

3차 PLL SYSTEM에서의 flicker noise 분석

김형도* · 김경복* · 조형래*

Flicker Noise Analysis in the Third-order of the PLL System

Hyung-do Kim* · Kyoung-bock Kim* · Hyung-rae Cho*

ABSTRACT

In this paper, using third-order system of the PLL we analyze the aspect of flicker noise appearing troubles in the low frequency band.

Since it is difficult to analyze mathematically flicker noise in the third-order system of the PLL, introducing the concept of pseudo-damping factor using the optimized second-filter makes an ease of the access of the flicker-noise variance.

We'll show a numerical formula of flicker variance in the third-order system of the PLL which is compared with that of $1/f$ noise variance in the second-order system of the PLL.

I. 서론

현대 물리학에서 있어서 가장 풀리지 않는 문제 가운데 하나인 flicker noise는 1925년에 Johnson에 의해 electron tubes의 전류에서 처음 발견된 이래로 신호의 변동과 물리적 변수가 상관되지 않은 system의 diversity에서 $\frac{1}{f^\delta}$ ($\delta \approx 1$)와 같이 저주파에서 집중되는 PSD에 의해 특징 지어져 왔다. 그 spectrum이 $1/f$ 의 형태를 가지므로 $1/f$ noise라고 불리기도 하는 이 noise는 대부분의 물리적 system에 존재하는 것으로 알려져 있다.

flicker noise에 대한 분석적 해석이 어렵기 때문에 물리적인 system에서 일어나는 원

* 한국해양대학교 공과대학 전파공학과

이터의 phase $\phi(t)$ 는 내부 노이즈 소스에 기인한 random angular perturbation을 표현한다.

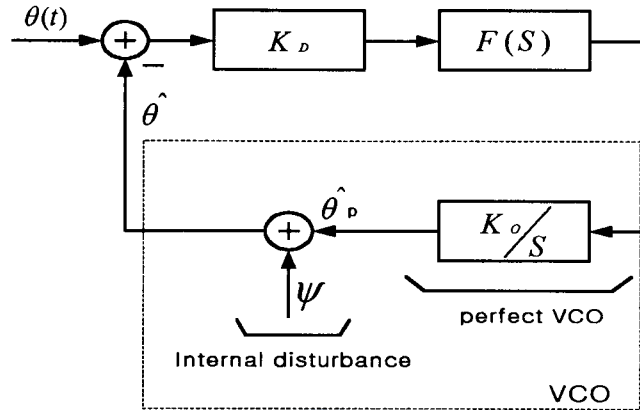


그림 3 .VCO가 내부 잡음 source $\psi(t)$ 를 가졌을 때의 PLL 선형 모델

$$\frac{S_{\phi_{osc,n}}(f)}{f_0^2} = \frac{h_{-1}}{f^3} + \frac{h_0}{f^2} + \frac{h_1}{f} + h_2 \tag{9}$$

발생되어진 noise의 PSD는 위의 (9)식과 같이 표현되어 진다.[2]

$$\text{여기서, } \begin{cases} h_{-1} = a_{-1}/4Q_L^2; & h_0 = a_0/4Q_L^2; \\ h_{-1} = a_{-1}/f_0^2 L^2; & h_0 = a_0/f_0^2 L^2; \end{cases}$$

로 표현되어지고, h_a -계수는 oscillator 형태에 의존하며 일반적으로 출력의 phase noise power 가 최소화되도록 최적화 되어 설계되어진다.

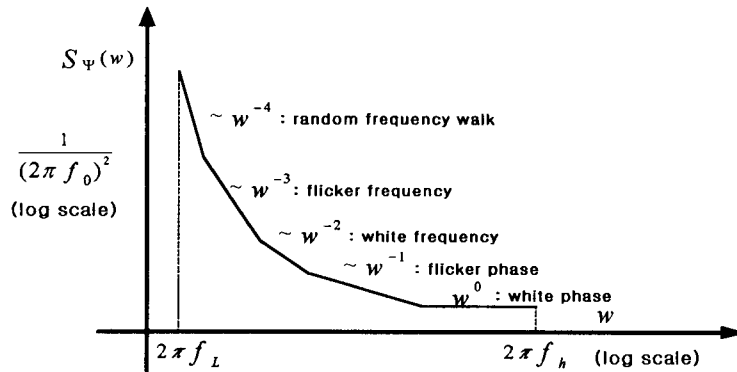


그림 4 .phase noise process의 PSD[1]

