

공학석사 학위논문

자율 이족 보행 로봇의
동역학 시뮬레이션과 슬라이딩 모드제어

Dynamic Simulation and Sliding Mode Control Design
of Autonomous Biped Walking Robot

지도교수 유 삼 상

2004 년 2 월

한국해양대학교 대학원

기 계 공 학 과

백 창 열

本 論 文 을 白 昌 列 의 工 學 碩 士 學 位 論 文 으 로 認 准 함 .

委 員 工 學 博 士 崔 炯 植 (印)

委 員 長 工 學 博 士 柳 三 相 (印)

委 員 工 學 博 士 趙 琮 來 (印)

2004 年 2 月

韓 國 海 洋 大 學 校 大 學 院

機 械 工 學 科

白 昌 列

목 차

Abstract

기호설명

그림목차

표목차

제 1 장. 서론	1
제 2 장. 자율 이족 보행로봇의 기구학 및 동역학 모델링	5
2.1. 수학적 모델의 유도	6
2.2. 로봇 매니플레이터의 Lagrangian	14
2.3. 이족 보행 로봇의 실제 모델 방정식의 유도	20
2.3.1. 자코비안	22
2.3.2. 관성행렬	26
2.3.3. Cristoffel 항	28
2.3.4. 포텐셜에너지	29
2.4. 회전 관절 공간에서의 동역학 모델링	31
2.4.1. Closed-Form 동역학 모델링	31
2.5. 미끄럼 관절 공간에서의 동역학 모델링	32
2.5.1. 사절링크를 이용한 개선된 각 관절의 동역학 모델링	32
2.5.2. 미끄럼 관절 공간의 제어 입력	37
2.5.3. 미끄럼 관절 공간에서의 동역학 모델링	38

제 3 장. 슬라이딩 모드 제어기 설계 및 시뮬레이션	40
3.1. 시뮬레이션의 조건	40
3.2. 슬라이딩 모드 제어기 설계	43
3.3. 시뮬레이션	45
제 4 장. 자율 이족 보행로봇의 구동기 해석	50
5.1. 각 관절 구동기의 동력 전달 형태	50
5.2. 각 관절 구동기의 보행 패턴에 따른 부하토크	53
5.3. 각 관절 구동기에서 구동 모터 선택의 타당성	55
제 5 장. 결론	58
참고문헌	60

Dynamic Simulation and Sliding Mode Control Design of an Autonomous Biped Walking Robot

Chang – Yeol Beak

Department of Mechanical Engineering
Graduate School, Korea Maritime University

Abstract

In this paper, based on the developed a human-sized biped walking robot(BWR) driven by a new actuator based on the ball screw which has high strength and high gear ratio, a BWR more D.O.F was designed to improve its performance by reducing and improving weight of four bar link actuator which is joint actuator.

The dynamics model of the developed BWR was investigated. In the modeling process, the robot dynamics are expressed in the joint coordinates using the Euler-Lagrange equation. Then, they are converted into the sliding joint coordinates and joint torques are expressed in the forces along the sliding direction of the ball screw.

The dynamics equation of the BWR is nonlinear and parameters of mass or inertial moment etc. are quite uncertain. To coordinate the BWR, the sliding-mode control was designed and applied for. Then trajectory control simulation was reformed to figure out suitability of control scheme.

Also by analyzing the load torque of the developed BWR actuator, a study on the validity of the motor for the joints of the 15 D.O.F autonomous BWR was performed.

기 호 설 명

Γ	일반화 힘(generalize force)
K	매니플레이터에 작용하는 총 운동에너지
m_i	각 회전링크의 질량
V	매니플레이터에 작용하는 총 포텐셜에너지
L	Lagrangian ($L = K - V$)
$S(\overline{\omega})$	왜대칭 행렬(skew symmetric matrix)
I_i	각 회전 링크의 관성 모멘트(inertia moment)
J_{vci}	각 회전 링크의 선속도 자코비안(Jacobian)
$J_{\omega i}$	각 회전 링크의 각속도 자코비안
D	회전 관절 공간에서의 관성 행렬
C	회전 관절 공간에서의 원심력과 코리올리(Coriolis)력
Φ_i	기저 좌표계에 대한 각 링크의 위치에너지
O_i	기저 좌표계에 대한 각 관절의 회전 중심
M_{X_i}	기저 좌표계를 기준으로 한 각 회전링크의 질량 중심
M_{Y_i}	기저 좌표계를 기준으로 한 각 회전링크의 질량 중심
q_i	각 회전관절의 관절 변위
l_i	각 회전 링크의 길이
l_{ci}	각 회전 링크의 질량 중심 거리

