공학석사 학위논문

접수평판의 내부분열에 의한 3차원 음향 방사

Three-dimensional acoustic radiation from directional cracks in fluid-loaded plate based on Global Matrix Method

지도교수 김 재 수

1999년 2월

한국해양대학교 대학원

해 양 공 학 과

최 규 훈

本 論文을 崔圭勳의 工學碩士 學位論文으로 認准함

주 심 : 공학석사 최 경 식 ㊞

위 원 : 공학박사 강 효 진 ㊞

위 원 : 공학박사 김 재 수 ㊞

1999년 2월

한국해양대학교 대학원

해 양 공 학 과

최 규 훈

Three-dimensional acoustic radiation from directional cracks in fluid-loaded plate based on Global Matrix Method

by

Kyu Hoon Choi

Department of Ocean Engineering

Graduate School of Korea Maritime University

Abstract.

The formation of crack in elastic media such as fluid-load plate generates elastic waves in a radiation pattern being dependent on the actual fracture process and the stratification of medium. In case of horizontal stratification, this phenomenon can be idealized and mathematically modeled describing the directionality of the acoustic emission produced by compact cracks in such an environment.

The object of the research has been to develop an analytical and numerical model of the elastic wave field in range independent elastic environments for various seismic source mechanisms. The source types being considered are dip slip, strike slip and tensile crack. First, the compact source representations with fault surface in an arbitrary direction will be derived, and incorporated in a numerical model for propagation in stratified elastic media to yield the seismo-acoustic field produced by more complete cracking mechanisms.

The developed model is applied to the acoustic radiation from three directional crack in fluid-load plate. The developed model can be applied to the source inversion problem, i. e. the characterization from acoustic emission with the purpose of obtaining a better understanding of the ocean structure of self noise in fluid-load plate.

목 차

그림 목차

1. 서 론

해양 환경에 있어서 수중음향은 세계 대전 이후 군사적인 측면에서 시작된 연구이다. 2차 세계대전 이후에 산업전반에 대한 요소기술의 발달로 잠수함과 같은 표적에 있어서 방사소음준위가 낮아지고 은닉성이 향상됨에 따라 이를 탐지하기 위해 음압준위에 영향을 주는 주변소음에 대한 연구가 소음 원인과 해역별로 활기를 띄게 되었으며, 해양 음향 환경에 대한 모델의 개발에 중점적인 연구가 이루어 졌다. 그러나 거친 해수면과 비균질 해저 지질층을 경계로 전파되는 음파에 대해 그림 (1.1)과 같은 해양 환경 모델은 여러 가지 제한적 조건을 가지며, 각각의 조건에 따라 다양한 수치 모델로 개발이 되었다. 이러한 수치 모델은 최근 해양 계측 및 원격 탐사 분야의 활성화를 기반으로 전지구적 규모의 온도변화와 관련해서 음향 토모그래피(tomography)실험에도 많은 역할을 차지하고 있다.

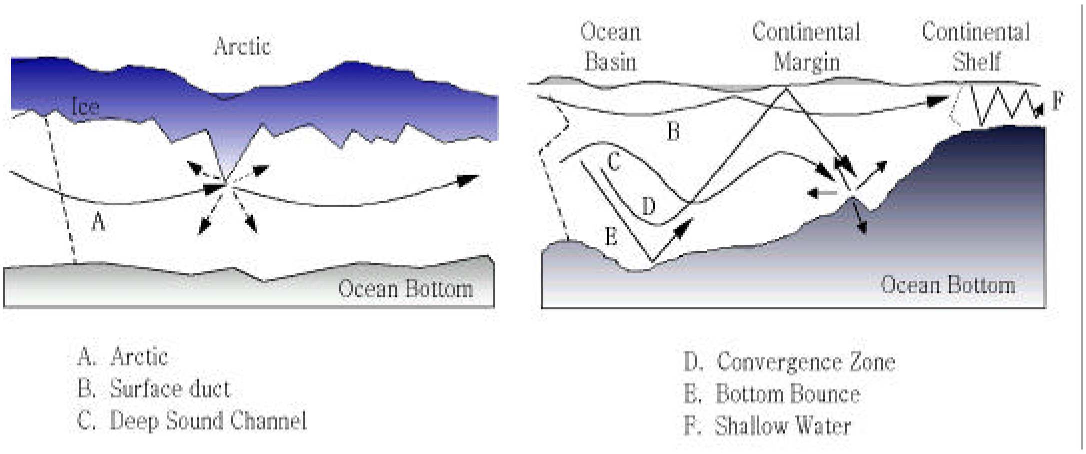


그림 1.1 다양한 음파 전달의 해양 환경

해양 환경 모델은 수중음향 분야에서 계절 및 지역별 해양 환경에 따른 음파 방사 및 전달 특성 해석과 이에 따른 소나 운영에 있어 탐지 거리 예측, 그리고 음파 탐사와 관련하여 전달 또는 반사 모델을 통한 해양 저질층의 관측자료 해석 등에 이용되는데, 이러한 분야에 국한되지 않고 적층 모델로 모델링 될 수 있는 복합재료의 구조물에서

엔진 또는 유체 소음 판(plate) 또는 표면 처리된 판(coated plat)등에 전달 손실 예측 및 음향 차폐 연구와 표면 처리에 의한 반사 계수 감소 연구에도 적용된다. 따라서 본 논문은 해양 환경에서 수중에 잠겨있는 접수 평판에 대해 내부 균열에 의해 발생된 음원의 해석적인 해를 구하고, 음원의 형태에 따른 음향 에너지의 방사현상을 이해하기 위한 것이다. 이것은 능동 혹은 수동 소나에서 표적 신호 해석을 위해 음파의 전달, 반사, 회절 등의 현상을 이해하고 나아가 해양 구조물 등의 안전 진단 등 기본 자료로 사용되어 진다.

1.1 연구 목적 및 필요성.

일반적으로 해양에서 수중에 잠겨있는 접수평판의 내부균열에 의한 음향 에너지의 방사는 매질의 환경과 음원의 방사 형태에 의존적인 탄성파를 발생시킨다. 몇 가지 문제에 있어 이러한 현상은 성층화된 탄성 매질에서 방사되는 지향성 음원에 대해 주어진 Green 함수의 해로부터 이상화 될 수 있으며 수학적으로 표현 가능하다. 이러한 Green 함수의 해는 시간과 공간의 적분으로 계산되는 파장의 영역에 대한 조합으로 유도되며, 이동음원과 같이 좀더 복잡한 균열의 생성과정에 의해 발생하는 음장을 나타낸다. 여기서 수학적 모델은 측정된 데이터로부터 음원의 메커니즘을 결정하기 위한 역문제(inverse problem)와 축적된 데이터를 가지고 특정지역에 대해 관심 있는 환경요소를 예측하기 위한 정문제(forward problem)로 나뉘게 되며, 이러한 모델의 이론적 배경은 지진 음향학에서 관측된 데이터로부터 지질학적 구성을 규명하는 중요한 수단으로 출발하였다.

본 연구의 취지는 다양한 음원의 메커니즘을 적용하여 거리종속 환경에서, 그림 1.2와 같이, 주변 환경과 구분되는 내부 음원으로부터 접수평판에 음향 에너지가 방사되는 현상과 그에 따른 시간 응답을 구하기 위해 탄성파 영역의 모델을 개발하는 것이다.

1.2 연구 동향.

접수 평판에서 내부 음원에 의한 음향에너지의 방사 현상을 이해하기 위해 적용되는 전달모델을 설명하기에 앞서 일반적으로 해양 환경에서 음향 에너지의 방사현상과 전달 모델을 위한 연구동향은 다음과 같다.

수중음향 모델은 그림 (1.3)과 같이 적용되는 환경에 따라 크게 두 가지, 즉 거리 독립 모델과 거리 종속 모델로 나눌 수가 있다. 우선 거리 독립 모델은 수중음향 환경이 수평방향으로 무시할 수 없는 양으로 변할 때, 비교적 정확하게 음파 전달을 예측할 수 있는 방법으로 거리 종속 환경에 비하여 훨씬 복잡하며 계산 시간이 길고 방법마다 장단점이 있다. 우선 음선 이론은 환경 모델에 따라 다르지만, 별로 어렵지 안게 적용될 수 있는 반면, 음원의 빔 패턴과 무관한 수치적 모델로, 유체에 제한적으로 사용되며, 탄성 매질에 대해 P파와 SV파의 결합 때문에 한번 음선이 경계면을 통과할 때마다 4개의 음선으로 증가되어 탄성파의 모델에는 적합하지 않다.

또한 음선 이론은 기본적으로 고주파 근사 방법으로 음영지역 등이 나타나므로 임계각으로 입사하여 경계면을 따라 진행하다가 다시 임계각으로 나오는 굴절파의 형태로서 선두파(Head wave)를 해석 할 수 없다. Modal Method는 계산상에 효과적인 알고리즘을 제공하지만 수학적으로 근접지역(Near field)에서 근사식에 의한 해를 구하므로 정확한 해를 구할 수 없고, 고주파수에서 존재하는 모우드의 수가 많아져서 복잡해진다. 하지만 거리 독립 환경에 적용하는 것으로는 모우드 사이에 결합을 고려하지 않는 단열(Adiabatic) Modal Method와 약한 결합을 고려하는 결합(Coupling) Modal Method의 확장으로 두께 또는 깊이가 변화하는 도파관에 적용이 가능하다. 포물선 방정식(Parabolic Equation)방법은 거리 독립 환경에 대해 음향 에너지 전달에 적용되는 방법으로 유체 영역에 제한적으로 사용되며 도파관의 변화를 적용할 수 있다. 이상의 방법이외에 유한 차분법(Finite Difference Method)과 유한 요소법(Finite Element Method)이 있는데 이러한 방법들은 현재 수치적 프로세서가 제공하는 계산 능력의 제한으로 인하여 주로 저주파에서의 단거리 음향 전파에 사용되며 많은 경우에 2차원적인 문제를 풀기 위하여 사용되고 있다. 이외에서 수치 해석적 방법을 조합한 방법들이 개발되고 있으나 실용단계는 아직 아니다.

그림 1.2 접수 평판 환경

실제 해양환경에 대해 좀 더 간단한 모델로 이상화된 것이 거리 종속환경인 경우이다. 일반적으로 거리 종속 환경은 거리 독립 환경의 특별한 경우이므로 앞에서 언급한 방법들이 대부분 적용될 수 있으며, 해양 환경이 거리 종속 환경이라는 점을 이용하면 수치적 계산의 효율과, 수치적 수렴(Convergence), 불안정(Instability)등의 문제가 많이 해결되는 풀이 방법을 제공한다. 앞에서 언급된 음선 이론과 Modal Theory와 달리, 음향 변환자 배열과 해양 퇴적층을 감쇄 계수가 있는 탄성체(Viscous Elastic Medium)로 모델링 할 수 있는 적분 변환 방법은 FFP(Fast Field Program) 또는 Full Wave Solution이라 불리는 방법이다. 이 방법은 우선 4개의 변수, 즉, (r, θ, z, t)에 대한 편미분 방정식인 파동 방정식을 주파수-시간 푸리에 변환을 사용하여 Helmholtz 방정식으로 바꾼 후, 거리에 대한 Hankel 변환 및 수평 방향의 각도 θ에 대한 푸리에 변환을 사용하여 깊이에 관한 상미분 방정식을 유도하고, 매질의 경계면에서 각각의 경계 조건을 적용하여 식을 세우게 된다. 이 식을 행렬을 이용하여 풀기 때문에 GMM(Global Matrix Method)라고 부르기도 하며, 행렬식으로부터 구한 해는 다시 역변환(Inverse Transform)을 하게 되는데 이 과정에서 흔히 문제가 되는 수치적인 수렴이나 불안정 문제를 해결하기 위해 중첩에 의한 방법이 사용된다. 이 모델은 유체 및 고체가 복합적으로 구성된 경우에 적용 가능하고, 근거리에서 정확한 해를 제공하므로 접수 평판 환경과 같이 탄성매질과 해양음파의 상호 작용을 연구하는데 활용된다.

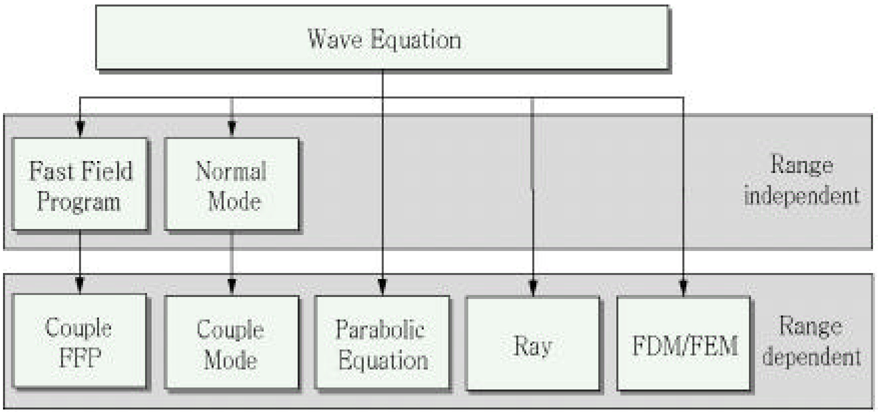


그림 1.3 수중음향 전달 손실 모델의 분류

1.3 연구 방법

수평으로 분리된 탄성매질에서 파동방정식의 해를 구하기 위한 Fast Field Programs는 층상화된 경계면에서 수치적 음원에 의해 발생하는 음압의 계산을 위해 효과적인 알고리즘이다. 즉, 수심에 종속적인 Green 함수(Green's function)에서 수평방향 파수(horizontal wavenumber)를 결정하기 위해 수치적분법을 이용하는데 이는 변위와 압력을 적분으로 표현하기 위한 방법이다.

몇 개의 층으로 구성된 매질의 환경은 직접 적분에 적합하지 않은 Bessel함수를 포함하기 때문에 Marsh(1961년)에 의해 Hankel 함수의 근사식이 사용되었으며, 고속 푸리에 변환에 의해 해를 구하기 위한 DiNapoli가 제안한 초기 FFP 모델은 Thomson-Hanskell 행렬 방법에 의해 유체 영역에 제한 적인 해를 구하는 것이었다. 이후에 Kutschale와 Harrison에 의해 수정되어 몇 개의 수신기에 대한 고체 영역에서의 모델이 개발되었고, 최근 Schmit에 의해 각 경계면에서 환경의 요소를 음원의 항과 미지의 스칼라 포텐셜로 표현하여, 유한 요소 프로그램에서와 유사한 방법으로 국부 방정식을 전역 방정식으로 전환함으로써 다수의 음원과 수신기에 대한 효과적인 알고리즘을 제공하게 되었다.

본 논문에서 제언된 음원은 폭발성 음원과 Point force, 힘 모멘트, 전단 균열, 그리

고 인장 균열에 대해 고려하였다. 즉, 임의의 방향에 대해 단층의 표면에 간결한 음원 형태를 유도하고, 기본적인 Green's 함수의 해를 구해 성층화된 탄성매질에서의 전달을 위한 수치적 모델과 병합하였다. 여기서 구한 해는 이동하는 균열과 같이 좀 더 복잡한 균열의 메커니즘에 의해 음원의 전파가 진행되는 지진 음향 영역을 유도하는 데 적용되며, 적층 매질의 전달에서 이방성 효과를 포함하게 된다. 따라서 적층 매질에서 지진음향의 방사 모델에 대한 접근은 다음과 같다. 균일한 매질에서 단일 체적력에 기인하는 임의의 음원에 대해 시간 방정식은 Keilis-Borok's에 의해 간단한 공식으로 유도되며, 조화 음원 방정식을 고려하여 균일한 매질에서 변위의 불연속성을 효과적인 체적력으로 대신하는 Burridge와 Knopeff의 결과와 표현 이론에 의해 진동음원의 형태를 나타낸다. 따라서 전단 균열과 인장균열 음원과 같이 고차원 음원은 확실한 방향에 대해 힘 요소의 합이 된다. 측면으로 성층화된 매질에서 전체 해를 결정하기 위한 전달 모델에서 이러한 음원항의 합산을 위해 원통형 좌표계에서 거리 의존적인 Green 함수는 음원의 각 형태에 따라 유도되어 진다. 본 논문은 3차원 Fast Field Program으로 층상 매질에서 전달 모델의 해를 구하였다. 이와 같이 특별해를 구하기 위한 기술은 몇 개의 방위각에 대해 Fourier항 영역에서 효과적으로 동시적인 취급 때문에 선택되어 지며, 방향성 음원항을 수용하기 위해 개발되었다.