$$S_{\phi}(w) = \omega^2 S_{\psi}(w) \tag{11.a} [1]$$

$$S_{y}(w) = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} S_{\psi}(w) = h_{-2}|w|^{-2} + h_{-1}|w|^{-1} + h_0 + h_1|w| + h_2|w|^2 \tag{11.b}$$

이와 같이 phase noise process의 spectral density로 나타내면

$$S_{\psi}(\omega) \frac{1}{(2\pi f_0)^2} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2} \frac{S_{\psi}^{(\omega)}}{\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\omega^2} (h_{-2}|\omega|^{-2} + h_{-1}|\omega|^{-1} + h_0 + h_1|\omega| + h_2|\omega|^2) \quad (11.c)$$

여기서, $0 < 2\pi f_L \leq |\omega| \leq 2\pi f_h < \infty$

$$\hat{\theta}_{\phi}(s) = k_D k_O \frac{F(s)}{s} \Phi(s)$$

phase error $\Phi(s)$ 는 항상 $\theta(s)$ 와 그것의 추정치 $\hat{\theta}(s)$ 의 차로써 정의되므로,

$$\phi(s) = \theta(s) - \hat{\theta}(s)$$

$$= \theta(s) - [\hat{\theta}(s) + \phi(s)] \quad (12.a)$$

$$\text{이는 } \phi(s) = \theta(s) - \left[\frac{K_D K_O F(s)}{s} \phi(s) + \phi(s) \right]$$

$$\phi(s) = \frac{1}{1 + [K_O K_D F(s)/s]} [\theta(s) - \phi(s)]$$

그러므로 oscillator의 불안정도에 기인한 phase error variance는 다음과 같다.

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |1 - H(s)|^2 S_{\phi}(\omega) d\omega \quad (13)$$

2-2. 시간에 의존하는 deterministic phase noise process에 대한 제거 방법

실제적으로 quartz oscillator나 maser, atomic frequency standard와 같은 정밀한 주파수 source 조차도 random하기 때문에 deterministic component로 인해 phase와 frequency instability에 영향을 받으므로 이러한 noise process에 대해 제거하는 방법으로 구조함수가 이용된다.[1],[3]

먼저 이러한 불안정도의 요인은 열 또는 shot, flicker noise와 같은 noise source에 기인한 random fluctuation등이 있는데 이는 device의 내부적 요인으로 발생되어진다.

이때, oscillator의 두 가지 type인 perfect oscillator와 보다 실제적인 imperfect oscillator의 경우에 대해 time function은 다음과 같다.

$$\text{perfect} \rightarrow T(t) = t - t_0 \quad (14)$$

$$\text{imperfect} \rightarrow T(t) = t - t_0 + \frac{\Delta f}{f_0} t + \frac{\dot{\Delta f}}{f_0} \frac{t^2}{2} + \frac{\Psi(t) - \Psi(t_0)}{2\pi f_0} \quad (15.a)$$

이때 정의에 의해 TI(Time Interval)

$\Delta^1 T(t; \tau)$ 는

$$\Delta^1 T(t; \tau) = T(t + \tau) - T(t) \quad (15.b)$$

$$\Delta_p^1 T(t; \tau) = (t + \tau - t_0) - (t - t_0) = \tau \quad (15.c)$$

$$\Delta_I^1 T(t; \tau) = \tau + \frac{\Delta f}{f_0} \tau + \frac{\dot{\Delta f}}{2f_0} (2t\tau + \tau^2) + \frac{\Delta^1 \Psi(t; \tau)}{2\pi f_0} \quad (15.d)$$

여기서 imperfect $T(t)$ 에 있어서 노이즈를 구성하는 두 요소는 deterministic term인 Δf , $\dot{\Delta f}$ 와 random term인 $\Psi(t)$ 로 표현되어 질 수 있다.