d_i	각 관절의 볼나사의 미끄럼변위
F_i	각 관절에 가해지는 미끄럼 방향의 힘
τ_i	각 관절의 회전중심에 작용하는 토크
H	미끄럼 관절 공간에서의 관성행렬
Q	미끄럼 관절 공간에서의 원심력 및 코리올리력
s	스위칭 함수 (switching function)
λ	스위칭 게인 (switching gain)
d_r	원하는 회전각에 대한 볼나사의 이동 경로
V	Lyapunov 함수
k	슬라이딩 모드 게인
\hat{t}	제어 입력의 추정치
\hat{H}	관성행렬의 추정치
\hat{Q}	원심력과 코리올리력의 추정치
\tilde{H}	관성 행렬과 관성행렬 추정치 사이의 오차
\tilde{Q}	원심력과 코리올리력과 그 추정치 사이의 오차
M_i	각 관절 구동기에 작용하는 자중
$\tau_{Motorload,i}$	각 관절 구동기에 축방향으로 작용하는 외력에 대한 모터의 부하 토크

그림 목차

Fig. 2.1	개발된 이족 보행 로봇	6
Fig. 2.2	이족 보행 로봇의 Denavit-Hartenberg 좌표계	7
Fig. 2.3	전진 보행시 기구학적 모델링	8
Fig. 2.4	15자유도의 자율 이족 보행 로봇의 질량 모델링	9
Fig. 2.5	각 관절의 형상 모델링	36
Fig. 3.1	각 관절의 회전 범위 내의 이족 보행 로봇 형태	41
Fig. 3.2	이족 보행 로봇의 보행 초기 형태	42
Fig. 3.3	슬라이딩 모드 제어시의 블록도	43
Fig. 3.4	발목 관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로와의 비교	46
Fig. 3.5	발목 관절의 추정 오차	46
Fig. 3.6	발목 관절의 제어 입력	46
Fig. 3.5	무릎 관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로와의 비교	47
Fig. 3.8	무릎 관절의 추정 오차	47
Fig. 3.9	무릎 관절의 제어 입력	47
Fig. 3.10	허리 관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로와의 비교	48

Fig. 3.11 허리 관절의 추정 오차	48
Fig. 3.12 허리 관절의 제어 입력	48
Fig. 4.1 각 관절에 작용하는 부하 토크	51
Fig. 4.2 이족 보행 로봇의 보행 패턴	53
Fig. 4.3 허리 관절 구동기에 작용하는 부하토크	54
Fig. 4.4 무릎 관절 구동기에 작용하는 부하토크	54
Fig. 4.5 발목 관절 구동기에 작용하는 부하토크	55

표 목 차

Table 3.1 이족 보행 로봇의 물성치	41
Table 3.2 궤적 함수의 상수 값	45
Table 4.1 각 관절의 부하토크에 대한 상수	52
Table 4.2 각 관절의 구동기에서 사용되는 모터 사양	56
Table 4.3 각 관절의 구동기에서 사용되는 모터의 토크 상수.....	56
Table 4.4 동일 회사의 150W DC 모터 사양	57

제 1 장 서 론

산업이 발전 함에 따라 작업자나 일반 차량의 접근이 어려운 환경과 산업 현장 그리고 인간 생활의 중심으로 설계된 공간들에서 인간의 보조 역할을 하는 이족 보행 로봇의 연구가 지속적으로 진행중이다.

산업 현장에서는 인간의 작업을 대신하는 다관절 로봇과 스칼라 로봇의 사용이 보편화 되었고, 인간의 실생활에서는 생활의 편리함을 추구 하기 위해 여러 가지 용도의 로봇이 개발되고 있다. 정밀한 작업이 필요로 하는 반도체 분야에서도 로봇이 인간을 대신하는 상황이다. 현재 국내의 여러 업체들이 비록 이족 보행 로봇은 아니지만 인간 생활의 편리함을 목적으로 청소하는 로봇 등을 시판하는 시점에 이르렀다.

그러나 인간과 같이 생활하는 공간에서 로봇이 인간과 유사하게 보행하는 것은 필수적이라고 할 수 있다.