일반적으로 수평으로 층상화 된 매질에서 해는 원통형 좌표계를 사용하는데 이것은 직각 좌표계에서 x와 y에 대한 적분 변환식으로부터 역변환의 값을 구하는 경우에 수치적 비효율성 때문에 복잡해지지만, 거리 종속 환경에서 원통형 좌표계에 의해 변수 r에 대한 하나의 적분 변환식은 방위각에 대해 Fourier 합의 형태가 되는 것이다. 원통형 좌표계에서 운동방정식은 방위각에 대한 Fourier 변환과 거리에 대한 Hankel 변환식으로 수심 분리방정식이 되고, 수심 좌표 z에 대해 남아있는 상미분 방정식은 수평 경계면에서 적절한 경계조건에 의해 각 경계면에 대한 선형 방정식으로 구성돠어 된다. 각 매질에서 구성된 행렬은 각각의 방위각에 대한 Fourier 차수와 전체 매질에 대해 연속적 파동방정식으로 주어져 전체 행렬로 결합된다. 깊이 종속의 해를 각 매질에 대해 구할 때마다 역 Hankel 변환이 각각의 방위각에서 Fourier 차수에 대해 실행하며, 주파수 영역의 해는 Fourier 차수의 합으로 구하고, 마지막으로 시간 영역의 해는 다시 주파수-시간 역 Fourier 변환에 의해 구하게 된다.(그림 1.3 참조)

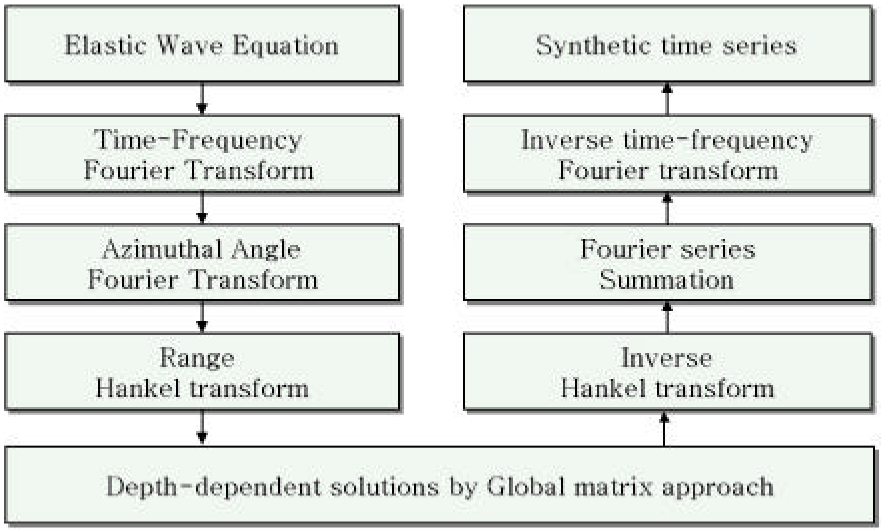


그림 1.4 FFP Overview

1.4 논문 구성.

본 논문은 6개의 장과 부록으로 구성되어 있다. 1장에서는 논문의 연구 내용과 목적 및 필요성에 대해 설명하고, 수중음향 모델에 대한 연구 동향과 FFP에 대한 대략적인 알고리즘을 설명한다.

2장에서는 진동음원을 유도하기 위한 표현 이론에 대해 단일 조합에 의해 임의의 체적력을 구하고 3차원 방향성음원, 즉 Dip-slip, strike-slip, tensile-crack에 대한 변위 포텐셜을 유도한다.

3장에서는 Green 함수의 해로 주어지는 환경 모델을 구하기 위해 일반해를 구하고, 2장에서 유도된 음원의 포텐셜로부터 환경 모델과 병합하기 위한 특별해를 각각의 음원에 대해 구한다.

4장에서는 앞에서 구한 접수 진동의 환경에 대해 경계면에서 경계 조건을 대입하여 전체 행렬로 풀기 위한 방법을 설명하고, 여기서 구한 해를 가지고 전달 손실 및 시간 응답을 얻기 위한 이론을 정리하였으며, 수치 예제로 3가지 음원 형식에 대한 시간 응

답을 구한다.

5장에서는 본 논문에 대한 요약 및 결과에 대해 논의하고, 접수 진동문제를 실제 현상에 적용하기 위한 연구 방향에 대해 언급하였다.

2. 진동 음원에 대한 유효 체적력 표현 이론

균일한 매질에서 유효 체적력을 고려하기 위한 진동 음원의 표현 이론은 Keilis-Borok's의 결과로부터 유도된 힘의 조합 공식을 바탕으로 한다. 이것은 단일 힘의 방사를 등방성 매질에서 수학적 중첩에 의해 힘과 변위에 대한 포텐셜로 표현한 것이며, 단일 조합은 방향에 의존적인 형태로 적절히 유도된 힘으로부터 얻어진다. 따라서 이중조합은 단일 조합의 선형 결합으로부터 유도함으로써 좀 더 복잡한 형태, 즉 dip-slip, strike-slip, tensile-crack등의 음원을 유효 체적력으로 나타낼 수 있다.

진동 음원의 수학적 묘사는 두가지 다른 방향에서 접근된다. 하나는 체적력에 의한 것이며, 다른 하나는 표면 균열에 의한 변위 또는 변형의 불연속성에 의한 것이다. 그러나 일반적으로 진동음원의 유도과정에서 변위와 변형의 불연속성은 체적력에 의해 표현한다. 결과적으로, Burridge and Knopoff에 의해 사용되어진 표현 이론은 기본 운동에 대한 등가의 체적력이 이중 조합에 의한 것임을 나타낸다.

체적력 f와 변위의 불연속성 [u], 그리고 마찰력 [T(u, n)]에 대해 변위는 다음의 식으로 나타낸다.

$$u_n(xt) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\int\int_V fp(\eta, \eta) G_{np}(x, t-\tau, \eta, 0) dV(\eta)$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\int_{\Sigma} \{u_i(\zeta, \tau) c_{ijpq} n_j G_{np,q}(x, t-\tau, \zeta, 0)\} \tag{2.1}$$
$$- [T_p(u(\zeta, \tau), n)] G_{np,q}(x, t-\tau, \zeta, 0)\} d\Sigma(\zeta)$$

위의 식에서 첫 번째 항은 체적력에 의한 항이며, 두 번째와 세 번째항은 변위와 마찰력의 비연속성의 항이다. 여기서 체적력과 마찰력을 무시하면, 두 번째항만 남으며, 다음의 관계식을 이용하면,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_q} G_{np}(x, t-\tau, \zeta, 0) = -\int\int\int_V \frac{\partial}{\partial \eta_q} \delta(\eta-\zeta) G_{np}(x, t-\tau, \eta, 0) dV(\eta) \tag{2.2}$$

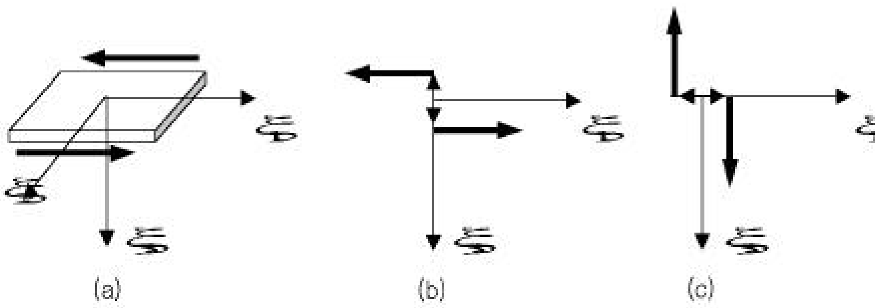


그림 2.1 기본 운동 및 Green 함수에 의해 유도된 유효 체적력

변위의 불연속성에 기인하는 식 (2.1)의 두 번째항은 다음과 같다.

$$u_n(x, t) = \int_{\infty}^{\infty} d\tau \int\int\int_V f_p^{[u]}(\eta, \tau) G_{np}(x, t-\tau; \eta, 0) dV(\eta) \tag{2.3}$$

여기서 변위의 불연속성 [u]에 대한 유효 체적력은

$$f_p^{[u]}(\eta, \tau) = -\int\int_{\Sigma} [u_i(\zeta, \tau)] c_{ijpq} n_j \frac{\partial}{\partial \eta_p} \zeta(\eta - \zeta) d\Sigma \tag{2.4}$$

식 (2.1)의 두 번째 항에서 변위의 불연속성에 대한 표면 적분은 식 (2.4)에서 체적력의 적정한 형태로부터 표현되며, 이것은 식 (2.1)의 첫 번째항에서부터 유도된다.

예를 들어, 그림(2.1)에서 보인 것과 같은 운동에 대해 유효 체적력은 식 (2.4)로부터 다음과 같이 유도 된다.

$$\begin{aligned} f_1(\eta, \tau) &= -M_0 \delta(\eta_1) \delta(\eta_2) \frac{\partial}{\partial \eta_3} X_0(\tau) \\ f_2(\eta, \tau) &= 0 \\ f_3(\eta, \tau) &= -M_0 \frac{\partial}{\partial \eta_1} \delta(\eta_1) \delta(\eta_2) X_0(\tau) \end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서 등방성 매질에서 진동 모멘트 M_0 는 다음과 같이 정의한다.

$$M_0 = \mu \bar{u} A = \mu \times \text{average slip} \times \text{fault area} \tag{2.6}$$

따라서 식 (2.2)을 식 (2.3)에 대입하면,

$$u_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{\Sigma} \mu[u_1] \left\{ \frac{\partial G_{n1}}{\partial \zeta_3} + \frac{\partial G_{n3}}{\partial \zeta_1} \right\} d\Sigma \tag{2.7}$$

위의 식(2.7)에서 가로안에 첫 번째 식과 두 번째 식은 그림 (2.1)에서 (b),(c)로 표현한 단일 조합의 항이다. 여기서 ε가 0이 될 때까지 모멘트의 크기가 존재하므로 두 개의 힘에 대해 단일 조합은 각각의 단일 체적력으로부터 유도된다.

2.1 균일 등방성 매질에서 체적력에 의한 방사

Homogeneous Medium에서의 변위에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mu \nabla^2 \mathrm{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathrm{u}) + \rho \mathrm{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathrm{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathrm{u} + \rho \mathrm{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

위의 식에 대해 각각 Divergence와 Curl을 취하면

$$c_c^2 \nabla^2 \nabla \cdot \mathrm{u} + \nabla \cdot \mathrm{F} = \rho \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathrm{u}}{\partial t^2} \tag{2.10}$$

$$c_s^2 \nabla^2 \nabla \times \mathrm{u} + \nabla \times \mathrm{F} = \rho \frac{\partial^2 \nabla \times \mathrm{u}}{\partial t^2} \tag{2.11}$$

여기서 $c_c = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$, $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ 이며, 각각 압축과 전단 파의 속도를 나타낸다. 다음과 같은 힘의 포텐셜과 변위의 포텐셜을 도입하면,

$$\mathrm{F} = (X, Y, Z) = \nabla \Phi + \nabla \times (L, M, N) \tag{2.12}$$

$$\mathrm{u} = (u, v, w) = \nabla \Phi + \nabla \times (F, G, H) \tag{2.13}$$

위의 식은 다음과 같은 파동방정식이 된다.

$$\begin{aligned} c_c^2 \nabla^2 \phi + \Phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ c_c^2 \nabla^2 F + L &= \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ c_c^2 \nabla^2 G + M &= \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ c_c^2 \nabla^2 H + N &= \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

식 (2.14)에 대한 특별해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi c_c^2} \int\int\int \frac{1}{r} \Phi' \left(t - \frac{r}{c_c} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ F &= \frac{1}{4\pi c_s^2} \int\int\int \frac{1}{r} L' \left(t - \frac{r}{c_s} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ G &= \frac{1}{4\pi c_s^2} \int\int\int \frac{1}{r} M' \left(t - \frac{r}{c_s} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ H &= \frac{1}{4\pi c_s^2} \int\int\int \frac{1}{r} N' \left(t - \frac{r}{c_s} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \end{aligned} \tag{2.15}$$

또한 위의 식에서 Φ, L , M, N 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi} \int\int\int \left(X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1} + Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} + Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_3} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ L &= \frac{1}{4\pi} \int\int\int \left(Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} - Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_3} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ M &= \frac{1}{4\pi} \int\int\int \left(X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_3} - Z' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \\ H &= \frac{1}{4\pi} \int\int\int \left(Y' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1} - X' \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} \right) dx_1' dx_2' dx_3' \end{aligned} \tag{2.16}$$

여기서 t는 시간이며, $r = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}$ 이다. 위에서 변위의 포텐셜로 표현된 식 (2.15)는 기분적으로 무한 매질에 대해 포아송 방정식의 해로부터

표현된다. 또한 힘의 포텐셜을 표현한 식 (2.16)은 벡터 포아송 방정식으로부터 유도된 해의 형태이다. 위의 식에서 단위 벡터양 X'는 가속도를 나타내며, 스칼라 양 $X_0(t-r/c_c)$ 는 단위 힘을 가지는 음원의 시간함수를 나타낸다. 따라서 식 (2.16)을 식 (2.15)에 대입하여 변위 포텐셜을 표현하며, 변위 포텐셜의 체적 적분은 표면 적분의 변환에 의한 임의의 음원 방정식으로 계산된다.[Aki]

2.2 단일 조합.

앞에서 정의된 체적 적분의 해를 구하기 위해 Keilis-Borok(1950)에 소개되어 Sato[29]에 의해 증명된 다음의 함수를 정의하면,

$$\phi_0 = \frac{1}{r}F\left(t-\frac{r}{c_c}\right), \quad \psi_0 = \frac{1}{r}F\left(t-\frac{r}{c_s}\right) \tag{2.17}$$

$$F(t) = \int_0^t ds' \int_0^{s'} X_0(s)\,ds \tag{2.18}$$

여기서 $X_0(t)$는 음원함수이다.

만약 그림 (2.2)과 같이 x_1 방향에 대해 $F = X_0\delta(t)$의 힘을 가지는 음원의 포텐셜은 식 (2.16)으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1}\right)dx_1'dx_2'dx_3' \\ L &= 0 \\ M &= \frac{1}{4\pi}\int\int\int\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_3}\right)dx_1'dx_2'dx_3' \\ H &= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int\left(X'\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2}\right)dx_1'dx_2'dx_3' \end{aligned} \tag{2.19}$$

위의 체적 적분식에서 음원의 시간 함수 $X_0(t)$에 대해 $X' = X_0\delta(x')$일 때, 다음의

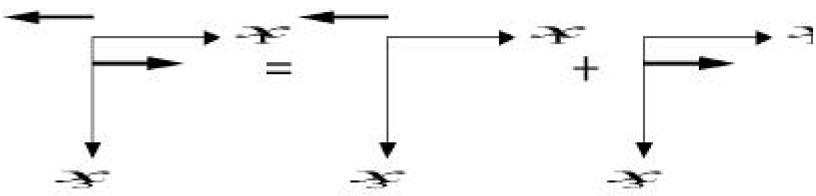


그림 2.2 두 개의 체적력에 대한 합산.