여기서 Δf 는 oscillator frequency settability이고 $\dot{\Delta f}$ 는 drift rate, $\Psi(t)$ 는 oscillator random phase noise process를 나타낸다.

$\Delta^1 \Psi(t; \tau)$ 는 phase noise process의 첫 번째 증가치를 표현한다. 여기서,

$$E[\Delta^1 T(t; \tau)] = \tau + \frac{\Delta f}{f_0} \tau + \frac{\dot{\Delta f}}{2f_0} (2t\tau + \tau^2) \quad (16)$$

결국 oscillator에서 나타나는 τ 는 이상적인 zero crossing에 관계한다.

다른 term들은 시간 경로 상에서 발생되어진 TI의 평균 확장 또는 수축을 특징 짓는다.

여기서, $D_T^{(1)}(t; \tau) = E\{[\Delta^1 T(t; \tau)]^2\}$

$$D_T^{(1)}(t; \tau) = \frac{D_\Psi^{(1)}(\tau)}{(2\pi f_0)^2} + E\{[\Delta^1 T(t; \tau)]\}^2 \quad (17)$$

\therefore TI의 variance는

$$Var[\Delta^1(t; \tau)] = \frac{D_\Psi^{(1)}(\tau)}{(2\pi f_0)^2} \quad (18)$$

여기서 $D_\Psi^{(1)}(\tau)$ 는 위상 잡음 과정에서의 첫 번째 구조 함수이다.

여기서 TIS(Time Interval Stability)를 고려하기

위해 $\Delta^1 T(t; \tau)$ 와 $\Delta^1 T(t + \tau; \tau)$ 에 대응하는 연속적인 interval $[t, t + \tau], [t + \tau, t + 2\tau]$

$$\begin{aligned} \text{대하여, } \Delta^2 T(t; \tau) &= \Delta^1 T(t + \tau; \tau) - \Delta^1 T(t; \tau) \\ \text{에} \quad &= T(t + 2\tau) - 2T(t + \tau) + T(t) \end{aligned} \quad (19)$$

이는 시간에 대한 함수 $T(t)$ 의 2차 증가를 나타낸다.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 T(t; \tau)}{\tau^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{T(t + 2\tau) - 2T(t + \tau) + T(t)}{\tau^2} \right] \quad (20)$$

위의 식과 같이 limit가 존재할 때 TIS와 순시 정규화 주파수 drift는

$$\frac{1}{2\pi f_0} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = u(t) \quad (21.a)$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{2\pi f_0} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} \\ T(t) = \frac{d\Phi}{2\pi f_0} \end{cases} \quad (21.b)$$

$$\frac{d^2 \frac{\Phi(t)}{2\pi f_0}}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt} = u'(t) \quad (21.c)$$

perfect oscillator에 있어서

$$\Delta^2 T(t; \tau) = 0 - 0 = 0 \quad (22)$$

이는 시간이 경과함에 따라서 perfect oscillator의 frequency는 drift 되지 않음을 의미한다. 그리고 발생되어진 시간 간격은 안정함을 의미한다.

(15.d)식을 imperfect oscillator에 대한 (19)식에 대입하면

$$\Delta^2 T(t; \tau) = \frac{\Delta f \tau^2}{f_0} + \frac{\Delta^2 \Psi(t; \tau)}{2\pi} \quad (23)$$

$\Delta^2 \Psi(t; \tau)$ 는 위상잡음 process의 2차 증가도를 나타낸다.

$$\text{평균 TIS, } E[\Delta^2 T(t; \tau)] = \frac{f_T^2}{f_0} \quad (24)$$

$$D_T^{(2)}(t; \tau) = \frac{D_\Psi^{(2)}(\tau)}{(2\pi f_0)^2} + (E[\Delta^2 T(t; \tau)])^2 \quad (25)$$

$$\text{Var} [\Delta^2 T(t; \tau)] = \frac{D_\Psi^{(2)}(\tau)}{(2\pi f_0)^2} \quad (26)$$

여기서 불완전 oscillator에 있어서 TIS의 평균과 variance가 시간 t 에 의존하지 않으므로 이와 같은 전개상에서 고차 구조 함수를 Time process상에서 이용하면 노이즈 source원인 oscillator로부터 deterministic noise component들을 제거할 수 있으므로 random process로 알려진 flicker noise만을 고려할 수 있게 된다.

