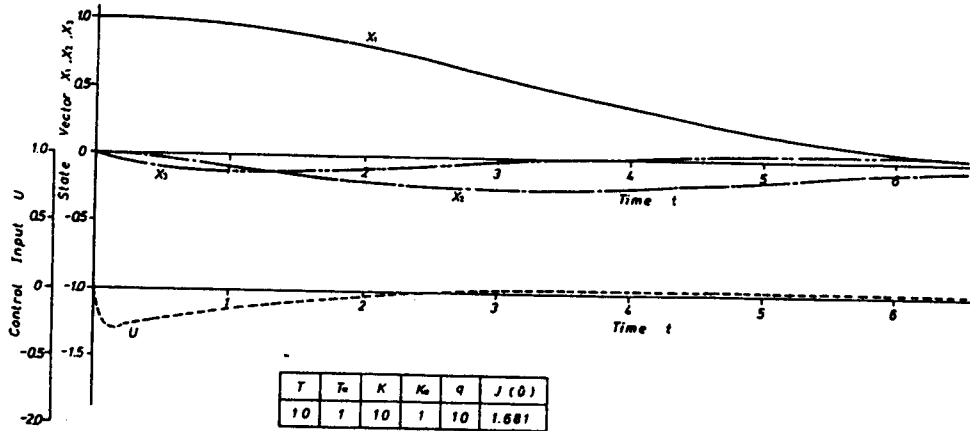
(4) T가 變할 境遇



(a)



(b)

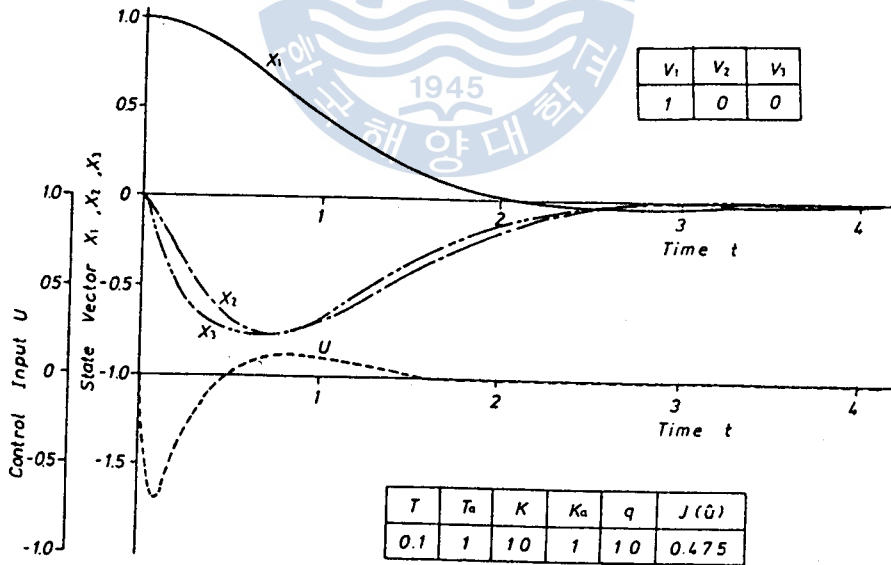


(c)

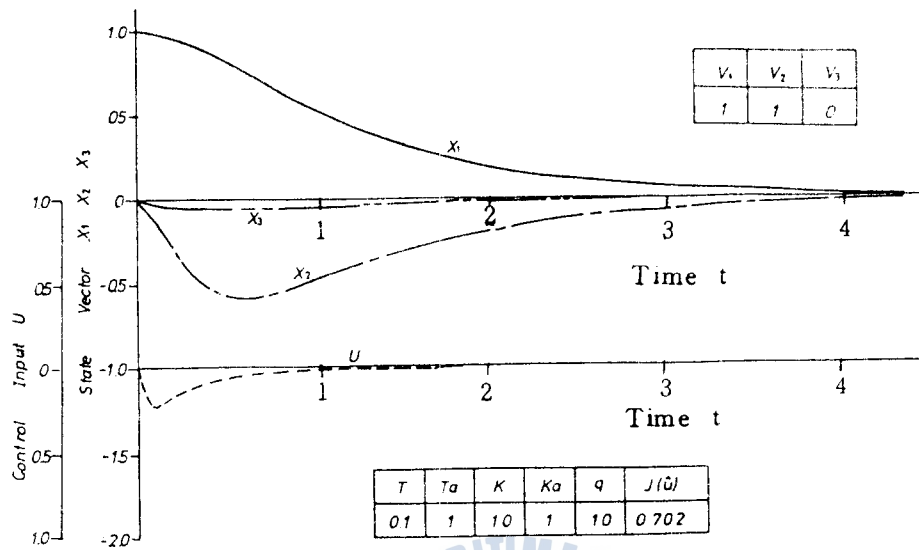
< Fig.8 >

T가 커지면 시스템의 應答 $X(t)$ 가 늦어져 $J(\hat{U})$ 의 값이 增加한다.