관계식이 성립하므로

$$\rho \int\int\int X'\, dx_1' dx_2' dx_3' = X_0(t) \tag{2.20}$$

위의 식을 식(2.19)에 대입하면,

$$\Phi = -\frac{X_0}{4\pi\rho}\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1},\; L = 0,\; M = \frac{X_0}{4\pi\rho}\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_3},\; N = -\frac{X_0}{4\pi\rho}\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_2} \tag{2.21}$$

을 얻는다. 위의 식(2.21)을 다시 식(2.15)에 대입하면 변위 포텐셜에 관한 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\phi(r,t) &= -\frac{1}{(4\pi c_c)^2\rho}\int\int\int \frac{1}{r} X_0'\left(t - \frac{r}{c_c}\right)\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1}\, dx_1' dx_2' dx_3' \\
F(r,t) &= 0 \\
G(r,t) &= \frac{1}{(4\pi c_c)^2\rho}\int\int\int \frac{1}{r} X_0'\left(t - \frac{r}{c_s}\right)\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1}\, dx_1' dx_2' dx_3' \\
H(r,t) &= -\frac{1}{(4\pi c_c)^2\rho}\int\int\int \frac{1}{r} X_0'\left(t - \frac{r}{c_s}\right)\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_1}\, dx_1' dx_2' dx_3'
\end{aligned} \tag{2.22}$$

이제, 위에서 구한 (2.22)에 식 (2.17),(2.18)의 가정을 적용하면 변위 포텐셜의 체적 적분은 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \phi_0}{\partial x_1},\; L = 0,\; M = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \phi_0}{\partial x_3},\; N = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \phi_0}{\partial x_2} \tag{2.23}$$

이 식을 변위 포텐셜식에 대입하면,

$$\begin{aligned} u &= \nabla \Phi + \nabla \times (F, G, H) \\ &= \nabla \Phi + \nabla \times \nabla \times (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{aligned} \tag{2.24}$$

여기서,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\rho}\phi_0,\ \psi_1 = -\frac{1}{4\pi\rho}\psi_0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0 \tag{2.25}$$

이와 같이 각각의 3 방향에 대해 변위의 포텐셜을 확장하면 그림 (2)와 같이 9개 방향에 대한 식을 구할 수 있으며 각각의 경우에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$(1.1)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1^2},\ \psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1},\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0 \tag{2.26}$$

$$(1.2)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1\partial x_2},\ \psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2},\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0 \tag{2.27}$$

$$(1.3)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1\partial x_3},\ \psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3},\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0 \tag{2.28}$$

$$(2,1)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1\partial x_2},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1},\ \psi_3 = 0 \tag{2.29}$$

$$(2.2)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_2^2},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2},\ \psi_3 = 0 \tag{2.30}$$

$$(2.3)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_2\partial x_3},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3},\ \psi_3 = 0 \tag{2.31}$$

$$(3.1)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1\partial x_3},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1} \tag{2.32}$$

$$(3.2)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_2\partial x_3},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2} \tag{2.33}$$

$$(3.3)\ \phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_3^2},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3} \tag{2.34}$$

위의 식에서 이중 조합에 의한 힘의 표현으로부터 구하고자 하는 Tensile-crack, Dip-slip, Strike-slip과 같은 방향성 음원 방정식을 유도한다

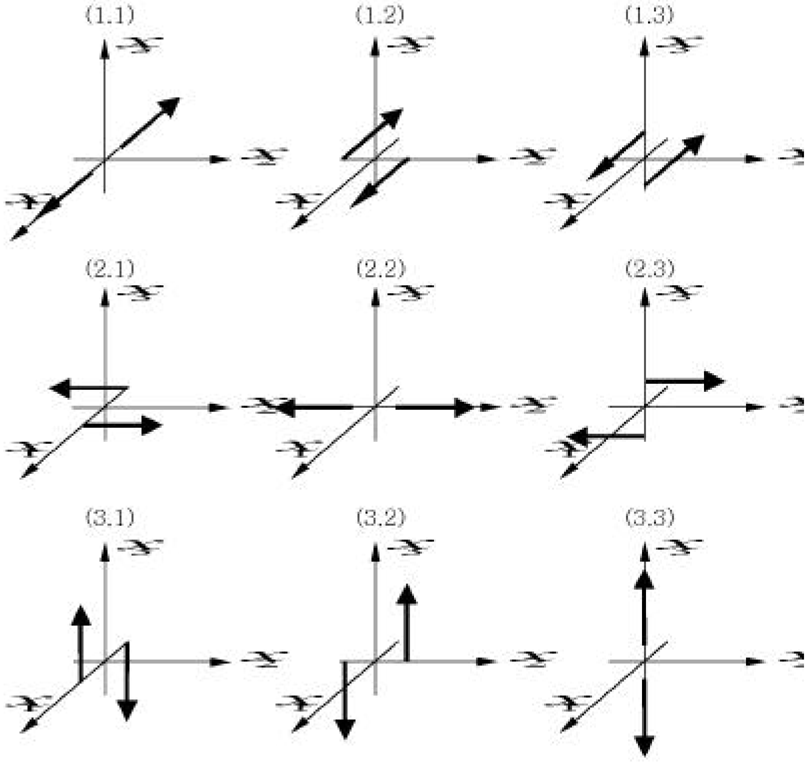


그림 2.3 9개의 단일 조합

2.3 이중 조합

그림 (2.5)처럼 Dip-angle이 0도인 strike-slip에서 유효 체적력으로 표현되는 이중 조합의 변위는 앞서 서술한 봐와 같이 두 개의 체적력을 조합함으로써 간단히 표현된다. 즉,

$$u = \nabla\phi + \nabla\times\nabla\times(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3) \qquad (2.35)$$

여기서 각각의 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1 \partial x_3},\ \psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_3},\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} \quad (2.36)$$

2.4 진동 음원에 대한 유효 체적력의 요약

2.4.1 Dip-slip.

그림 (2.4)과 같이 dip-angle이 0인 dip-slip의 변위 포텐셜은 그림(2.4)에서 단일 조합의 식 (2.3), (3.2)의 중첩형태로 표현된다.

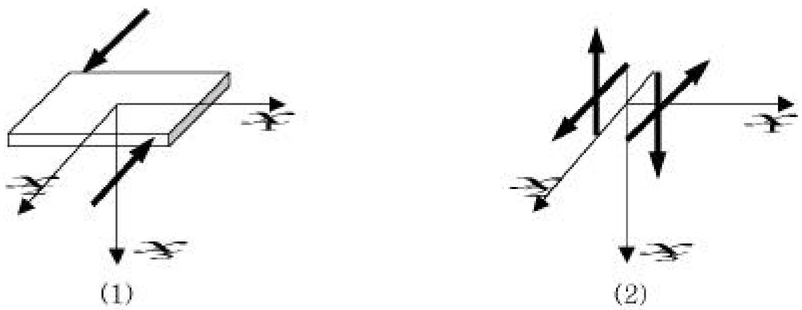
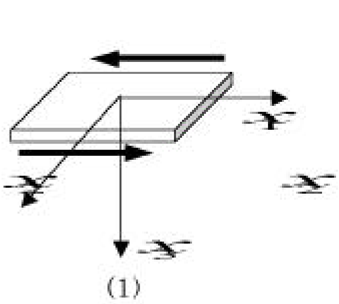


그림 2.4 Dip angle 0인 경우 Dip slip (1) 기본 운동 표면 (2) 유효 체적력

$$\phi = -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1 \partial x_3},\ \psi_1 = 0,\ \psi_2 = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_3},\ \psi_3 = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2} \quad (2.37)$$

여기서 직각 좌표계에서 전단에 의한 진동음원의 표현은 Keilis-Borok's의 결과로부터 대상 표면에서 각각의 방향에 대한 좌표의 정의가 그림(3.2)에 나타나 있다.[Aki,1,pp 117-118]



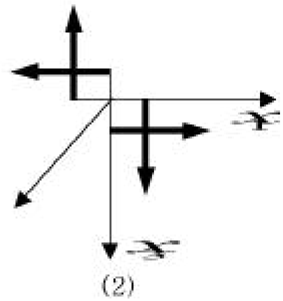
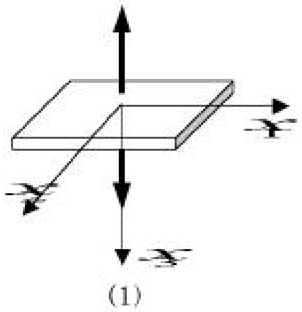


그림 2.5 Dip angle 0인 경우 Strike slip (1) 기본 운동 표면 (2) 유효 체적력



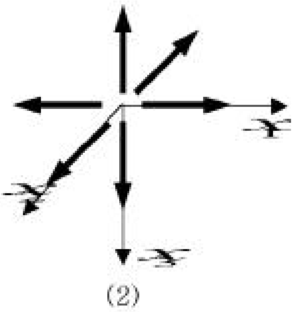


그림 2.6 Dip angle 0인 경우 Tensile crack (1) 기본 운동 표면 (2) 유효 체적력

2.4.2 Strike-slip.

dip-angle=0인 strike slip에 대해 유효 체적력을 표현하기 위한 이중 조합의 식은 두 개의 단일 조합식 (1,3), (3,1)의 간단한 조합으로 유도된다. 즉,

$$\phi = -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1 \partial x_3},\ \psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_3},\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} \qquad (2.38)$$

와 같다.

2.4.3 Tensile-crack.

tensile crack에 대한 유효 체적력은 그림(2.4)에서 각각 진동 모멘트의 크기가 다른 식 (1,1), (2,2), (3,3)의 중첩형태로 주어진다. 즉, dip angle이 0인 평면에서 z 방향의 운동 방향은 단일 조합(3,3)에서 $\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}M_0$의 크기를 가지며, 다른 두 개의 요소는 M_0를 가지는 tensile crack에 대한 변위 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_1^2}\Big|_{M=M_0} - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_2^2}\Big|_{M=M_0} - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_3^2}\Big|_{M=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}M_0},$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\Big|_{M=M_0},$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2}\Big|_{M=M_0}, \qquad (2.39)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3}\Big|_{M=\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}M_0}$$

3. 수평 분리 매질에서 영역 표현

3.1 실린더 좌표계에서 파동방정식에 대한 일반해

그림 3에서와 같이 실린더 좌표계에서 수평방향으로 형성된 균일한 매질이며, 모든 경계면은 평면으로 평행한 환경에 대해 음원이 z축 상에 있고 원통형 좌표계 $\{r, \theta, z\}$에 대하여 매질 n의 변위를 $\mathrm{u_n} = \{u_n, v_n, w_n\}$ 라고 하면, 선형 파동 방정식은 다음과 같다.

$$\mathrm{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times (0, 0, \Lambda) + \nabla \times (0, 0, \psi) \tag{3.1}$$

여기서 λ_n, μ_n은 Lame constants 그리고 ρ_n은 밀도이며, 각각의 변위를 3개의 스칼라 포텐셜로 표현하면 다음과 같다.

$$u_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Lambda_n}{\partial r \partial z} \tag{3.2}$$

$$v_n = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi_n}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_n}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Lambda_n}{\partial \theta \partial z} \tag{3.3}$$

$$w_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Lambda_n \tag{3.4}$$

위의 식에서 스칼라 포텐셜은 다음과 같이, 식(3.1)에서 음원항이 존재하지 않는 균일 파동방정식이 된다.

$$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0 \tag{3.5}$$

$$(\nabla^2 + k^2)(\Lambda, \psi) = 0 \tag{3.6}$$

여기서 각각의 변위에 대한 포텐셜을 다음과 같이 가정하므로써 변수 분리를 통한

상미분 방정식으로 전환이 가능해 진다. 즉, 공간 변수 (r, θ, z)에 관한 함수인 ϕ, λ, ψ는 각각 Fourier 차수 m에 대하여 $\phi^m, \lambda^m, \psi^m$ 를 포함하게 된다.

$$\phi(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi^m(r,z) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda^m(r,z) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\psi(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi^m(r,z) \begin{bmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{bmatrix}$$

위의 식 (3.4)를 식 (3.1)에 대입하면 변위 포텐셜을 이용한 변위에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$w(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} w^m(r,z) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix}$$

$$u(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} u^m(r,z) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$v(r,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} v^m(r,z) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix}$$

또한 위의 식으로부터 푸리에 차수에 대한 변위 포텐셜을 Hankel Transform을 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi^m(r,z) = \int_0^{\infty} [a_1^m(s)e^{-z\alpha(s)} + a_2^m(s)e^{z\alpha(s)}] sJ_m(rs)\,ds$$

$$\Lambda^m(r,z) = \int_0^{\infty} [b_1^m(s)e^{-z\beta(s)} + b_2^m(s)e^{z\beta(s)}] J_m(rs)\,ds \quad (3.9)$$

$$\psi^m(r,z) = \int_0^{\infty} [c_1^m(s)e^{-z\beta(s)} + c_2^m(s)e^{z\beta(s)}] sJ_m(rs)\,ds$$

위의 식을 다시 식(3.1)에 대입하면, 식(3.8)에서 각 푸리에 차수에 대한 변위와 응력은 다음과 같다.

$$w^m(r,z) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} -a_1^m(s)\alpha(s)e^{-z\alpha(s)} + a_2^m(s)\alpha(s)e^{z\alpha(s)} \\ b_1^m(s)se^{-z\beta(s)} + b_2^m(s)se^{z\beta(s)} \end{bmatrix} sJ_m(rs)\,ds \qquad (3.10)$$

$$u^m(r,z) \pm v^m(r,z) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \mp a_1^m(s)se^{-z\alpha(s)} \mp a_2^m(s)se^{z\alpha(s)} \\ \pm b_1^m(s)\beta(s)e^{-z\beta(s)} \mp b_2^m(s)\beta(s)e^{z\beta(s)} \\ +c_1^m(s)se^{-z\beta(s)} + c_2^m(s)se^{z\beta(s)} \end{bmatrix} sJ_{m\pm1}(rs)\,ds$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^m(r,z) &= \lambda\nabla^2\phi^m(r,z) + 2\mu\frac{\partial}{\partial z}w^m(r,z) \\ &= \mu\int_0^\infty \begin{bmatrix} a_1^m(s)(2s^2-k^2)e^{-z\alpha(s)} + a_2^m(s)(2s^2-k^2)e^{z\alpha(s)} \\ -b_1^m(s)2s\beta(s)e^{-z\beta(s)} + b_2^m(s)2s\beta(s)e^{-z\beta(s)} \end{bmatrix} sJ_m(rs)\,ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^m(r,z) \pm \sigma_{\theta z}^m(r,z) &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}[u^m(r,z) \pm v^m(r,z)] + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mp \frac{m}{r}\right)w^m(r,z)\right] \\ &= \mu\int_0^\infty \begin{bmatrix} \pm a_1^m(s)2s\alpha(s)e^{-z\alpha(s)} \mp a_2^m(s)2s\alpha(s)e^{z\alpha(s)} \\ \pm b_1^m(s)(2s^2-k^2)e^{-z\beta(s)} \mp b_2^m(s)(2s^2-k^2)e^{z\beta(s)} \\ -c_1^m(s)s\beta(s)e^{-z\beta(s)} + c_2^m(s)s\beta(s)e^{z\beta(s)} \end{bmatrix} sJ_{m\pm1}(rs)\,ds \end{aligned}$$

위의 결과로부터, 경계 조건에 적용하기 위한 3방향의 변위와 응력을 구함으로써 6개의 경계 조건에 대한 일반해를 모두 얻게 된다. 위의 각각의 식에는 6개의 경계 조건에 대한 6개의 미지수, 즉

$$a_1^m(s),\ a_2^m(s),\ b_1^m(s),\ b_2^m(s),\ c_1^m(s),\ c_2^m(s) \qquad (3.11)$$

가 존재하며 각 bessel 함수의 차수가 같으므로 적분 기호 안의 식에 대한 계수를 수평 파수에 대한 연립 방정식으로 세울 수 있다.

3.2 실린더 좌표계에서 진동 음원항에 의한 특별해

다양한 음원에 대한 변위 포텐셜은 경계 조건에 의한 전역 행렬의 선형 시스템에 적용하기 위해 일반해의 형태로 각각의 음원 형태로부터 유도해야 한다.

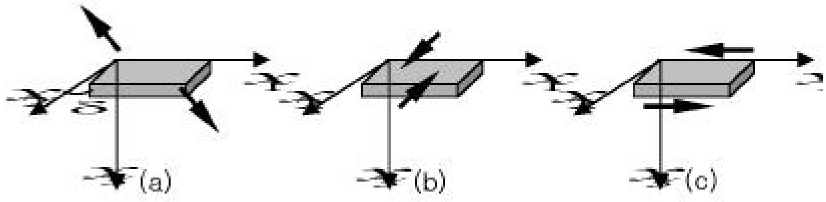


그림 3.1 dip angle δ에 대한 기본 운동,(a) Tensile-crack, (b) dip-slip, (c) strike-slip

3.2.1 Strike-slip

식(2.38)에서 변위 포텐셜에 의해 표현된 변위는 dip-angle δ를 가지는 strike-slip의 식을 나타낸다. 초기에 표현방정식에서 적용된 (x_1, x_2, x_3)의 좌표계를 그림(3.1)과 같이 전환하면, (x, y, z) 좌표계에 대해 dip-angle δ를 가지는 strike-slip은 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
\phi &= -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin\delta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\delta\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi_0 \\
\psi_x &= \frac{1}{4\pi\rho}\left(-\sin\delta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\delta\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_0 \\
\psi_y &= -\frac{1}{4\pi\rho}\sin\delta\frac{\partial\psi_0}{\partial x} \\
\psi_z &= \frac{1}{4\pi\rho}\cos\delta\frac{\partial\psi_0}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

또한 위의 식은 다시 실린더 좌표계로 전환해야 하므로 직각 좌표계와 실린더 좌표계에서 변위에 대한 다음의 관계식을 사용한다.