60년대 후반 Vucobratovic가 이족보행로봇에 관한 모델링을 제안한 이후 이족보행로봇에 대한 많은 연구가 수행되었다. 동적 보행 시에 로봇의 걸음새 동작의 특성을 파악하고 이를 제어하는 연구[1,2], 3 자유도 이족보행로봇의 토크를 줄이기 위하여 경로계획을 이용한 제어[3], 5 자유도의 이족 보행 로봇의 운동방정식을 Direct-nonlinear-decoupling 방법에 의해 선형화시켜 거동을 제어하는 연구[4], 토크센서를 이용하여 9자유도의 로봇의 보행 제어[5], 보행동작의 모델링과 선형화 제어로 인한 상태공간의 안정도 해석[6], 5자유도 로봇의 모델링과 슬라이딩모드 제어를 통한 보행궤적 추적제어에 관한 연구들이 수행되었다[7,8].

그러나 위의 연구들은 다리부로만 이루어져 있어 균형관절을 가지고 있는

이족보행로봇에 비하여 걸음새 변경에 보다 복잡한 알고리즘을 필요로 하며, 보행전 균형점 궤적이나 균형운동을 검증하거나 결정하기 어려운 문제점이 있다. 이를 해결하기 위하여 시스템의 안정도 보상을 위해 균형관절을 갖는 형태의 이족보행로봇에 대한 연구가 수행되었다. 그 결과 이족보행로봇의 균형관절은 직진운동관절[9-12]과 회전운동관절[13-15]의 두 가지 형태로 연구 되었다.

1990년대 후반의 연구들은 이족 보행 걸음새나 로봇의 몸체 추진 궤적에도 관심을 보여왔다[16-18]. 이들 연구들은 전형적으로 역동력학(Inverse dynamics)연산에 의한 토크제어를 기본으로 하거나[19] 신경회로 알고리즘을 이용하여 걸음새를 구현하였다[20,21]. 이외에도 외란 관측기[22], H^∞ 제어기 등을 이용하여 강인한 제어를 구현하거나[23], 균형을 학습에 의해 개선시키는 연구[24], 모의실험을 수행하여 기존의 연구가 갖고 있는 제약을 극복하고자 하는 연구도 많이 수행되었다. 그러나 다자유도 시스템의 운동방정식의 복잡성으로 수학적 모델의 정립이 어렵고 이로 인하여 다양한 걸음새를 구현하기에는 제한적이었다. 또한, 이족 보행을 수행하는 데 있어서 최적의 에너지 소모를 도모하기 위한 연구도 병행되었으나[25], 이 역시 시스템의 안정도 또는 균형화를 포함하고 전체 시스템을 표현하는 수학적 모델을 도출하지 못한 한계성을 보여주었다. 이러한 기존 연구들의 한계점을 극복하고 보다 다양한 걸음새를 안정되게 구현하고 적절한 제어방법의 모색을 위해서는 이족보행로봇의 안정도가 포함된 수학적 모델의 유도가 필수적이지만 여러 연구 결과에서 나타난 바와 같이 어려운 난제로 남아있다. 이론적 모델링을 통한 접근방법과는 달리 보행을 위한 구동 메커니즘의 설계와 실험적인 방법으로 접근한 연구들이 있다. 이러한 실험적 방법에는 무거운 자중을 지지하며 각 다리관절을 구동하는 구동기의 설계 및 제작과 상하체 관절, 균형 및 보행을 제어하는 제어 시스템 구성의 두 방법이 고려되어야 한다. 그러나, 모터와 감속기를 이용한 구동기 설계와 제작은 구동모터의 구동토크 한계와 감속기의 강성의 한계로 구동 토크

변화율의 한계 및 로봇의 크기에 제한을 둘 수밖에 없는 구조적 한계점을 가지고 있다[25]. 이를 해결하기 위하여 스프링 메커니즘을 이용하여 구동기의 토크를 높이는 연구[26]가 수행되었지만 여전히 만족할 만한 강성을 얻지 못하고 있다. 상하체 관절, 균형 및 보행을 제어하는 제어 시스템 구성된 가장 발전적인 형태로는 Honda사에서 개발한 PS시리즈 로봇이 있다[27].

하지만 현재까지 개발된 보행을 수행하기 위하여 로봇의 구동관절은 감속기를 채용한 모터를 직접 회전 관절에 장착하는 구조로 되어 있어 구동모터의 구동토크 한계와 감속기의 강성의 한계로 로봇의 크기에 제한을 둘 수밖에 없는 구조적 한계점을 가지고 있다. 그리고 로봇의 보행 시에 안정성을 유지하기 위해서는 여러 가지 제약조건이 존재하여서 이를 만족시키기 위해서는 큰 토크의 변화율이 요구된다. 또한, 이족 보행 로봇은 이동 시스템이므로 자체 탑재된 동력원이 추가적인 구동부하로 작용한다.