3-1. 2차 system에서의 flicker noise

본 논문에서 고려한 system의 Loop filter는 Active filter이다. 실제 system에서 그 이득과 관계하여 흔히 사용되어지는 형태이다. [4]

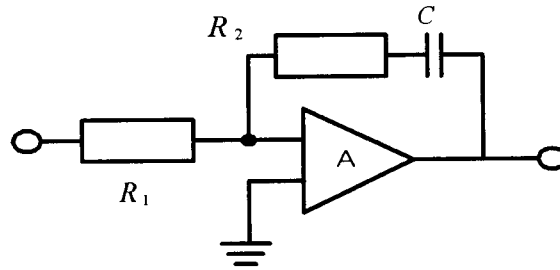


그림 5. 2차 시스템의 active filter

시스템의 전달함수 $H(s)$ 다음 식과 같이 주어진다.

$$H(S) = \frac{2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (27)$$

시스템의 noise bandwidth는

$$B_n = \frac{\omega_n}{8\delta} (1 + 4\delta^2) \quad (28) \text{이 된다.}$$

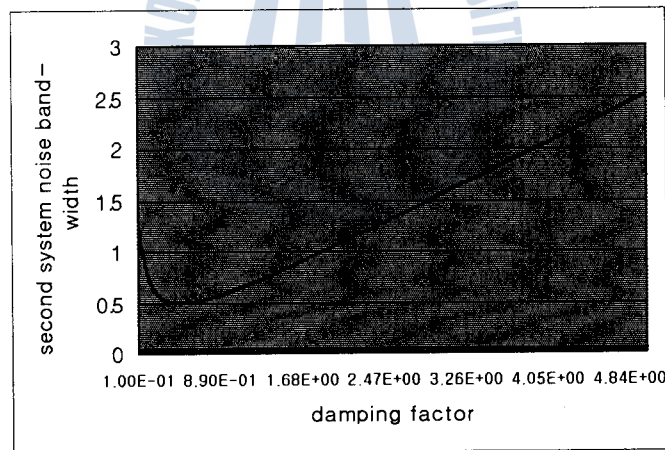


그림 6 .2차 시스템의 noise bandwidth

시스템의 전달함수를 이용하여 본 논문에서 고려하는 flicker noise spectrum을 system의 error 전달함수에 통과시키면 flicker noise variance를 구할 수 있게된다.[1][4]

$$\sigma_\phi^2 = \frac{\omega_0^2 h_{-1}}{4\pi(2B_L)^2} r(\delta) = \frac{\omega_0^2 h_{-1}}{4\pi\omega_n^2} f(\delta) \quad (29)$$

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{4\delta\sqrt{\delta^2-1}} \ln \frac{2\delta^2-1+2\delta\sqrt{\delta^2-1}}{2\delta^2-1-2\delta\sqrt{\delta^2-1}} & (\delta > 1) \\ \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\delta^2-1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \right] & (\delta < 1) \\ 1 & (\delta = 1) \end{cases} \quad (30)$$

이때 $r(\delta) = (\delta + 1/4\delta)^2 f(\delta)$ (31)의 관계를 가진다.

위의 flicker variance factor $f(\delta)$ 를 damping factor에 대하여 도시하면 다음과 같다.

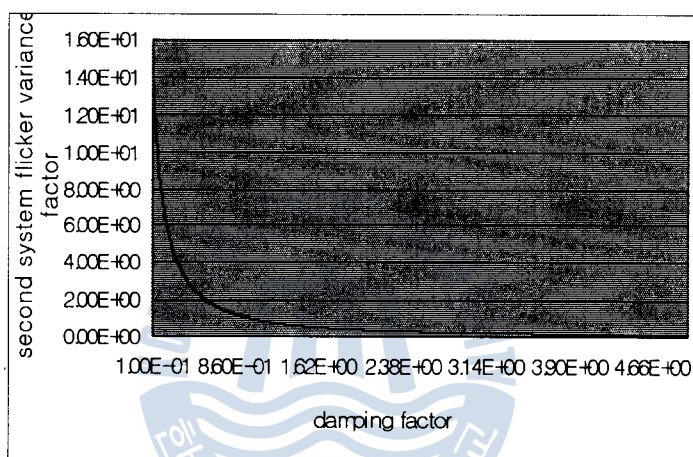


그림 7. 2차 시스템의 flicker variance factor $f(\delta)$

주어진 식에 있어서 결국 variance는 noise bandwidth의 제곱에 역 비례함을 표시하고 있다.