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta \\
u_y &= u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta \\
u_z &= u_z
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

또한 위의 식에서 편미분항은 체인룰에 의해 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (3.14)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

따라서 위의 식(3.13)과(3.14)를 적용하여 실린더 좌표계에 의한 식(3.12)의 표현은 다음과 같다.

$$u = \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times (\psi_r,\ \psi_\theta,\ \psi_z) \quad (3.15)$$

여기서

$$\phi = \frac{1}{4\pi\rho}\left[\sin\delta \sin 2\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial^2} r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z} \right) - 2\cos\delta \cos\theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \right] \phi_0$$
$$\psi_x = \frac{1}{4\pi\rho}\left[-\sin\delta \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\delta \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi_0$$
$$\psi_y = -\frac{1}{4\pi\rho}\left[\sin\delta \cos 2\theta + 2\cos\delta \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi_0 \quad (3.16)$$
$$\psi_z = \frac{1}{4\pi\rho} \cos\delta \cos\theta \frac{\partial \psi_0}{\partial x}$$

포텐셜 ϕ_0와 ψ_0는 다음과 같이 Sommerfeld-Weyl integral[16]을 사용하여 정의한다.

$$\phi_0 = -\frac{M_0}{\omega^2}\frac{1}{R} e^{i\omega(t - R/c_c)} = -\frac{M_0}{\omega^2}\frac{1}{R} e^{i\omega t} \int_0^\infty J_0(sr)\, e^{\alpha|z - z_s|} \frac{s}{\alpha}\, ds \quad (3.17)$$
$$\psi_0 = -\frac{M_0}{\omega^2}\frac{1}{R} e^{i\omega t} \int_0^\infty J_0(sr)\, e^{\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta}\, ds$$

여기서 $\frac{e^{-ihR}}{R} = \int_0^\infty J_0(sr)\, e^{-\alpha|z|} \frac{s}{\alpha}\, ds$ [34, pp 13]이며,

$\alpha = (h^2 - s^2)^{1/2}$ for $s^2 > \mathrm{Re}(h^2), j(h^2 - s^2)^{1/2}$ for $s^2 < \mathrm{Re}(h^2)$의 관계를 가진다. 이 식에서 h는 매질의 파수이며, R은 $\sqrt{r^2 + z^2}$ 을 나타낸다. 마지막으로 식(3.17)을 식(3.16)에 대입하면 일반해와 같은 형식으로 임의의 dip-angle δ에 대한 다음의 strike-slip의 포텐셜을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta s^2 J_2(sr) \\ -\ 2\cos\delta\cos\theta\zeta s\alpha J_1(sr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z - z_s|} \frac{k}{\alpha} ds \\
\psi_r &= -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{i\omega t} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta s J_1(sr) \\ -\ \cos\delta\cos\theta\zeta\beta J_0(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta} ds \\
\psi_\theta &= -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta s J_1(sr) \\ +\ \cos\delta\cos\theta\zeta\beta J_0(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta} ds \\
\psi_z &= \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \cos\delta\cos\theta s J_1(sr)\, e^{\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta} ds
\end{aligned} \qquad (3.18)$$

위의 식에서 포텐셜 ϕ, Λ, ψ로 주어진 일반해와 달리, 음원항에 의한 특별해는 포텐셜 $\phi, \psi_r, \psi_\theta, \psi_z$에 의해 표현되지만, 이 경우 특별해를 구하기 위해 직각좌표계로 전환하면 자연적으로 조합 포텐셜의 형태를 유도할 수 있으며, 전체 행렬에 의한 해를 구하기 위해 포텐셜 ϕ, Λ, ψ의 형태로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta s^2 J_2(sr) \\ -\ 2\cos\delta\cos\theta\zeta s\alpha J_1(sr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z - z_s|} \frac{s}{\alpha} ds \\
\Lambda &= \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\theta k \dfrac{2s^2 - k^2}{k} J_1(kr) \\ -\ \sin\delta\cos 2\theta\zeta\beta J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta} ds \\
\psi &= \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \cos\delta\sin\theta\zeta\beta \dfrac{k^2}{s} J_1(sr) \\ +\ \sin\delta\cos 2\theta s^2 J_2(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z - z_s|} \frac{s}{\beta} ds
\end{aligned} \qquad (3.19)$$

따라서 매질의 경계면에서 각각의 경계 조건으로부터 식(3.18)과 식(3.19)에 의해 변위와 응력[부록 참조]을 계산할 수 있다.

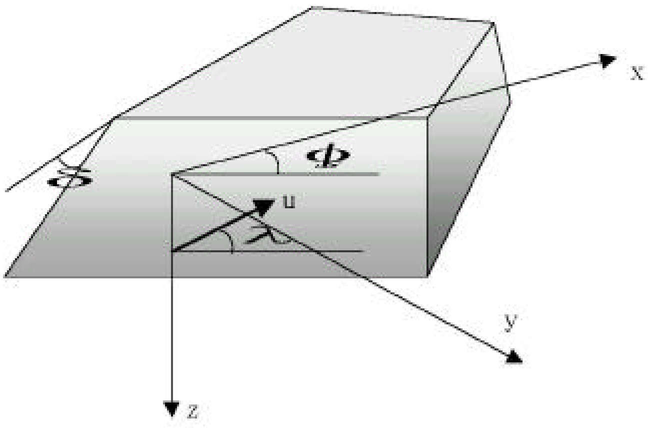


그림 3.2 방위 요소에 대한 정의

3.2.2 Dip-slip

앞서 서술한 것과 같이 유사한 방법으로 Dip-slip에 대해 적용하면 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta(2\alpha^2 + s^2)J_0(sr) \\ -2\cos 2\delta\zeta s\alpha\sin\theta J_1(sr) \\ -0.5\sin 2\delta s^2\cos 2\theta J_2(sr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|}\frac{s}{\alpha}ds$$

$$\psi_r = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin 2\delta\sin\theta s J_1(sr) \\ -\cos 2\delta\zeta\beta J_o(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{s}{\beta}ds \qquad (3.20)$$

$$\psi_\theta = -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin 2\delta\sin\theta s J_1(sr) \\ -\cos 2\delta\zeta\beta J_o(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{s}{\beta}ds$$

$$\psi_z = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin 2\delta s\sin\theta J_1(sr) \\ \sin 2\delta\zeta s J_1(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{s}{\beta}ds$$

또한 위의 결과로부터 포텐셜 ϕ, Λ, ψ 식은 다음과 같다.

$$\phi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta(2\alpha^2 + s^2)J_0(sr) \\ -2\cos 2\delta\zeta k\alpha\sin\theta J_1(sr) \\ -0.5\sin 2\delta s^2\cos 2\theta J_2(sr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|}\frac{s}{\alpha}ds$$

$$\Lambda = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -1.5 \sin 2\delta\zeta\beta J_0(sr) \\ -\cos 2\delta \frac{2s^2 - k^2}{k} \sin\theta J_1(sr) \\ -0.5 \sin 2\delta\zeta\beta \cos 2\theta J_2(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{s}{\beta} ds \tag{3.21}$$

$$\psi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} +\cos 2\delta\zeta \frac{s^2\beta}{s} \cos\theta J_1(sr) \\ -0.5 \sin 2\delta s^2 \sin 2\theta J_2(sr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{s}{\beta} ds$$

그림 3.2에 의하면, Strike-slip은 방향각(λ)이 0도인 경우에 대한 운동을 의미하며, Dip-angle은 90도인 경우에 해당한다. 따라서 방향각(λ)에 대한 기본 운동은 $\cos\lambda$와 $\sin\lambda$의 곱으로 strike-slip과 dip-slip의 포테셜에 대한 중첩 형태를 나타낸다. 또한 Strike angle은 방위각 θ를 $\theta - \phi_s$로 대신하는 실린더 좌표계로부터 얻어지며, 일반적인 전단 형태의 표현도 이와 같은 단일 좌표 전환에 의해 공식화된다. 이것은 Tensile-crack에 대해서도 동일하게 적용된다.

3.2.3 Tensile-crack

그림 3.1의 tensile-crack은 세 방향에 대한 단일 조합의 중첩형태를 나타내며, 그림 (3.3)의 (a)에서와 같이 단일 조합에 의한 포텐셜은 좌표 전환에 의해 존재하는 두 개의 조합형태를 표현한다. 즉, 두 번째 요소의 포텐셜은 첫 번째 조합의 dip angle δ를 δ+90으로 대신하여 얻어지며, 세 번째 요소의 경우 dip-angle 90도에 대해 방위각 90도의 회전한 결과로부터 얻는다. 따라서 tensile-crack에 대한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi'_k(r, \theta, z : \delta_k, M_k) \\ \psi_r &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{r,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k) \\ \psi_\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{\theta,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k) \\ \psi_z &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{z,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k) \end{aligned} \tag{3.22}$$

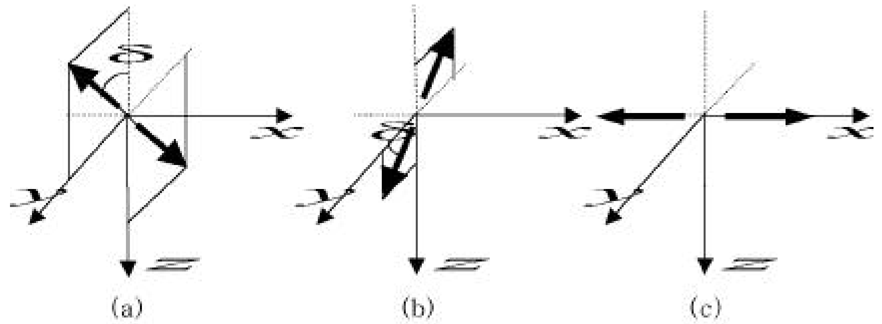


그림 3.3 dip-angle δ**와** strike-angle $\phi_s=0$ **인** Tensile-crack**을 표현하기 위한 단일 조합**. (a) $M_0=1$ **인 경우 식** (1.1), (b) $M_0=1$ **인 경우 식** (2.2), (c) $M_0 = -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}$ **인 경우 식**(3.3)

여기서 첫 번째 단일 조합에 의한 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi'_k = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^\infty \begin{bmatrix} [-0.25(k^2-2\alpha^2)+0.25\cos 2\delta_k(k^2+2\alpha^2)]J_0(kr) \\ -\sin 2\delta_k \sin\theta\,\zeta\alpha k J_1(kr) \\ -0.25(1-\cos 2\delta_k)\cos 2\theta k^2 J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|}\frac{k}{\alpha}dk$$

$$\psi'_{r,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta_k \sin\theta\,\zeta\beta J_0(kr) \\ [0.25(1-\cos 2\delta_k)-0.25(1-\cos 2\delta_k)\cos 2\theta k]J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk$$

$$\psi'_{\theta,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta_k \cos\theta\,\zeta\beta J_0(kr) \\ 0.25(1-\cos 2\delta_k)\cos 2\theta k J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk \qquad (3.23)$$

$$\psi'_{z,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5(1+\cos 2\delta_k)\zeta\beta J_0(kr) \\ -0.5\sin 2\delta_k \sin\theta k J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk$$

3.4 경계 조건.

각각의 미지수를 계산하기 위한 경계 조건은 경계면에 인접한 두 매질의 특성에 따라 달라지게 되는데 다음과 같다.

· 양쪽이 모두 유체인 경우에는 수직방향의 변위 w **와 응력** σ_{zz}**가 같아야 한다**. **한**

쪽이 진공이면 응력 σ_{zz} = 0 이다.

· 한쪽이 고체이고 다른쪽이 진공이면 수직, 수평 방향의 응력 σ_{zz}, σ_{rz}는 모두 0이어야 한다. 고체와 유체가 접하고 있는 경우에는 w와 σ_{zz}는 같고 σ_{rz}는 0이다.

· 양쪽이 모두 고체인 경우에는 수직, 수평 방향의 변위 w, u 및 σ_{zz}, σ_{rz}이 모두 같아야 한다.

Type	Field Parameter			
	w	u±v	σ_{zz}	$\sigma_{rz}\pm\sigma_{\theta z}$
fluid/vacuum	-	-	0	-
fluid/fluid	=	-	=	-
fluid/solid	=	-	=	0
solid/vacuum	-	-	0	0
solid/solid	=	=	=	=

Symbols used : =. continuous ; 0, vanishing ; -, not involved

표1. 각 경계면에서 경계 조건

3.5 Attenuation

음파가 해저를 통과해서 전파하는 경우에는 에너지가 열로 변환되면서 상당한 에너지를 빼앗기게 된다. 따라서 전파 특성을 현실적으로 예측하기 위해서는 체적 감쇄(volume attenuation)를 고려해야 하며 다음과 같다. 균질한 매질에서 주파수 w인 평면파가 양의 x-방향으로 진행한다고 가정하면 평면파의 음장는 다음과 같다.

$$F(x,t) = A e^{i(\omega t - k_m x)} \tag{3.24}$$

여기서 k_m 은 각각 압축파와 전단파에 의해 계산되어 지는 매질의 파수이고, A는 진폭(Amplitude)을 나타낸다. 만약 k_m 이 실수라면, 이 파형은 거리 x에 대해 일정한

진폭을 가지게 된다. 그러나 점탄성 감쇄(viscoelastic attenuation)에 의해 k_m은 다음과 같이 복소수의 형태가 된다.

$$\tilde{k}_m = k_m(1 - i\delta), \quad \delta > 0 \tag{3.25}$$

위의 식(3.25)을 식(3.24)에 대입하면 평면파는 다음과 같다.

$$F(x, t) = A e^{i(\omega t - k_m x + i k_m \delta x)} = A e^{-k_m \delta x} e^{i(\omega t - k_m x)} \tag{3.26}$$

따라서 음장은 진폭에 따라 지수적 감소를 나타낸다. 이것은 주어진 환경에 대해 해석적 해를 구하기 위해 매질이 점탄성 특성을 갖는다고 가정하여 선형 유체 및 고체의 특성으로부터 체적 감쇄를 고려하는 것이다. 또한 매질의 경계면에서 산란현상으로 발생하게 되는 감쇄는 통계적 접근 방법을 도입하여, 경계면의 거칠기가 음파의 파장에 비해 작고 그 특성이 시간과 공간에 대해 정상운동을 하는 가정 하에 거칠기가 평균음장(mean wavefield)에 미치는 영향이 해에 포함될 수 있도록 경계 조건을 변형시키는 것이다. 이 방법은 섭동 접근법(perturbational approach)라고 하며, 유체 매질에서 고체 매질까지 확장되어 적용된다. 일반적으로 수중음향에 있어서 선형 주파수 의존적 감쇄 (in dB/Λ)는 다음과 같이 나타낸다.

$$\gamma = -20 \log \left| \frac{F(x+\Lambda, t)}{F(x, t)} \right| = -20 \log [e^{-\delta k_m \Lambda}] = 40\pi\delta \log e \tag{3.27}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{40\pi \log e} \tag{3.28}$$

여기서 Λ 는 파장이다.

4장 수치 계산 방법

4.1 Global Matrix Method

위에서 얻게 되는 방정식은 각 경계면에서 연립방정식으로 형성되는데 이것은 다시 결합되면 Global Matrix를 형성하게 된다. 즉 Fourier order m에 의한 변수의 제한 형태는 다음과 같다.

$$F^m(k,z) = \begin{bmatrix} w^m(k,z) \\ u^m(k,z) + v^m(k,z) \\ u^m(k,z) - v^m(k,z) \\ \sigma_{zz}^m(k,z) \\ \sigma_{rz}^m(k,z) + \sigma_{\theta z}^m(k,z) \\ \sigma_{rz}^m(k,z) - \sigma_{\theta z}^m(k,z) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

따라서 두 개의 layer(n)과 layer(n+1) 나뉘어진 경계면 n에 대해 경계 조건은 다음과 같다.

$$F_n^m(k,z_n) + \hat{F}_n^m(k,z_n) - F_{n+1}^m(k,0) - \hat{F}_{n+1}^m(k,0) = 0 \tag{4.2}$$

여기서 n은 the layer number 이며 z_n은 layer(n)의 두께이다. 또한 “∧” 은 음원항을 나타낸다. 따라서 위의 식은 각각의 경계면에서 선형 방정식의 형태를 나타낸다. 위의 식에서 첫 번째 항은 n번째 매질에서 일반해를 나타내고, 두 번째 항은 n 번째 매질에 존재하는 음원으로부터의 음장이며, 세 번째항은 n+1번째 매질의 일반해, 그리고 네 번째는 n+1번째 매질에 존재하는 음원으로부터의 음장을 나타낸다. 이러한 각각의 경계면에서 방정식의 형태를 합하면 수학적으로 해석적인 전역의 형태가 되며, 좀더 자세히 경계조건에 대해 쓰면 다음과 같다.

$$A_{n,l} B_n^m - A_{n+1,u} B_{n+1}^m = R_{n+1,u}^m - R_{n,l}^m \tag{4.3}$$

여기서 각 경계면에서 상위 계수 행렬 A는 solid medium 인 경우 식 (4.4)과 같다. 또한 유체영역에서 계수행렬(variable matrix)은 식(4.5)와 같다. 주어진 Hankel 적분 변환 형태중 유체 영역에 대해 B_1^m, B_2^m, C_1^m, C_2^m 의 계수의 값은 zero이다.

$$A_{n,u} = \begin{bmatrix} -\alpha & k & 0 & \alpha & k & 0 \\ -k & \beta & k & -k & -\beta & k \\ k & -\beta & k & k & \beta & k \\ (2k^2-k_m^2)\mu & -2k\beta\mu & 0 & (2k^2-k_m^2)\mu & 2k\beta\mu & 0 \\ 2s\alpha\mu & -(2k^2-k_m^2)\mu & -k\beta\mu & -2k\alpha\mu & -(2k^2-k_m^2)\mu & k\beta\mu \\ -2s\alpha\mu & (2k^2-k_m^2)\mu & -k\beta\mu & 2k\alpha\mu & (2k^2-k_m^2)\mu & k\beta\mu \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

$$A_{n,u} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ -\rho w^2 & 0 & 0 & -\rho w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

그리고 경계면의 하위 행렬은 다음과 같이 적당한 지수 행렬과의 곱으로부터 얻어진다.

$$A_{n,l}(k) = A_{n,u}(k)\, I_n(k) \qquad (4.6)$$

여기서 $I_n(k) = \text{diag}\{e^{-\alpha z}, e^{-\beta z}, e^{-\beta z}, e^{\alpha z}, e^{\beta z}, e^{\beta z}\}$ 이며 또한 potential에 대한 미지의 변수행렬 $B_n^m(k)$ 은 다음과 같다.

$$B_n^m(k) = \{A_{1,n}^m, B_{1,n}^m, C_{1,n}^m, A_{2,n}^m, B_{2,n}^m, C_{2,n}^m\}^T \qquad (4.7)$$

따라서 위의 식에서 요소 행렬 A는 방위각의 푸리에 차수에 무관함을 알 수 있다. 이것은 일반해의 형태는 각 푸리에 차수 m에 무관하며, 단지 음원항이 달라 질 뿐이다.