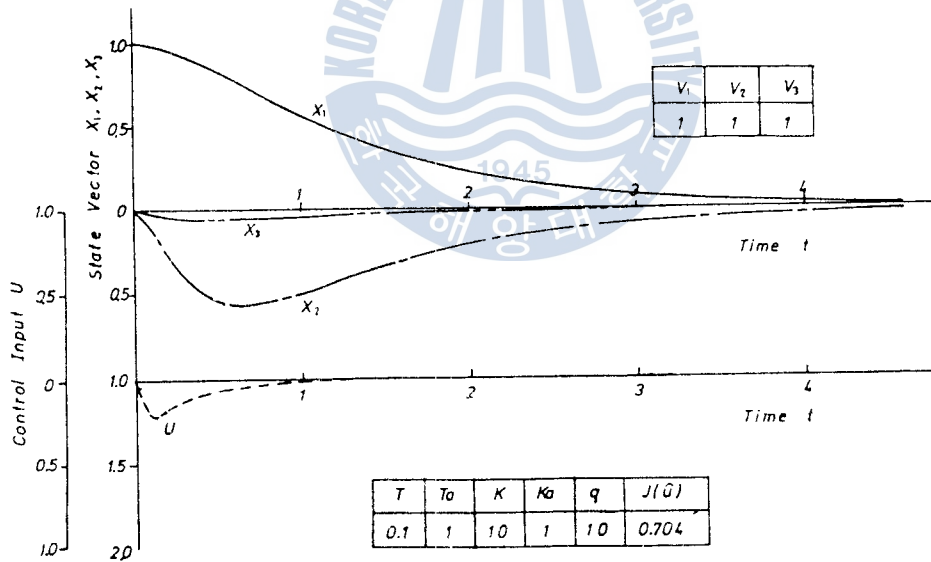
(5) V 가 變換 境遇



(a)



(b)



(c)

< Fig. 9 >

(b)(c)의 境遇는 (a)의 境遇보다 시스템의 應答 $\mathbf{X}(t)$ 가 늦어져 $J(\hat{U})$ 의 값이 增加하고 狀態벡터 x_2, x_3 의 振幅과 制御入力 \hat{U} 가 작아진다.

(b)와 (c)의 境遇 시스템의 應答 $\mathbf{X}(t)$ 와 制御入力 U 가 거의 비슷하다.

5 . 結 論

以上과 같이 本研究에서는 3次系統을 狀態方程式으로 表示하고 狀態벡터와 制御入力에 對한 2次形式의 加重合의 積分을 評價函數로써 導入하여 最大原理를 利用한 最適制御時 各 係數들을 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 操作部の 時定數 T_a 를 작게하면 시스템의 應答이 빨라져서 最適制御評價函數 $J(\hat{U})$ 가 感少되므로 T_a 를 적게할수록 시스템은 좋아진다.

(2) 制御對象의 時定數 T 가 커지면 시스템의 應答이 늦어져 $J(\hat{U})$ 가 增加하고 定常利得 K 가 커지면 시스템의 應答이 빨라져 $J(\hat{U})$ 가 感少한다.

(3) 狀態벡터의 荷重行列 V 에서

$$\textcircled{1} \quad V_1 = 1 \quad V_2 = V_3 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad V_1 = V_2 = 1 \quad V_3 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad V_1 = V_2 = V_3 = 1$$

②, ③의 境遇는 ①의 境遇보다 시스템의 應答은 늦어져 $J(\hat{U})$ 의 값도 增加하나 制御入力 U 와 狀態벡터 x_2, x_3 의 振幅은 작아진다.

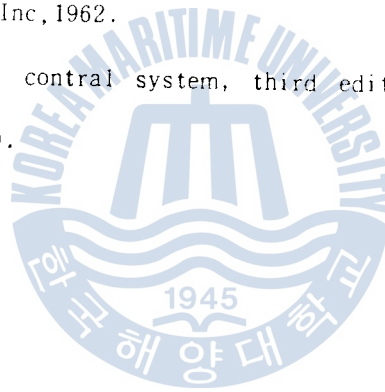
②와 ③의 境遇 시스템의 應答과 制御入力이 거의 비슷하므로 操作部를 지난 狀態벡터 x_3 의 最適制御問題에 對해 고려하지 않아도 된다.

(4) 制御入力の 荷重係數 q 가 커지면 시스템의 應答늦어지나 制御入力 \hat{U} 가 感少한다.

本 方法에 의해서 求한 最適制御系統에 對해 古典的 制御理論인 周波數應答을 利用한 設計法을 比較 檢討하고 여러가지 制御對象에 대해서도 考察해 보면 좋을 것으로 思慮된다.

参 考 文 献

1. 廣田實, 船舶制御 システム工學, PP.199 ~ 201, PP.215 ~ 241, 成山堂書店, 1982
2. 古田勝久, 基礎 システム理論, PP.114 ~ 127, コロナ社, 1978.
3. 河注植, 自動制御工學, 海事圖書出版部, 1976.
4. Ogata, State space analysis of control systems, Prentice - Hall, Inc,1967
5. M.Athons and P.L Falb ; Optimal control, Mcgraw-Hill, 1983.
6. L.S.Pontryagin, et al ; The mathematical theory of optimal process,
Interscience publishers, Inc,1962.
7. Richard C. Dorf, modern control system, third edition, Addison - wesley
publishing company, 1980.



最適船用機關의 選定 및 그의 經濟性 評價方法에 關한 研究

曹 基 烈

A Study on the Selection of Optimal Marine Engine
and its Techno-economical Evaluation Method

Ki - yeol Cho

目 次

Abstract

記號說明

1. 序 論
2. 機器選定을 위한 經濟性 分析의 手法
 2. 1 經濟性分析의 理論
 2. 2 經濟性分析의 資料
3. 主機選定の 資料
 3. 1 候補主機의 選定
 3. 2 候補主機의 順位決定을 위한 經濟性 分析
4. 發電시스템 選定の 概要
 4. 1 廢熱에 의한 發生可能蒸汽量과 電氣量
 4. 2 最適主機 및 發電시스템의 選定
5. 最適主機의 選定 및 經濟性評價의 適用實例
 5. 1 適用모델船의 概要와 候補主機選定
 5. 2 發電시스템의 選定과 綜合評價
6. 結 論

參考文獻