3-2. 3차 시스템에서의 flicker noise

3차 system에서의 특성 함수가 물리적 의미를 가지는 w_n 과 δ 에 대해서 표현되어 있지 않는다.

다행히 3차 system은 2차 system의 보상 회로가 가해진 형태로 파악 할 수 있으므로 2차 system에서 유추되어지는 pseudo-damping factor 와 pseudo-natural 각 주파수를 도입한다.[5]

system의 전달 함수는 $H(s)$

$$= \frac{(K_v \frac{\tau_2}{\tau_1 \tau_3})(s + 1/\tau_2)}{s^3 + (1/\tau_3)s^2 + (K_v \tau_2 / \tau_1 \tau_3)s + K_v / \tau_1 \tau_3} \quad (32)$$

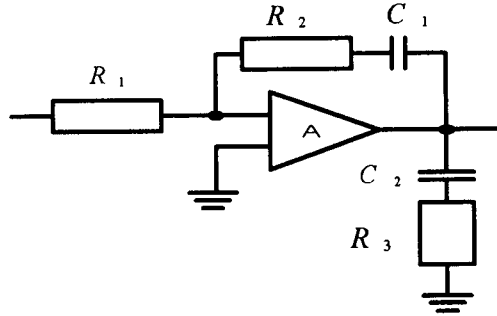


그림 8 . 2차 시스템의 active 필터

이때 system의 특성함수는 다음과 같다.

$$s^3 + \frac{1}{\tau_3} s^2 + \frac{K_v \tau_2}{\tau_1 \tau_3} s + \frac{K_v}{\tau_1 \tau_3} = 0 \quad (33)$$

$$\begin{cases} s_1 = c, & c < 0 \\ s_2 = a + jb, & a < 0 \\ s_3 = a - jb, & b > 0 \end{cases}$$

를 근으로 두면,

$$\begin{cases} \delta = \cos \Psi = \cos(\tan^{-1} \frac{b}{a}) = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ a = -w_n \delta \\ w_n^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad (34) \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} \tau_3 = \frac{1}{w_n(1+2\delta)} & \text{①} \\ \tau_2 = \frac{1+2\delta}{w_n} & \text{②} \\ \tau_1 = \frac{K_v}{w_n^2} (1+2\delta) & \text{③} \\ \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{w_n}{K_v} & \text{④} \\ \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{1}{(1+2\delta)^2} & \text{⑤} \end{cases}$$

위의 식을 이용하면 특성함수는 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$(s + w_n)(s^2 + 2\delta w_n s + w_n^2) = 0$$

$$s^3 + w_n(1 + 2\delta)s^2 + w_n^2(1 + 2\delta)s + w_n^3 = 0 \quad (35)$$

물리적 의미가 없는 의사 w_n 을 보상하기 위해서 개 루프 전달함수로부터

$\Phi_M = \arctan \omega \tau_2 - \arctan \omega \tau_3$ 를 2차에서 유추해내다. 이러한 과정을 거친 최적 필터를 구성한다.