위의 식에서 우변의 R 행렬은 음원항을 나타내는데, 이 항이 0일 아닐 때 파동방정

식은 비균질에 해당하며, 윗 첨자 m은 마찬가지로 방위각에 대한 푸리에 차수를 나타낸다. 이것은음원항에 따라 달라지며, 무지향성 폭발음원인 경우에는 m=0일 때만 값이 존재한다. 고차원의 음원 즉, force, 모멘트, 그리고 진동음원에 대해서는 m=1 5사이에 값이 존재한다. 각 경계면에 대한 위의 식, 즉 local matrix는 source term과 미지의 변수 그리고 각각의 계수에 대해 표현된 식이므로 각 경계면에 만족하는 조건에 의해 합쳐 놓으면 다음과 같은 global matrix가 된다.

4.2 완전해

앞장에서 구성된 Global Matrix의 해를 구하면, 이제 원하는 깊이에서의 음압 또는 변위등을 구할 수 있게 된다. 만약 알고자 하는 깊이를 z_r이라고 하면, 푸리에 차주 m에 대해 Hankel 변환의 적분함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_n^m(s, z_r) &= F_n^m(s, z_r) + \hat{F}_n^m(s, z_r) \\ &= A_n(s)\, B_n^m(s, z_r) + R_n^m(s, z_r) \end{aligned} \tag{4.8}$$

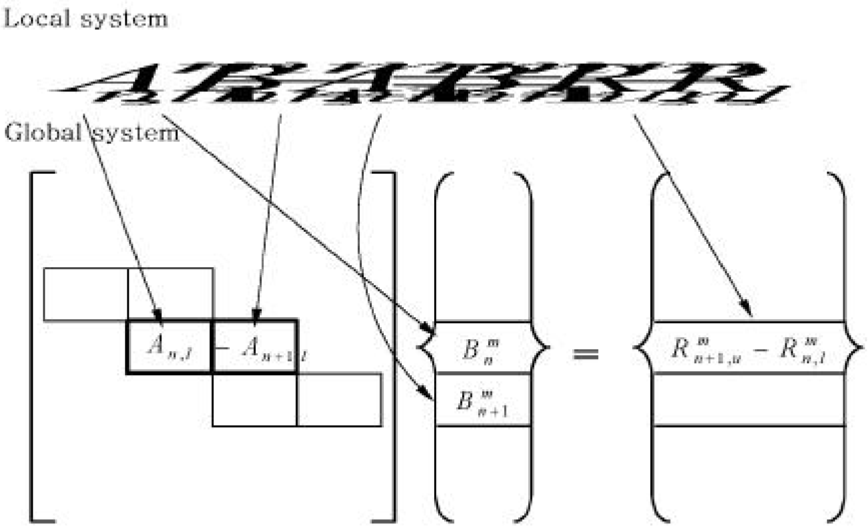


그림 4.1 국부 행렬과 전역 행렬의 전환과 Grobal Matrix Method

여기서 행렬 F는 6개의 경계 조건 즉, 3방향의 변위와 3방향의 응력(stress)을 나타내므로 H 행렬 또한 6개 변수의 값을 모두 나타낼 수 있다. 이 값은 다시 표현하면, 식 (4.8)의 두 번째 줄과 같이 요소 행렬인 A와 미지수의 행렬 B와의 곱, 그리고 음원에 의한 특이해 R 행렬의 값에 대한 합으로 표시하게 된다. 따라서 위의 결과에 대해 역 Hankel transform을 취하면,

$$\begin{aligned} H_n^m(r, z_r) &= \int_0^{\infty} H_n^m(s, z_r) s J_m(r, s)\, ds \\ &= \int_0^{\infty} \{A_n(s)\, B_n^m(s, z_r) + R_n^m(s, z_r)\} s J_m(r, s)\, ds \end{aligned} \tag{4.9}$$

위의 식에서 행렬 H는 이제 수평 파수 s 대신 거리 r 의 함수가 되며, 이 결과를 다시 푸리에 차수 m에 대해 합하면, 협대역 주파수(narrow band signal)에서의 값을 구하게 된다. 광대역 신호(wide band signal)에 대해서는 각 주파수에서의 값을 구하여 다시 주파수-시간 푸리에 변환을 취한다. 이러한 과정에 대해 좀 더 자세히 다음 장에서 다룬다.

4.3 파수적분법

파수 적분법은 2차원의 Helmholtz 편 미분방정식을 1차원 상 미분방정식으로 전환시키기 위한 것으로 파수 $k(r, z)$ 가 거리 종속 환경에서 1차원 공간 좌표인 수심에 대한 함수임을 의미한다. 즉 수심에 종속적인 Green 함수(Green's function)에서 수평방향 파수(horizontal wavenumber)를 결정하기 위해 수치적분법을 이용하는데 이는 변위와 압력을 적분으로 표현하기 위한 방법이다. 주어진 식에 대해 Hankel 변환 적분의 형태는 다음과 같다.

$$G(r, z) = \int_0^{\infty} g(k, z) J_m(kr) k \,\mathrm{d}k \tag{4.10}$$

여기서, 두 개의 Hankel 함수로 표현되는 Bessel 함수는

$$J_m(kr) = \frac{1}{2}\left(H_m^{(1)}(kr) + H_m^{(2)}(kr)\right) \tag{4.11}$$

이며, $H_m^{(1)}(kr)$의 항의 시간/주파수 변환을 선택하면 incoming wave와 상응하는데 이는 매우 근거리에서 정상음장(standing wave)을 표현할 때만 중요하므로 이 항은 무시되고 $H_m^{(2)}(kr)$이 점근 근사에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\lim_{kr\to\infty} H_m^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{-i\left(kr - \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right)} \tag{4.12}$$

역 Hankel 변환을 하면,

$$G(r, z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\, e^{i\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\infty} g(k, z)\sqrt{k}\, e^{-irk}\, \mathrm{d}k \tag{4.13}$$

일반적인 것에 대한 요구로 구적법(quadrature schemes)의 사용을 제한하여, 절단된 파수의 범위는 아래와 같이 등간격으로 분리되었다.

$$k_l = k_{\min} + l\Delta k, \qquad l = 0, 1 . . . (M - 1) \tag{4.14}$$

여기서 M은 총 샘플링 포인트 수이다. 음장의 값은 종종 거리 r 의 많은 숫자가 요구되는데 특히 거리의 함수로 전달손실을 결정하는 보통의 수중음향문제와 연관이 있다. 이 경우 위의 식에서 Fourier 적분은 소위 'Fast Field' 접근방법으로 매우 효과적으로 계산되어지므로 이러한 방법을 FFP이라고 부르기도 한다. 즉, 거리 축 r은 아래와 같이 분리된다.

$$r_j = r_{\min} + j\Delta r, \quad j = 0, 1 ... (M-1) \tag{4.15}$$

여기서 거리의 간격 Δr은 아래 관계에 의해 정해진다.

$$\Delta r\,\Delta k = \frac{2\pi}{M} \tag{4.16}$$

여기서 M은 2의 거듭제곱(integral power of 2)이다. 따라서 위의 식은 이산 근사법으로 아래의 식이 얻어진다.

$$G(r_j, z) \approx \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi r_j}} e^{-i\left(k_{\min} r_j - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right)} \sum_{l=0}^{M-1} [\, g(k_l, z) e^{-i r_{\min} l \Delta k} \sqrt{k_l}\,] e^{-i\left(\frac{2\pi l j}{M}\right)} \tag{4.17}$$

따라서 위의 식으로부터 합은 FFT방법에 의해 계산될 수 있고 전체거리 M 에 대해 음장을 구할 수 있다. 그러나 시간/주파수 변환에 대한 FFT의 사용에서 잘 알려진 것으로 하나의 영역에서 표본화 오차는 다른 영역에서의 에일리어싱을 유발한다. 또한 이 경우 kernel은 pole과 적분 축에 근접한 branch point에 기인하여 종종 빠르게 변화한다. 그 이유[36]은 식(4.17)에서의 계산이 $G(r, z)$를 산출하는게 아니라 $\Sigma_{n=-\infty}^{\infty} G(r, nR, z)$를 산출하기 때문이다.($R = \frac{2\pi}{\Delta k}$) 즉, 폭 $R = M\Delta r$ 의 모든 거리에서의 신호의 합을 계산하기 때문에 에일리어싱은 실제 간격의 양쪽면으로부터 일어나고 또한 $r_{\min}$보다 더 작은 거리로부터 발생한다. 파가 오직 거리의 양의 방향쪽으로 움직이므로 에일리어싱은 음의 거리 축에서는 그다지 현저하지 않다. 하지만 간격 $[0, r_{\min}]$에서의 신호가 만약 $r_{\min} > 0$ 이라면 간격 $[R, r_{\min} + R]$으로 에일리어싱이 된다. 결론적으로 최대 사용 가능 거리는 $r_{\min}$의 선택과는 무관하게 항상 $R = M\Delta r$와 관계가 있다. 그림(4.2)에서 보면, 표준화 오차에 따른 에일리어싱이 수심에 대해 발생하는 것을 볼 수 있다. 즉, 실선은 접수 진동과 관련해서 일정한 두께(5m)를 가지는 접수 평판 내부에서 무지향성 음원(3m)이 발생하는 경우에 엄밀해를 나타내지만, 점선은

$k_{min} = 6.28 \times 10^{-5} m^{-1}$, $k_{max} = 1.5 \times 10 m^{-1}$**사이에서 샘플링수** $M = 2048$ **에 대해** $\triangle k_r = 0.071 m^{-1}$ **인 경우에 해당한다. 이 경우 전체** FFT **거리는** 0.89 km**이며 따라서 오차를 포함한 결과를 보이게 된다. 일반적으로 해양 환경에서 이러한 오차는 전달 손실 계산에서 거리가 증가함에 따라** 3dB**이상의 오차를 보이는데 접수 진동의 환경은 근거리에 대해 큰 오차를 포함하지 않는 것을 볼 수 있다. 감쇄가 있는 매질의 경우,** $r_{min} + R$ **보다 더 먼 거리로부터 생기는 에일리어싱은 전체 계산 거리** R**을 다소 크게 선택함으로써 감소시킬 수 있다. 그렇게 함으로써 오차에 대한 신호가 구하고자**

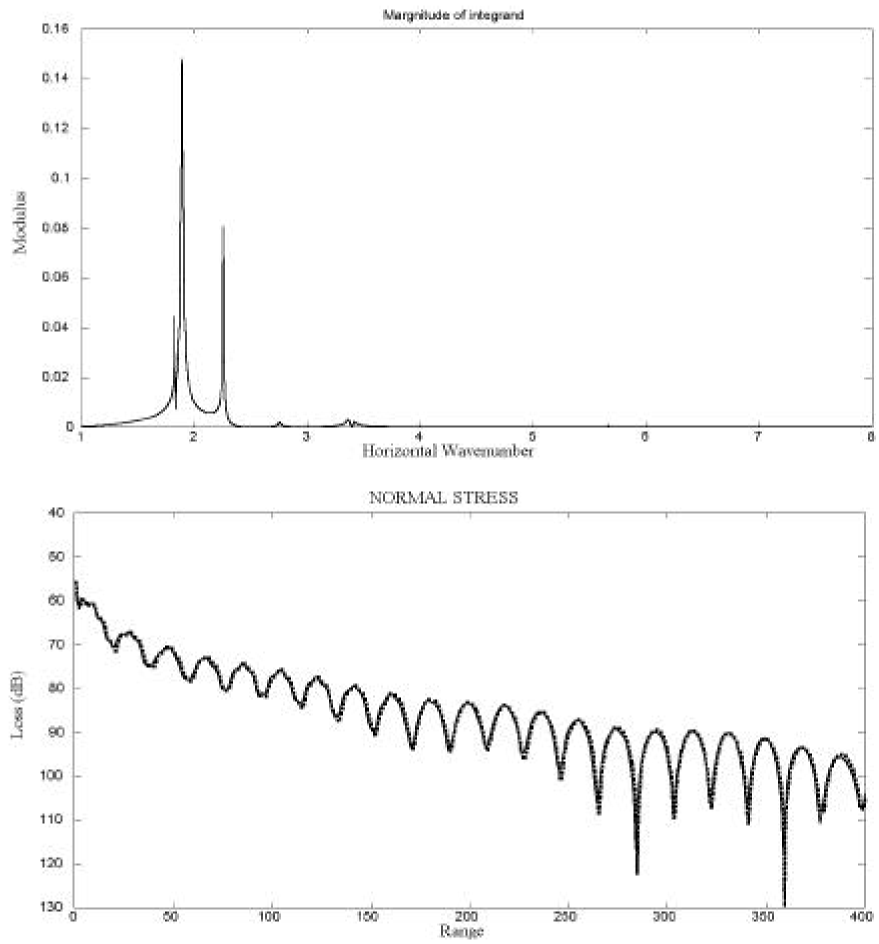


그림 4.2 (a) **수심 분리** Green **함수의 크기** (b) **전달 손실,**
실선 : 완전해, 점선 : $\triangle k_r = 0.071 m^{-1}$**에 대한 실수축의 적분**

하는 거리 안에서 소멸될 것이다. 그러나 식(4.17)에서 보면 원거리는 충분한 숫자의 파수 샘플링이 필요하고, 파수의 간격이 고정되어 있을 경우도 그렇다. 따라서 에일리어싱의 문제는 보다 근본적인 해결책을 필요로 한다. 그것은 그림(4.3)과 같이 적분 경로를 극한값으로부터 떨어지게 배치함으로써 즉, kernel을 간략화 시킴으로써 해결될 수 있다. Cauchy's 정리에 의해 복소평면의 두 지점의 사이에 있는 적분은 경로에 무관하므로, 식(4.17)은 아래와 같이 대체 된다.

$$G(r,z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\, e^{i\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi} \int_C g(k,z)\sqrt{k}\, e^{-irk}\, dk \qquad (4.18)$$

C 는 그림(4.18)에 보여진 경로이다. 적분 경로가 존재하는 세 개의 선형구역 C_1, C_2, C_3 에서는 길이 ε의 수직구역은 파수 축이 절단된 어떤 점에서 선택되어진다. 만약 어떤 지점에 대해 적분하고자 하는 커널이 작으면 즉 $g(k_{min}, z)\sqrt{k_{min}}$, $g(k_{max}, z)\sqrt{k_{max}} \approx 0$ 이고, $\varepsilon \ll k_{max} - k_{min}$이면, 수직 구역으로부터 얻어지는 것은 $\tilde{k} = k + i\varepsilon$ 으로 정의되는 수평구역에 따른 integral과 비교하여 별로 중요하지 않게 된다. 따라서 $\tilde{k}$를 식(4.18)에 대입하면,

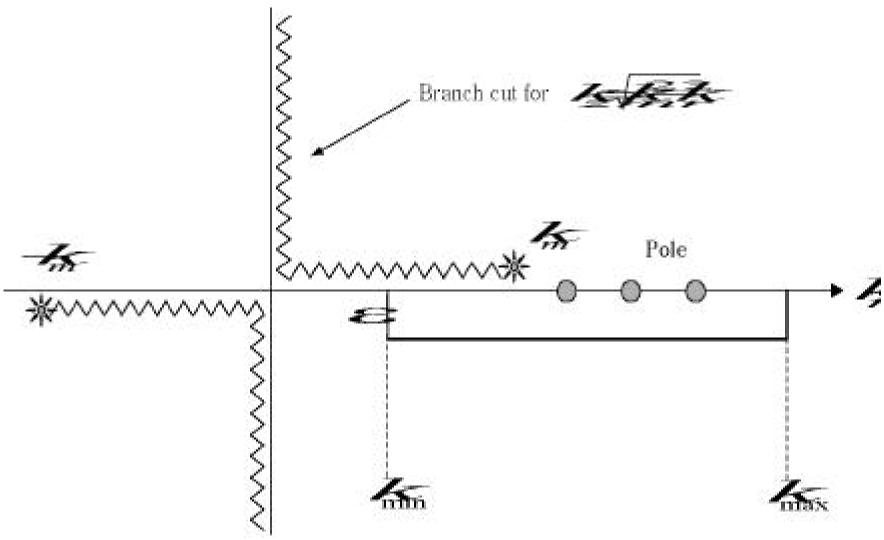


그림 4.3 파수 적분을 위한 복소 적분 경로

$$G(r,z)e^{-\varepsilon r} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\, e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi} \int_C g(k-i\varepsilon, z)\sqrt{k_r - i\varepsilon}\, e^{-irk_r} dk_r \qquad (4.19)$$

또한 위의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$G(r_j, z) \approx \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi r_j}} e^{\varepsilon r_j + i\left[k_{\min} r_j - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right]} \sum_{l=0}^{M-1}\left[g(k_l - i\varepsilon, z)e^{-ir_{\min} l\Delta k_r}\sqrt{k_l - i\varepsilon}\right]e^{-i\left(\frac{2\pi lj}{M}\right)} - \sum_{n\neq 0} G(r_j + nR, z)e^{-\varepsilon nR} \qquad (4.20)$$

위의 식으로부터 $r_{\min} + R$보다 더 먼 거리로부터 에일리어싱이 일어나는 모든 신호들은 $e^{-\varepsilon R}$에서 감소될 것이다. 다른 한편으로 $r_{\min}$보다 더 가까운 거리로부터 에일리어싱이 일어나는 신호들은 $e^{\varepsilon R}$에서 증폭된다. 최대 거리의 실수축 적분의 경우 $r_{\max} = R$이고 또한 경로 적분에 대한 것도 마찬가지이다. 그림 (4.4)은 윤곽적분을 사용한 경우 샘플링 개수에 의한 차이를 나타낸 것이다.(실선: M=2048, 점선: M=512)

ε의 실제 값은 극단적인 임계값은 아니다. 그러나, 만약 적분 구간에 대해 2개의 수칙부분으로부터 너무 큰 값이 선택된다면 중요하게 될 것이다. 다른 한편, 너무 작은 값일 경우 매우 큰 숫자의 샘플링을 요구하게 된다. 대부분의 실제적인 목적으로 60 dB정도의 에일리어싱 감쇄만으로 충분하므로, 다음의 식으로 표현된다.

$$e = \frac{3}{R\log e} = \frac{3}{2\pi(M-1)\log e}(k_{\max} - k_{\min}) \qquad (4.21)$$

이는 비교적 작은 숫자의 샘플링에서도 $\varepsilon \ll k_{\max} - k_{\min}$에 대해 만족하며, 수직 경로에 무관해 진다. 일반적인 Fast Field 적분기술은 단일 주파수의 전달손실 계산에 있어서는 매우 효율적이다. 이것의 사용은 광대역 펄스 계산에 있어서는 효과적이지 않다. 만약 펄스응답이 단일 거리에서보다 더 요구된다면 파수의 샘플링 간격 Δk는 식 (4.16)을 만족하기 위해서 주파수에 대해 무관해야 한다. 따라서 펄스 응답은 주로 작은 숫자의 거리에 요구되므로 각 독립적인 거리에 대해 직접 수치적분을 필요로 한다.

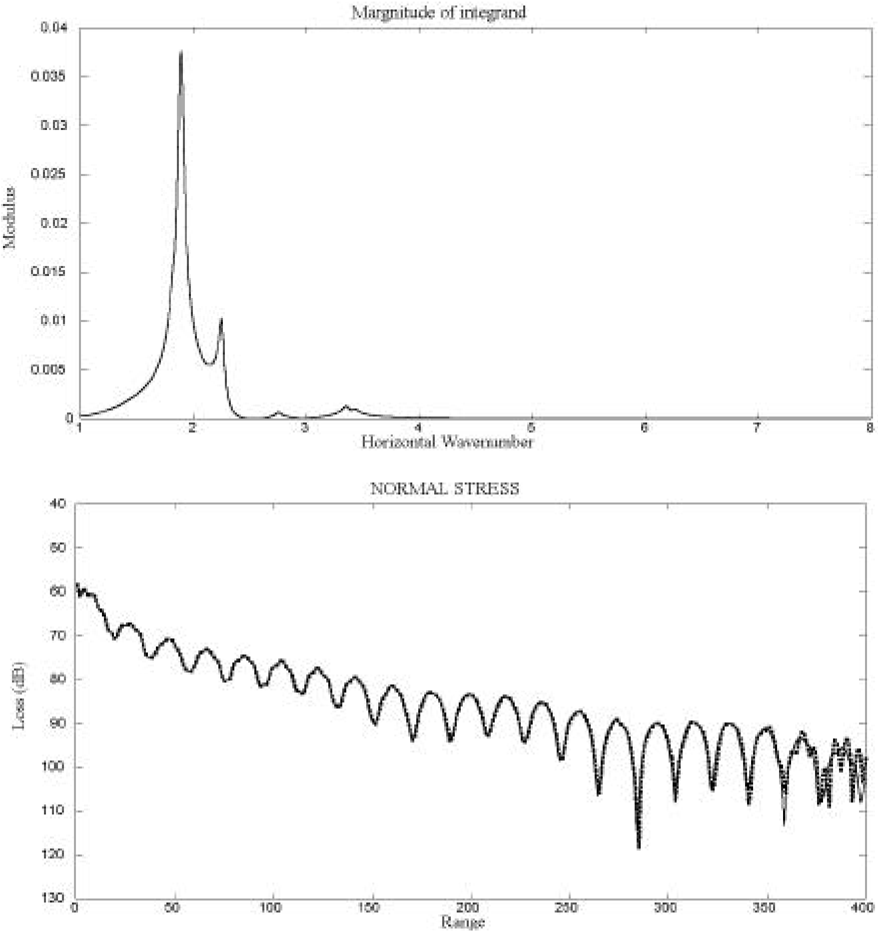


그림 4.4 (a) 적분인자의 크기 (b) 샘플링 개수의 차이에 의한 전달 손실

4.3 주파수 적분

주파수 적분을 계산하기 위한 첫 번째 단계는 적분 간격을 결정하는 것이다. 이것은 음원의 스펙트럼(S_w)에 의해 결정되며 전체 펄스응답을 결정하는 것과 연관해서 마지막 단계는 역 푸리에 변환을 계산하는 것이다. 전체 음장의 요소, 거리, 그리고 깊이에 대해 적분은 다음 식과 같다.

$$F(r, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, z, w)\, e^{iwt} dw \quad (4.22)$$

주파수 간격이 음원 스펙트럼에 의해 결정되며 위의 푸리에 적분은 FFT에 의해 다음 식과 같다.

$$F(r, z, t) \simeq \triangle w\, e^{iw_{\min} t_j} \sum_{l=0}^{N-1} [G(r, z, w) e^{it_{\min} l \triangle w}] e^{i(2\pi lj/N)} \quad (4.23)$$

여기서 주파수와 시간 축은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} t_j &= t_{\min} + j\triangle t, \quad l_j = 0, 1, \ldots (N-1), \\ w_j &= w_{\min} + l\triangle w, \quad l = 0, 1, \ldots (N-1), \end{aligned} \quad (4,24)$$

또한 샘플링은 다음의 관계를 만족해야 한다.

$$\triangle t \triangle w = 2\pi / N \quad (4.25)$$

따라서 각각의 음원 형식에 대한 수치 예제를 다음절에서 다룬다.

4.5. 수치 예제

수치 예제는 균일 무한 평면에서 3개의 다른 음원 환경에 대해 고려하였다.

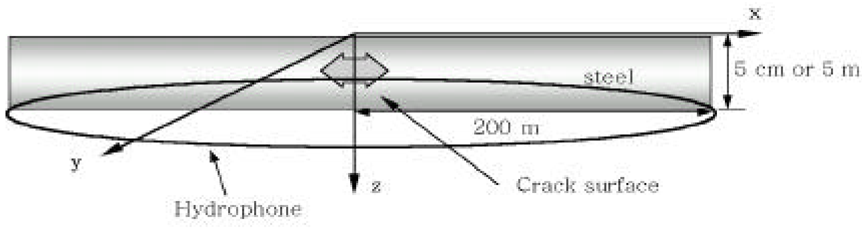


그림 4.5 환경 모델

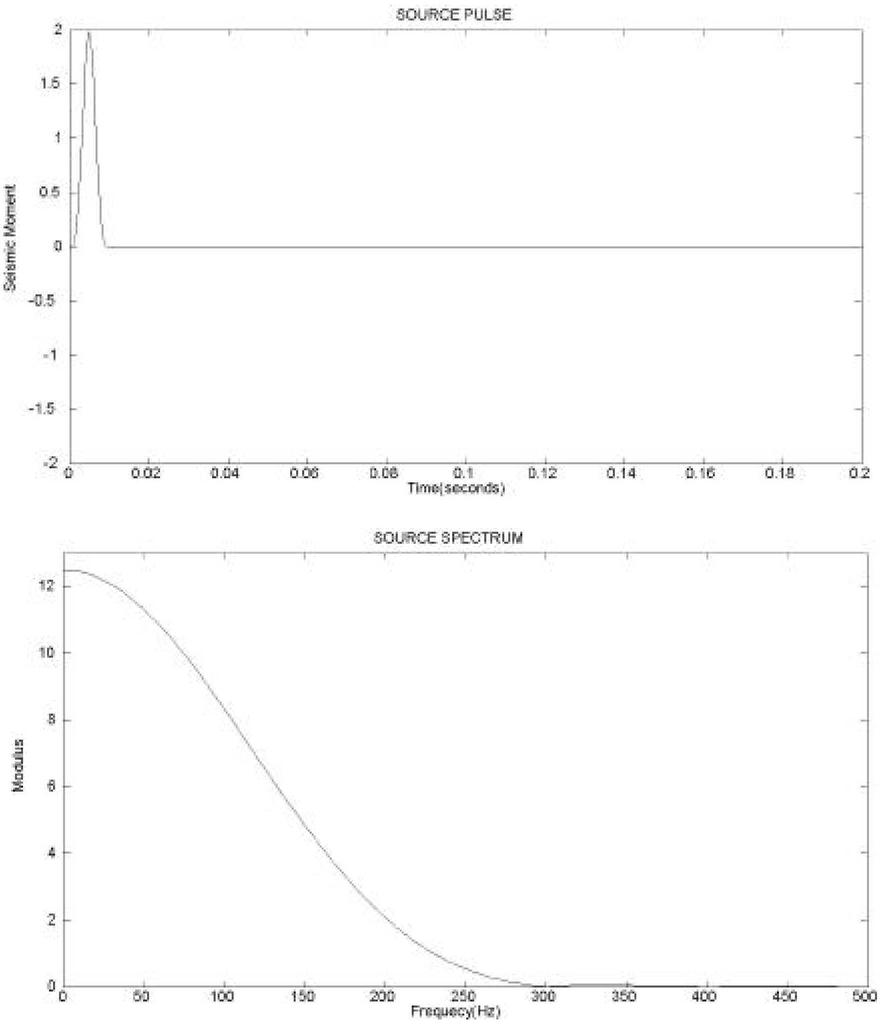


그림 4.6 **음원의 펄스 및 스펙트럼**

여기서 매질의 두께는 5 m**과** 5 cm **두 가지 경우에 대해 음원은 각각** 3 m**와** 3 cm, **수신기는** 5 m**와** 5 cm**에 있으며**, **방위 요소는 각각** dip-angle $\delta = 90°$, $\phi_s = 0$ **이다**. **음원 형태는 그림**(4.16)**과 같으며**, **주파수는** 0-300 Hz**까지 고려되었다**. 200 m **떨어진 지점에서 수신되는 신호를 측정한다**. **본 수치 예제는** 3**가지 음원에 대해 매질의 두께에 따른 음원 방사 형태를 각각 시간해와 음원 방사 패턴에 대해 나타내었다**. **우선 각각** tensile crack**과** dip-slip, **그리고** strike-slip**의 경우 주어진 음원 함수에 대한 시간해를 매질의 두께가** 5m**일 때와** 5cm **일 때로 나누어 그림**(4.10)-(4.15)**까지 나타내었으며**, **두**

께 5cm의 접수 평판에 음원이 방사되는 경우, 방사 패턴을 그림 (4.7), (4.8), (4.9)에 3차원으로 나타내었다. 주어진 환경에 대해 존재하는 파의 도달 시간은 다음과 같다. 우선 접수 평판을 따라 진행하는 파와 유체 영역에서 전파되는 파로 나누면,

$$t_{c_1} = \frac{\sqrt{r^2 + z_r^2}}{c_c} = 0.133, \quad t_{c_2} = \frac{\sqrt{r^2 + z_r^2}}{c_c} = 0.033, \quad t_{s_1} = \frac{\sqrt{r^2 + z_r^2}}{c_s} = 0.064 \qquad (4.26)$$

따라서 시간해의 결과로부터 매질의 두께가 충분한 경우 처음 수신된 신호는 접수평판의 매질을 따라 전파되는 압축파이고 두 번째 신호는 전단에 의한 신호를 나타낸다. 또한 각각의 음원 형태에서 마지막에 나타나는 신호는 유체 영역으로부터 수신기에 전달된 압축파인데, 매질의 두께가 5cm로 작아지면 대부분의 파가 소실되고, 대신 유체 영역으로부터 수신되는 신호부분에서 신호가 상대적으로 커지는 것을 볼 수 있다. 음원의 방사 형태는 각각 음원 형태에 따라 dip-slip의 경우 0, 180도에서 음원의 에너지가 소실되고, strike-slip의 경우 90도 간격으로 음원에너지가 존재하지 않으며 tensile-crack의 경우 모든 영역에서 음장이 형성되지만 각도에 따라 약간의 차이가 있다.

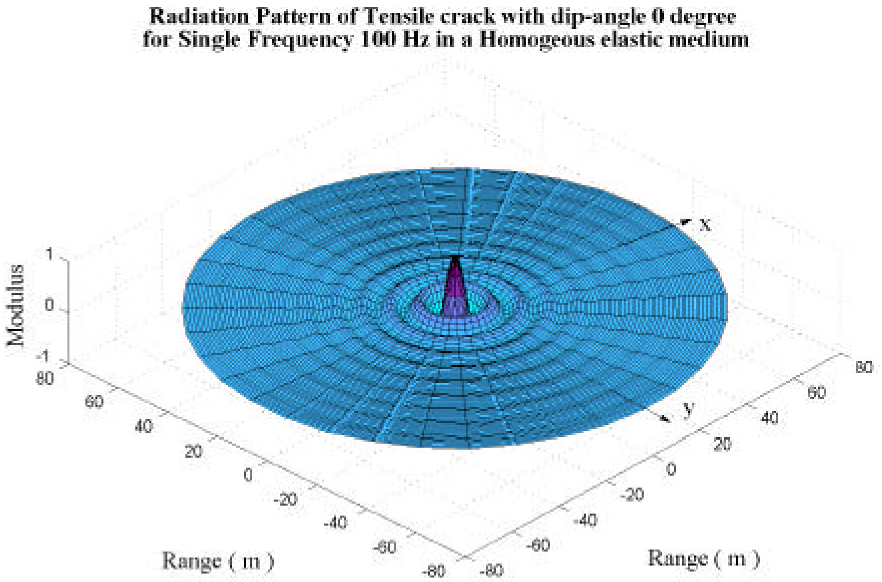


그림 4.7 균일한 매질에서 Dip angle 90도에 대한 Tensile-crack의 방사 형태

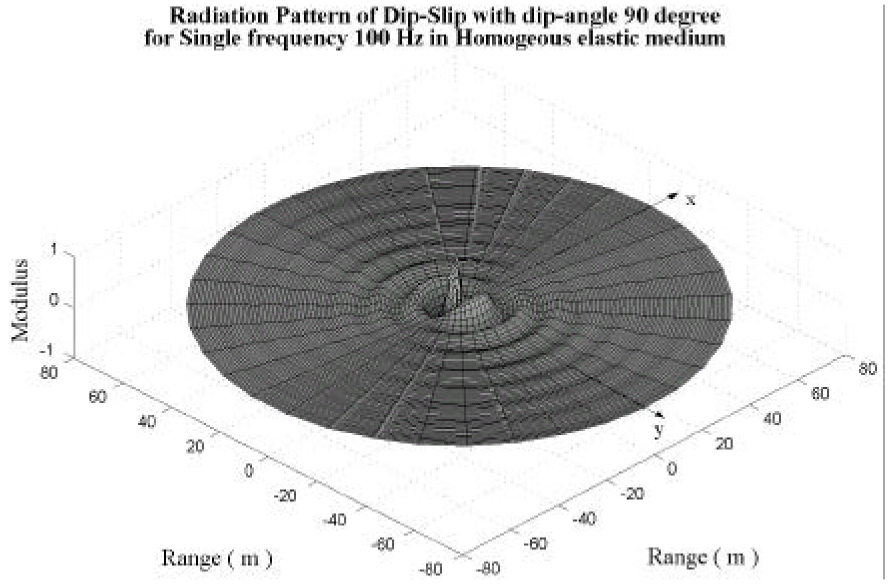


그림 4.8 균일한 매질에서 Dip angle 90도에 대한 Dip slip의 방사 형태

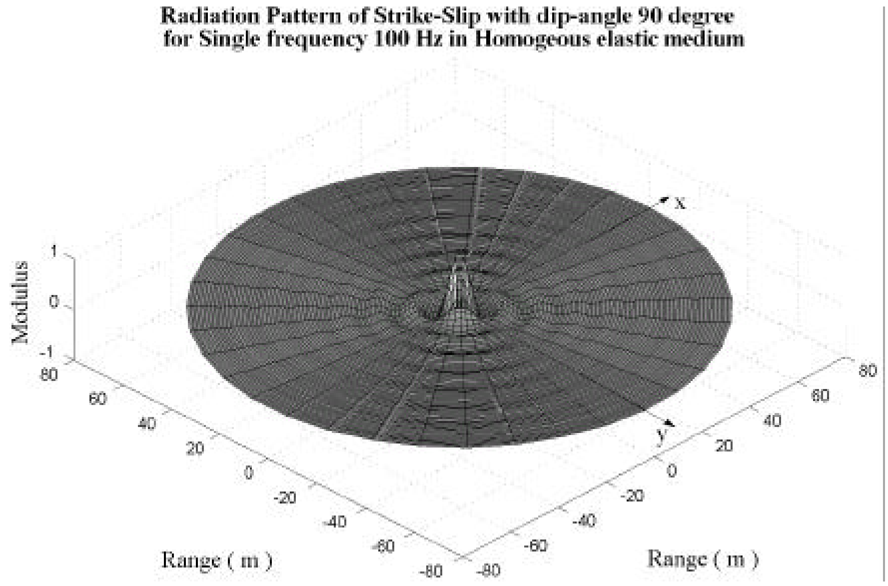


그림 4.10 균일한 매질에서 Dip angle 90도에 대한 Strike slip의 방사 형태

case Ⅰ. Tensile crack.