$$w_M^2 = \frac{1}{\tau_2 \tau_3} \text{로 둘 때 } \tau_3 \text{ 을 제거하면, } \frac{1}{\tau_2^2} = \frac{w_M^2}{(2 \cos \Psi + 1)^2} ; \frac{1}{\tau_2} = R \text{로 두면,}$$

$$w_M^2 = R^2 (2 \cos \Psi + 1)^2 \quad (36)$$

$\therefore w_M = w_n = (a^2 + b^2)^{1/2}$ 결국 물리적 의미를 갖지 못하던 δ 에 대한 보상이 이루어지므로 이를 3차 system에 대한 flicker variance로 표현하면 앞에서 제공되어진 식들을 이용하여 flicker variance를 구해보면

$$\sigma_\phi^2 = \frac{h_{-1} w_0^2}{4\pi w_n^2} f(\delta) \quad (37)$$

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\delta^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{\delta} + 2 + 2\delta \right) \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{2\delta^2 - 1}{2\delta(1-\delta^2)^{1/2}} \right) \right], & \delta < 1 \text{일 때} \\ 5, & \delta = 1 \text{일 때} \\ \left| \frac{1}{4\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}} \left[\left(\frac{\delta(2\delta^2 - 1)}{\delta - 1} \right) \ln \left| \frac{(2\delta^2 - 1) + 2\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}}{(2\delta^2 - 1) - 2\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}} \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}} \left((1 + 2\delta)^2 + \frac{\delta}{\delta - 1} \right) \ln \left| \frac{(2\delta^2 - 1) - 2\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}}{(2\delta^2 - 1) + 2\delta(\delta^2 - 1)^{1/2}} \right| \right] \right|, & \delta > 1 \text{일 때} \end{cases} \quad (38)$$

의 식으로 유도해 낼 수 있다.

이제 3차 system에서의 noise bandwidth

$$B_n = \frac{w_n}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 + (1 + 2\delta)^2 x^2}{(1 + x^2)[(1 - x^2)^2 + 4\delta^2 x^2]} dx \quad [5] \quad (39)$$

이제 앞에서 구한 3차에서의 flicker variance factor $f(\delta)$ 와 noise bandwidth를 도식해보면 그림(9), (10)과 같다.

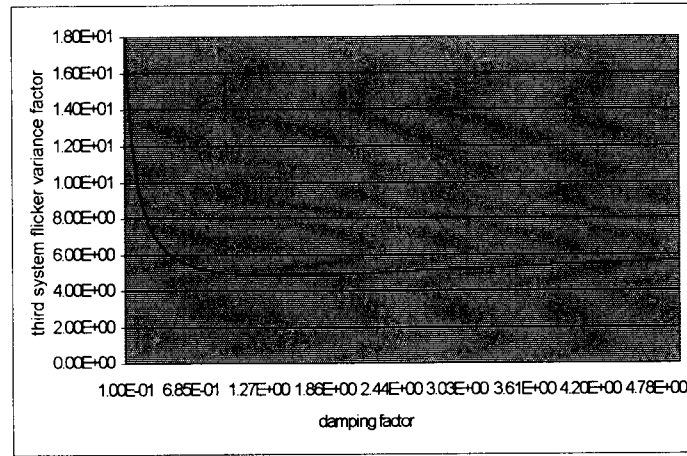


그림 9 . 3차에서의 flicker variance factor

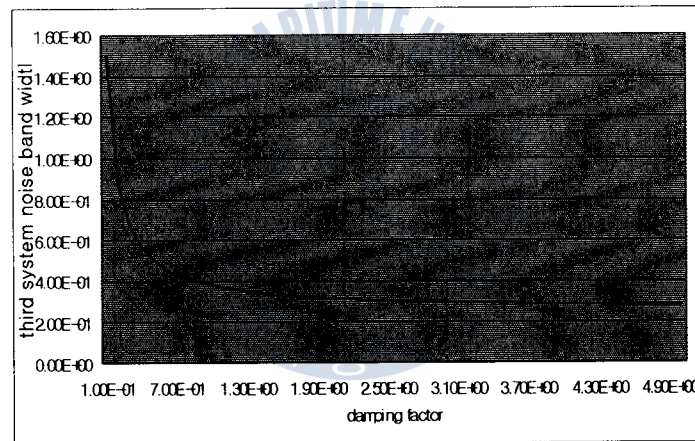


그림 10 . 3차에서의 noise bandwidth

이때, 2차에서의 flicker noise variance와 noise bandwidth의 관계에서와 같이 3차에서도 역시 noise bandwidth의 제곱에 역 비례함을 알 수 있다. 그런데 3차에서는 2차와 동일한 damping factor에 대해서 noise bandwidth가 더 작으므로 2차에 비해 더 높은 variance를 갖게 된다.