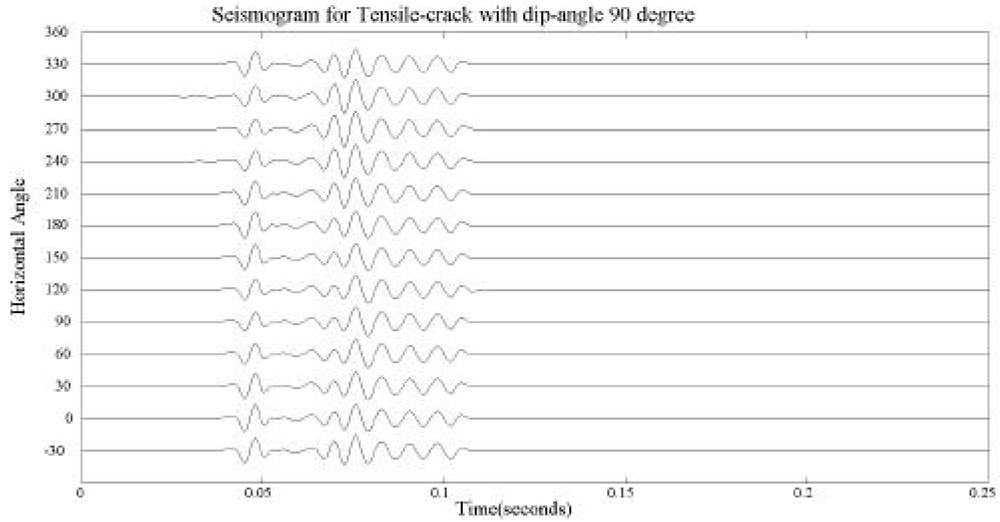


그림 4.11 **균일 매질에서** Dip angle 90**도에 대한** Tensile crack**의 시간 응답**

(r = 200 m, d = 5 m)

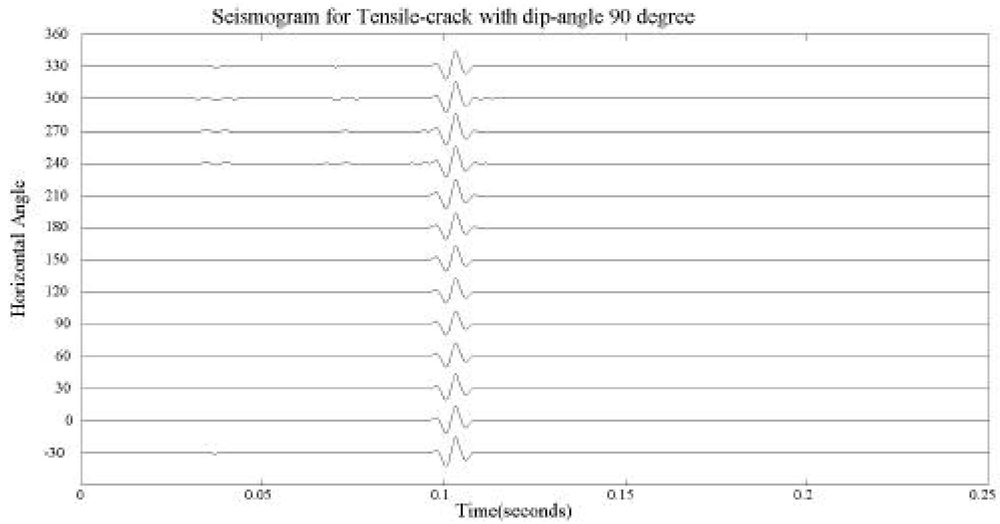


그림 4.12 **균일 매질에서** Dip angle 90**도에 대한** Tensile crack**의 시간 응답**

(r = 200 m, d = 5 cm)

case Ⅱ. dip slip

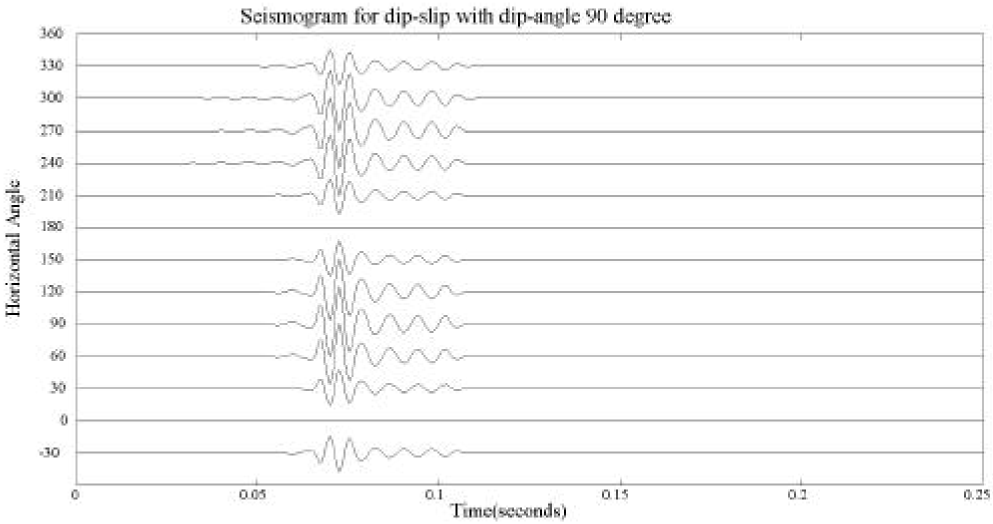


그림 4.13 **균일 매질에서** Dip angle90**도에 대한** Dip slip**의 시간 응답**
(r = 200 m, d = 5 m)

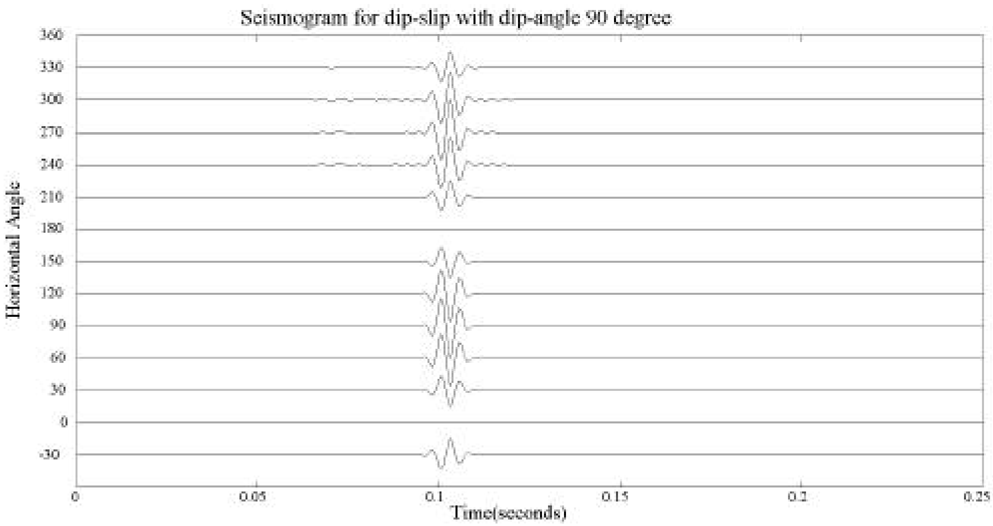


그림 4.14 **균일 매질에서** Dip angle90**도에 대한** Dip slip**의 시간 응답**
(r = 200 m, d = 5 cm)

case Ⅲ. strike slip.

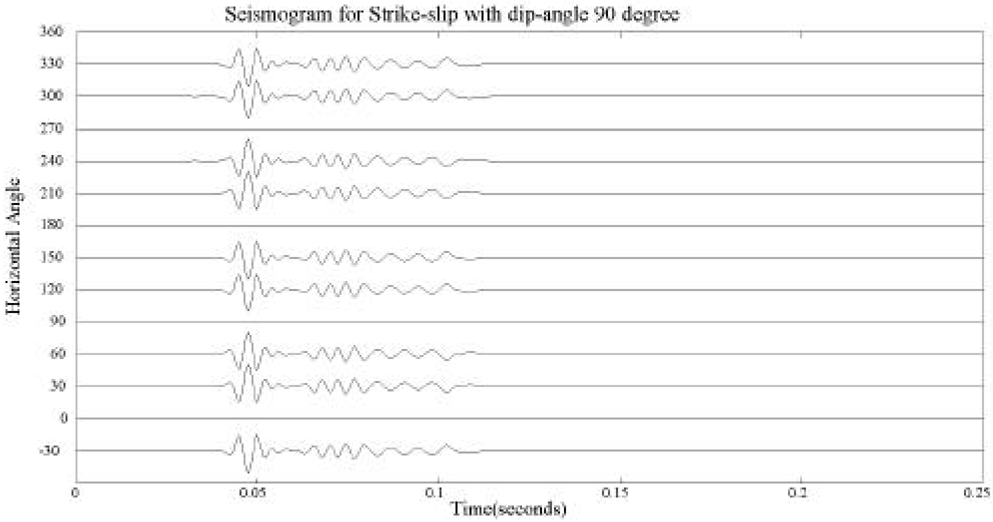


그림 4.15 균일 매질에서 Dip angle90도에 대한 strike slip의 시간 응답
(r = 200 m, d = 5 m)

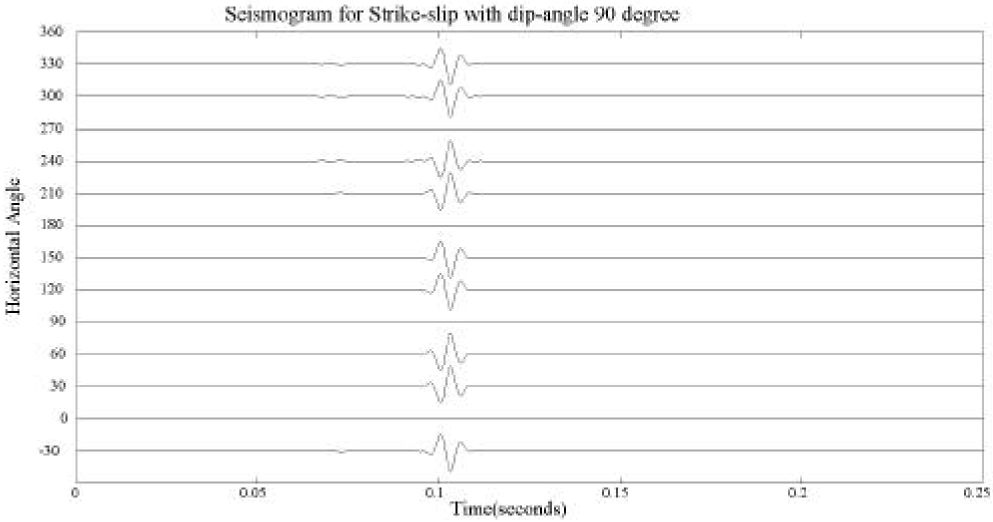


그림 4.16 균일 매질에서 Dip angle 90도에 대한 Strike slip의 시간 응답
(r = 200 m, d = 5 cm)

5. 결론

본 논문은 수평으로 층상화된 매질에서 방향성 음원에 의한 에너지 방사에 대해 음원의 해석적 해를 구하고 효과적인 알고리즘을 개발하기 위한 것이다. 즉, Kellis-Borok(1950)에 의해 소개된 후, Sato[29]에 의해 증명된 음원의 표현식에 대해 2장에서 다루었으며, 3장에서 진동음원의 표현을 전단 형태를 포함하는 tensile-crack의 형태와 dip-slip, strike-slip의 형태로 유도하였으며, 전역 행렬식에 적용하기 위해 실린더 좌표계에 의한 식으로 전환하였다. 마지막으로 음원의 형태는 전역 행렬식에서 다중의 방위각에 대한 푸리에 차수의 합으로 환경 모델과 병합였으며, 4장에서 이러한 중첩 모델을 수치적 해를 구하기 위한 균열의 전파 모델로 취급함으로써 수치적 수렴 문제를 해결하였다. 또한 이러한 이론적 배경을 바탕으로 접수 평판의 환경에 대해 각각의 음원 에너지 방사 패턴에 대한 수치 예제를 구하였다.

일반적으로 FFP 에서 유한적분을 수행하기 위해 적분 간격은 매질의 최대 파수보다 10~20 % 높게 결정하지만 접수 평판과 같이 얇은 평판의 경우 파가 존재하는 모든 영역에 대해 적분을 수행해야 한다. 시간해의 결과로부터 접수 평판의 두께를 5cm로 줄인 경우 음원으로 방사된 파의 파수는 작아지기 때문에 효과는 줄어들고 유체 영역으로부터 방사된 음의 형태는 남는 것을 볼 수 있다. 이것은 평판의 두께가 줄어들게 됨으로써 기본진동수가 낮아 물과의 조합 효과가 높아짐으로써 판의 진동에 의해 교란된 물의 운동과 음원 자체에서 발생한 파가 직접 전달되어 나타난 물의 운동의 영향 때문에 생기는 파의 형태가 실제 전달되는 파의 영향을 대신하게 되는 것이다.

그림 5.1 균일하며 층상화 되어 있는 매질에 존재하는 파의 종류

일반적인 음원에 의해 발생되는 파의 종류를 그림(5.1)에 나타내었으며, 각각의 환경에 대해 파가 존재하는 조건이 다양하므로 실제 환경에 대해 존재하는 현상을 이해하기 위해 좀더 많은 연구를 필요로 한다. 특히 구형의 층상화에 대한 음향 에너지 전달의 경우 이론적인 공식에서 의하면 유체/탄성 영역은 크게 소실되어 지는 것으로 알려져 있지만 실제 환경에 적용하기 위해서는 구형의 층상화에 대해 해석적 해를 구해야 한다.

본 논문에서 개발된 모델은 기본적으로 세 개의 층으로 구성된 접수 평판의 환경에 대해 적용된 것이지만 좀 더 현실적인 문제에 있어 수중 음향 반향체의 코팅에 의한 반사 손실을 측정하기 위한 모델이나 앞서 언급한 유체 소음 판(plate) 또는 표면 처리된 판(coated plat)에서 음향 에너지의 방사 형태에 관한 모델링을 위해 확장할 수 있다.

Appendix

A1. Dip Slip

▷ Potentials

$$\phi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\ 0.5 \sin 2\delta (2\alpha^2 + k^2) J_0(kr) \\ -\ 2\cos 2\delta \zeta k \alpha \sin\theta J_1(kr) \\ -\ 0.5 \sin 2\delta k^2 \cos 2\theta J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \frac{k}{\alpha} dk$$

$$\Lambda = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\ 1.5 \sin 2\delta \zeta \beta J_0(kr) \\ -\ \cos 2\delta \dfrac{2k^2 - k_2^2}{k} \sin\theta J_1(kr) \\ -\ 0.5 \sin 2\delta \zeta \beta \cos 2\theta J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

$$\psi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^\infty \begin{bmatrix} +\ \cos 2\delta \zeta \dfrac{k^2\beta}{k} \cos\theta J_1(kr) \\ -\ 0.5 \sin 2\delta k^2 \sin 2\theta J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

▷ Displacements and stresses

For zeroth order,

$$w^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} 0.5 \sin 2\delta (2\alpha^2 + k^2) \zeta e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 1.5 \sin 2\delta \zeta k^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)\, k\, dk$$

$$u^m + v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} 0.5 \sin 2\delta (2\alpha^2 + k^2) \dfrac{k}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 1.5 \sin 2\delta \beta k e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\, k\, dk$$

$$u^m - v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\ 0.5 \sin 2\delta (2\alpha^2 + k^2) \dfrac{k}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ 1.5 \sin 2\delta \beta k e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_{-1}(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{zz}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\ 0.5 \sin 2\delta (2\alpha^2 + k^2)(2\alpha^2 - k^2) \dfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\ 3 \sin 2\delta k^2 \beta e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^m + \sigma_{\theta z}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\ \sin 2\delta \zeta k (2\alpha^2 + k^2) e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\ 1.5 \sin 2\delta k (\beta^2 + k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr) k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^{m} - \sigma_{\theta z}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} +\ \sin 2\delta k (2\alpha^2 + k^2) e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 1.5 \sin 2\delta \zeta k (\beta^2 + k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_{-1}(kr) k\, dk$$

For $\sin\theta$ order,

$$w^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} 2\cos 2\delta \alpha k e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ \cos 2\delta (2k^2 - k_m^2) \dfrac{k}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\, k\, dk$$

$$u^{m} + v^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} 2\cos 2\delta \zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 2\cos 2\delta \zeta k^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\, k\, dk$$

$$u^{m} - v^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -\ 2\cos 2\delta \zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\ 2\cos 2\delta \zeta \beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{zz}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -\ 2\cos 2\delta \zeta k (k^2 + \beta^2) e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\ 2\cos 2\delta \zeta k (k^2 + \beta^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^{m} + \sigma_{\theta z}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -\ 4\cos 2\delta \alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\ \cos 2\delta \dfrac{k^2}{\beta} (3\beta^3 + k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr) k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^{m} - \sigma_{\theta z}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} 4\cos 2\delta \alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ \cos 2\delta (2\beta^3 + \dfrac{k^4}{\beta} + \beta k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr) k\, dk$$

For $\cos 2\theta$ order,

$$w^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} +\ 0.5 \sin 2\delta \zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 0.5 \sin 2\delta \zeta k^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\, k\, dk$$

$$u^{m} + v^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} 0.5 \sin 2\delta \dfrac{k^3}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 0.5 \sin 2\delta \dfrac{k^3}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr)\, k\, dk$$

$$u^{m} - v^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^{2}} M_0 \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -\ 0.5 \sin 2\delta \dfrac{k^3}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\ 0.5 \sin 2\delta (k^2 - 2\beta^2) \dfrac{k}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{zz}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta (k^2+\beta^2)\frac{k^2}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\sin 2\delta k^2 \beta e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^{m} + \sigma_{\theta z}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} -\sin 2\delta \zeta k^3 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +\sin 2\delta \zeta k^3 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr) k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^{m} - \sigma_{\theta z}^{m} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \sin 2\delta \zeta k^3 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\sin 2\delta \zeta k \beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr) k\, dk$$

A.2 Strike-Slip

▷ Potentials

$$\phi = -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta k^2 J_2(kr) \\ -2\cos\delta \cos\theta \zeta k \alpha J_1(kr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \frac{k}{\alpha} dk$$

$$\psi_r = -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta k J_1(kr) \\ -\cos\delta \cos\theta \zeta \beta J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

$$\psi_\theta = -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta k J_1(kr) \\ +\cos\delta \cos\theta \zeta \beta J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

$$\psi_z = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \cos\delta \cos\theta k J_1(kr)\, e^{\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

또는,

$$\phi = -\frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \sin\delta \sin 2\theta k^2 J_2(kr) \\ -2\cos\delta \cos\theta \zeta k \alpha J_1(kr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \frac{k}{\alpha} dk$$

$$\Lambda = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \cos\delta \cos\theta k \frac{2k^2 - k_2^2}{k} J_1(kr) \\ -\sin\delta \cos 2\theta \zeta \beta J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

$$\psi = \frac{M_0}{4\pi\rho w^2} e^{iwt} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \cos\delta \sin\theta \zeta \beta \frac{k_m^2}{k} J_1(kr) \\ +\sin\delta \cos 2\theta k^2 J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|} \frac{k}{\beta} dk$$

▷ **Displacements and stresses**

For $\cos\theta$ order,

$$w^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\cos\delta\,\alpha k e^{-\alpha|z-z_s|} \\ \cos\delta(2k^2 - k_m^2)\dfrac{k}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\,k\,dk$$

$$u^m + v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\cos\delta\,\zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +2\cos\delta\,\zeta k^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\,k\,dk$$

$$u^m - v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} +2\cos\delta\,\zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -2\cos\delta\,\zeta \beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)\,k\,dk$$

$$\sigma_{zz}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} 2\cos\delta\,\zeta k(2k^2 - k_m^2) e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -2\cos\delta\,\zeta k(2k^2 - k_m^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\,k\,dk$$

$$\sigma_{rz}^m + \sigma_{\theta z}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} 4\cos\delta\,\alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\cos\delta(\dfrac{k^4}{\beta} + 3\beta k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\,k\,dk$$

$$\sigma_{rz}^m - \sigma_{\theta z}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -4\cos\delta\,\alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ \cos\delta(2\beta^3 + \dfrac{k^4}{\beta} + \beta k^2) e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)\,k\,dk$$

For $\sin 2\theta$ order,

$$w^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta\,\zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\sin\delta\,\zeta k^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\,k\,dk$$

$$u^m + v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} \sin\delta\,\dfrac{k^3}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\sin\delta\,\dfrac{k^3}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr)\,k\,dk$$

$$u^m - v^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\sin\delta\,\dfrac{k^3}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\sin\delta(k^2 - 2\beta^2)\dfrac{k}{\beta} e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)\,k\,dk$$

$$\sigma_{zz}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\sin\delta(2k^2 - k_m^2)\dfrac{k^2}{\alpha} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +2\sin\delta k^2 \beta e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)\, k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^m + \sigma_{\theta z}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\sin\delta\zeta k^3 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +2\sin\delta\zeta k^3 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr) k\, dk$$

$$\sigma_{rz}^m - \sigma_{\theta z}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_0 \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} 2\sin\delta\zeta k^3 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -2\sin\delta\zeta k \beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr) k\, dk$$

A.3 Tensile Crack

$$M_1 = M_0, \qquad \delta_1 = 90^\circ$$
$$M_2 = M_0, \qquad \delta_2 = \delta + 90^\circ \quad , \text{ and}$$
$$M_3 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} M_0, \qquad \delta_3 = \delta$$

except that $M_1 = -M_0$ when $m = 2$, $\cos 2\theta$ order.

▷ **Potentials**

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \phi'_k(r, \theta, z : \delta_k, M_k)$$

$$\psi_r = \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{r,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k)$$

$$\psi_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{\theta,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k)$$

$$\psi_z = \sum_{k=1}^{\infty} \psi'_{z,k}(r, \theta, z : \delta_k, M_k)$$

where the potentials with prime ('), which is a single couple without moment, are

$$\phi'_k = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} \int_0^\infty \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25(k^2 - 2\alpha^2) \\ +0.25\cos 2\delta_k (k^2 + 2\alpha^2) \end{bmatrix} J_0(kr) \\ -\sin 2\delta_k \sin\theta\, \zeta\alpha k\, J_1(kr) \\ -0.25(1 - \cos 2\delta_k)\cos 2\theta k^2 J_2(kr) \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \frac{k}{\alpha}\, dk$$

$$\psi'_{r,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta_k \sin\theta\,\zeta\beta J_0(kr) \\ \begin{bmatrix} 0.25(1-\cos 2\delta_k) \\ -0.25(1-\cos 2\delta_k)\cos 2\theta k \end{bmatrix} J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk$$

$$\psi'_{\theta,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} -0.5\sin 2\delta_k \cos\theta\,\zeta\beta J_0(kr) \\ 0.25(1-\cos 2\delta_k)\cos 2\theta k J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk$$

$$\psi'_{z,k} = -\frac{M_k e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} -0.5(1+\cos 2\delta_k)\zeta\beta J_0(kr) \\ -0.5\sin 2\delta_k \sin\theta k J_0(kr) \end{bmatrix} e^{-\beta|z-z_s|}\frac{k}{\beta}dk$$

▷ **Displacements and stresses**

$$w^m(r,z) = \sum_{k=1}^{3} w_k^m(r,z)$$

$$u^m(r,z) + v^m(r,z) = \sum_{k=1}^{3} u_k^m(r,z) + v_k^m(r,z)$$

..

For zeros order,

$$w_k^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}M_k\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} [0.25(k^2-2\alpha^2)\zeta - 0.25\cos 2\delta_k(k^2+2\alpha^2)\zeta]e^{-\alpha|z-z_s|} \\ (0.25+0.75\cos 2\delta_k)\zeta k^2 e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)kdk$$

$$u_k^m + v_k^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}M_k\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25(k^2-2\alpha^2)\frac{k}{\alpha} \\ -0.25\cos 2\delta_k(k^2+2\alpha^2)\frac{k}{\alpha} \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ (0.25+0.75\cos 2\delta_k)\zeta k\beta e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

$$u_k^m - v_k^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}M_k\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25(k^2-2\alpha^2)\frac{k}{\alpha} \\ -0.25\cos 2\delta_k(k^2+2\alpha^2)\frac{k}{\alpha} \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -(0.25+0.75\cos 2\delta_k)\zeta k\beta e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_{-1}(kr)kdk$$

$$\sigma_{zz,k}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2}M_k\mu\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} -\frac{k^2+\beta^2}{\alpha}\begin{bmatrix} 0.25(k^2-2\alpha^2) \\ -0.25\cos 2\delta_k(k^2+2\alpha^2)\zeta \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -(0.5+1.5\cos 2\delta_k)\beta k^2 e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)kdk$$

$$\sigma^m_{rz,k} + \sigma^m_{\theta,k} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5(k^2-2\alpha^2)\zeta k \\ +0.5\cos 2\delta_k (k^2+2\alpha^2)\zeta k \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -(0.25+0.75\cos 2\delta_k)\zeta k(s^2+\beta^2)e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

$$\sigma^m_{rz,k} - \sigma^m_{\theta,k} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5(k^2-2\alpha^2)\zeta k \\ -0.5\cos 2\delta_k (k^2+2\alpha^2)\zeta k \end{bmatrix} e^{-\alpha|z-z_s|} \\ (0.25+0.75\cos 2\delta_k)\zeta k(s^2+\beta^2)e^{\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_{-1}(kr)kdk$$

For $\sin\theta$ order,

$$w^m_k = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} \alpha k \sin 2\delta_k e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -0.5\frac{k}{\beta}(\beta^2+k^2)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

$$u^m_k + v^m_k = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} +\zeta k^2 \sin 2\delta_k e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\zeta k^2 \sin 2\delta_k e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)kdk$$

$$u^m_k - v^m_k = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\sin 2\delta_k \zeta k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +2\sin 2\delta_k \zeta \beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)kdk$$

$$\sigma^m_{zz,k} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\sin 2\delta_k \zeta k(k^2+\beta^2)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +2\sin 2\delta_k \zeta k(k^2+\beta^2)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

$$\sigma^m_{rz,k} + \sigma^m_{\theta,k} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -2\sin 2\delta_k \alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +0.5\sin 2\delta_k \frac{k^2}{\beta}(2\beta^2+k^2)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)kdk$$

$$\sigma^m_{rz,k} - \sigma^m_{\theta,k} = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} 2\sin 2\delta_k \alpha k^2 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -\sin 2\delta_k (\beta^3+0.5\frac{k^4}{\beta}+0.5\beta k^2)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_0(kr)kdk$$

For $\cos 2\theta$ order

$$w^m_k = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} +0.25\zeta k^2(1-\cos 2\delta_k)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -0.25\zeta k^2(1-\cos 2\delta_k)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)kdk$$

$$u^m_k + v^m_k = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} +0.25\frac{k^3}{\alpha}(1-\cos 2\delta_k)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -0.25\frac{k^3}{\beta}(1-\cos 2\delta_k)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr)kdk$$

$$u_k^m - v_k^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.25\frac{k^3}{\alpha}(1-\cos 2\delta_k)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -0.25(k^2-2\beta^2)\frac{k}{\beta}(1-\cos 2\delta_k)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

$$\sigma_{zz,k}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.25(k^2+\beta^2)\frac{k^2}{\alpha}(1-\cos 2\delta_k)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +0.5k^2\beta(1-\cos 2\delta_k)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_2(kr)kdk$$

$$\sigma_{rz,k}^m + \sigma_{\theta,k}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} -0.5\zeta k^3(1-\cos 2\delta_k)e^{-\alpha|z-z_s|} \\ +0.5\zeta k^3(1-\cos 2\delta_k)e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_3(kr)kdk$$

$$\sigma_{rz,k}^m - \sigma_{\theta,k}^m = \frac{e^{iwt}}{4\pi\rho w^2} M_k \mu \int_0^\infty \begin{bmatrix} +0.5\zeta k^3 e^{-\alpha|z-z_s|} \\ -0.5\zeta k\beta^2 e^{-\beta|z-z_s|} \end{bmatrix} J_1(kr)kdk$$

참고문헌.

[1] K.Aki and P. Richards, *Quantitative Seismology*. W.H. Freeman and Co., San Franscisco, 1980

[2] H. Schmidt and G. Tango. *Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms*. Geophys. J. R. Astr. Soc., 84:331-359, 1986.

[3] F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, and H. Schmidt. *Computational Ocean Acoustics*. American Institute of Physics, New York, 1994.

[4] H. Schmidt. SAFARI: Seismo-acoustic fast field algorithm for range independent environments. user's guide. SR 113, *SACLANT ASW Research Centre*, La Spezia, Italy, 1987.

[5] M. Stern, A. bedford and H.R. Millwater. Wave reflection from a sediment layer with depth-dependent properties. *j. Acoust.Soc. Am.*, 77:1781-1788, 1985.

[6] J. S. Kim. *Radiation from directional seismic sources in laterally stratified media with application to Arctic ice cracking noise*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, May 1989.

[7] H. Schmidt and J. Glattetre. A fast field model for three-dimensional wave propagation in stratified environments based on the global matrix method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 78:2105-2114, 1985.

[8] H. Schmidt and W.A. Kuperman. Spectral representations of rough interface reverberation in stratified ocean waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.*, 96:Submitted, 1994.

[9] R. D. Stoll and T.K. Kan, ``Reflection of acoustic waves at a water sediment interface,'' *J. Acoust. Soc. Am.*, 70, 149-156, 1981.

[10] W. L. Anderson. Computation of green's tensor integrals for three-dimensional electromagnetic problems using fast Hankel transforms. *Geo-physics*, 49:1754-1759, 1984

[11] George E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67, No.11:4427-4440, 1962

[12] Ari Ben-Menahem and Sarva Jit Singh. *Seismic Wave and Sources*. Springer-Verlag New York Inc., 1981.

[13] R. Burridge and L. Knopoff. Body force equivalents for seismic dislocations, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 54:1901-1914, 1964

[14] C. H. Chapman, A new method for computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 54:481-518, 1978.

[15] C. H. Chapman and R. Drummond. Body-wave seismograms in inhomogeneous media using maslov asymptopic theory. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 72 No. 6:S277-S317, Dec 1982.

[16] F. R. DiNapoli and R. L. Deavenport. Theoretical and numerical green's function solution in a plane layered medium. *Jour. Acoust. Soc. Am.*, 67:92-105, 1980

[17] G. J. Fryer and L. N. Frazer. Seismic waves in stratified media. *Geophys. J. F.*

astr. Soc., 78:691- 710, 1987.

[18] G. J. Fryer and L. N. Frazer. Seismic waves in stratified media - Ⅱ. *Geophys. J. F. astr. Soc.*, 1987.

[19] K. Helbig. Systematic classicfication of layer- included transverse isotropy. *Geophysical Propecting*. 29:550- 557, 1981.

[20] K. Kasahara. *Earthquake Mechanics*. Cambridge University Press, 1981.

[21] L. Tsang R. Brown J.A Kong and G. Simmons. Numerical evaluation of electromagnetic fields due to dipole antennas. *Journal of Acoustical Society of America*, 78 (6):2105 - 2114, December 1985.

[22] Th. Krey and K. Helbig. A theorem concerning anisotropy of stratified media and its significance for reflection seismics. *Geophysical Prospecting*, 4:294- 302, 1956.

[23] W. A. Kuperman and H. Schmidt. Rough surface elastic wave scattering in a horizontally stratified ocean. *Journal of Acoustical Society of America*, 79 (6): 1767- 1777, 1986.

[24] A. J. Langley. Exact and approximate theories for fluid- loaded, infinite, elstic plate. *J. Acoutic. Society. Am.*, 83:1366- 1375, 1988

[25] A. J. Langley. The sound fields of an infinite, fluid- loaded plate excited by a point force. *J. Acoust. Am.*, 83:1360- 1365, 1988

[26] A. E. H. Love. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. reprinted by Dover Publications, New York, 4th ed. edition, 1944.

[27] L. Mansinha. The velocity of shear fracture. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 54:369-376. 1964.

[28] J.W.S. Rayleigh. *The theory of sound*. Dover Publications. NEW YORK, 1957.

[29] Ryosuke Sato. Formulation of solutations for earthquake source models and some related problem. *Journal of Physics of The Earth*, 17, No. 2:101-110, 1969.

[30] J. C. Savage and L. Mansinha. Radiation from a tensile fracture. *Journal of Geophysical Research*, 69, No. 23:6345-6358, 1963.

[31] H. Schmidt and F. B. Jensen. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to gaussian beam reflection at fluid-solid interfaces. *Journal of Acoustical Society of America*. 77 (3):813-825, 1985.

[32] Henrik Schmidt. *SAFARI - User's Guide*. SACLANT ASW Research Centre. I-19100 La Spezia. Italy, May 1987.

[33] H. Takeuchi and M. Saito. Seismic surface waves. In Bruce A. Bolt, editor, *Methods in computational physics*, Academy Press, New York, 1972. Vol. 11.