결국 앞서 나온 식들을 조합하면

$$\sigma_{\phi}^2(\omega_n, \delta) = \frac{N_0}{2A} \left(\frac{1+4\delta^2}{4\delta} \right) + \frac{\omega_0^2 h}{4\pi\omega_n^2} f(\delta) \quad (40)$$

(40)식과 같은 부가잡음과 시스템내의 위상잡음으로 나타낼 수 있으므로 이들 둘의 noise bandwidth가 서로 역 비례함을 알 수 있다. 2차와 3차의 variance factor의 관계식을 보간법을 통하여 computer상에서 구한 근사식은 다음과 같다.

$$T = (-0.008791) S^3 + (0.196334) S^2 + (-0.213857) S + (5.274167) \quad (41)$$

T: 3차 flicker variance factor

S: 2차 flicker variance factor

III. 결 론

flicker noise는 그 spectrum의 모양으로써 규정지어지는 $1/f$ 의 형태 이외에는 분석적 접근이 어렵기 때문에 물리적 system에서 분석되어지지 않는 오 동작이나 에러에 대하여 짐작으로만 예측되는 경우가 많다.

이러한 물리 시스템을 PLL로 확장하여 보다 실제적인 system인 3차로 접근하여 해석하였다.

결과로, 차수가 높아질수록 flicker variance가 커짐을 예측 할 수 있었다.

실제적으로 이용되는 damping factor가 1근방에서 모의 실험을 통하여 2차에 비해 3차에서 flicker noise variance factor가 약 5배정도 높게 나타남을 확인 할 수 있었고 2차와 3차 사이의 근사적인 관계를 computer연산을 통하여 구해 보았다. 이러한 접근을 통해 고차 PLL system에 있어서 flicker에 대한 해석과 보다 advance되어서 제안되어지고 있는 PLL system내에서도 보다 체계적인 noise의 분석이 병행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Heinrich Meyr and Gerd Ascheid, "Synchronization in Digital Communication", JohnWiley & Sons, vol.1, pp100-150, 1990.
- [2] Venceslav F. Kpoupa, "Noise Properties of PLL Systems", IEEE Trans. Comm-30, pp22-48, NO.10, Oct, 1982.
- [3] William C. Lindsey, "Theory of Oscillator Instability Based Upon Structure Functions", Proc.IEEE, vol.64, no.12, pp1652-1654, 1976.
- [4] Floayd M . Gardner, Phaselock Techniques, Wiley interscience 2nd Ed, pp 32-106, 1979.

- [5] J.B Encinas, Phase Locked Loops, Chapman&Hall,pp35-100,1993.
- [6] William C. Lindsey, "identification of Power- Law Type Oscillator Phase Noise Spectra from Measurements", IEEE Trans .Comm, vol.Im-27, NO.1, pp 46-49, March 1979.
- [7] F.L Walls And David W. Allan, "Measurements of Frequency Stability", Proc.IEEE, vol.74,no.1,pp 167, 1986.
- [8] B.Kaulakys and T. Meskukas,"Modeling 1/f noise",Physical Review E, vol. 58, pp. 7013-7014,dec,1998.
- [9] 안현순 ,“터보 C로 구현한 과학 기술계산 프로그래밍”,가남사,pp162-165,1997.
- [10] <http://spib.rice.edu/noise/pink.data>

분야 : 이동 통신

요 약

본 논문에서는 PLL 시스템의 보다 실제적인 모델인 3차 시스템을 통하여 저주파 대역에서 문제가 되는 flicker noise가 어떠한 양상을 나타내는가를 알아보려 한다. 3차에서 해석의 복잡성으로 그 수학적 분석이 난해하지만 최적화 된 2차 필터를 통한 pseudo-damping factor의 도입으로 전체적인 flicker variance의 해석이 용이하도록 시도하였다.

3차에서의 flicker variance의 수식적인 유도를 보이고 이를 2차 시스템에서 발생하는 flicker noise에 대한 variance와 비교하려 한다.