이러한 한계점을 극복하기 위하여 한국해양대학교 지능로봇 및 자동화 실험실에서는 고 강성의 높은 기어비를 갖는 볼 나사를 사용하여 새로운 구조의 인체형 15자유도 이족 보행로봇을 개발하였다[28].

본 논문에서는 초기 형태의 이족 보행 로봇의 성능을 개선하기 위하여 초기 형태의 이족 보행 로봇을 기초로 하여 로봇의 본체를 자립형(autonomous type)으로 개발하고, 관절 구동기인 사절링크 구동기를 경량화 및 모듈화하기 위한 구조 개선 설계를 수행하였다. 미끄럼 관절 공간에서의 유도된 운동 방정식은 비선형적이며 관성 모멘트나 질량이 불확실하여 슬라이딩 모드 제어를 적용하고 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 적용의 합리성을 보이고자 한다. 뿐만 아니라 자립형 이족 보행 로봇의 자중 증가로 현재 구동기의 모터가 사용이 적절한지 여부를 보고자 한다.

본 논문의 구성은 2장에서 문헌[28]에서 개발된 이족보행로봇에 대한 시스템의 동역학 모델링 및 운동 방정식을 유도한다. 운동 방정식은 Euler-Lagrange 방정식을 이용하여 회전관절 공간에서 이족 보행 로봇의 동역학 방정식을 유도하고, 사절링크 기구의 구동을 위한 볼나사의 미끄럼관절 공간에서의 운동방정식으로 변환한다. 그리고 3장에서는 유도된 미끄럼 관절 공간에서의 운동 방정식은 슬라이딩 모드 제어기를 적용하여 경로제어를 수행하였다. 4장에서는 기존에 만들어진 문헌[28]의 로봇 구동기의 부하를 해석하여 현재 사용중인 모터가 적합한지에 대한 타당성을 검증한다.

제 2장 자율 이족보행로봇의 동역학 모델링

본 논문에서는 Fig. 2.1과 같은 각각 3개의 피치(pitch) 관절과 발목 부에 1개의 롤(roll) 관절, 몸체와 비전 시스템을 가지는 머리, 그리고 4개의 관절로 구성된 양팔로 구성된 15자유도의 자율 이족 로봇을 제작하였다. 이족 보행의 경우에는 방향전환을 위한 1축, 균형 유지를 위한 1축, 각 다리의 관절구동을 위한 3축 및 발목의 롤 관절을 위한 1축과 같이, 각각의 다리에 6 자유도를 필요로 하나 본 논문에서는 직선보행을 위한 자유도인 3 자유도와 발목의 롤 관절을 포함한 4 자유도를 부여하여 제어축 수를 결정하였다. Fig.2.2에서 보이는 바와 같이 제작된 이족 보행로봇의 기구학적 모델은 여타의 다른 이족 로봇과 같은 여러 개의 자유도가 종속적으로 연결되어 있다. 이 기구학적 모델의 해석방법은 폐쇄적 기구연쇄 방법(closed kinematics chain)을 사용하여 총 15자유도 중에서 전방보행에 대한 7 자유도의 기구학 및 동역학 해석을 수행하였다. 이를 위하여 Fig.2.3, Fig.2.4 과 같이 각 링크에 대한 질량중심 길이 및 기구학적 질량 모델을 설정하였다.

보행 동작은 크게 두가지로 두발이 착지한 상태와 한발은 착지하고 다른 발은 이동을 위하여 공간에 있는 상태로 나뉜다. 본 논문에서는 한 다리가 착지한 경우의 운동방정식을 고찰하기 위하여 지지부 한쪽 다리를 모델로 한다면, 다리는 기본적으로 인간과 같이 발목, 무릎 및 힙과 같은 측면의 축을 중심으로 회전하는 3자유도 시스템으로 구성되며 평면에 놓인 다리의 발바닥에 기저 좌표 계를 설정하였다. 제안된 시스템의 동역학 방정식을 유도하기 위하여 우선, Euler-Lagrange 방정식을 이용하여 회전관절 공간에서의 동역학식을 유도한 후, 4절 링크기구의 운동방정식을 유도하여 궁극적으로 볼 나사 좌표 계에서의 방정식으로 표현하였다.

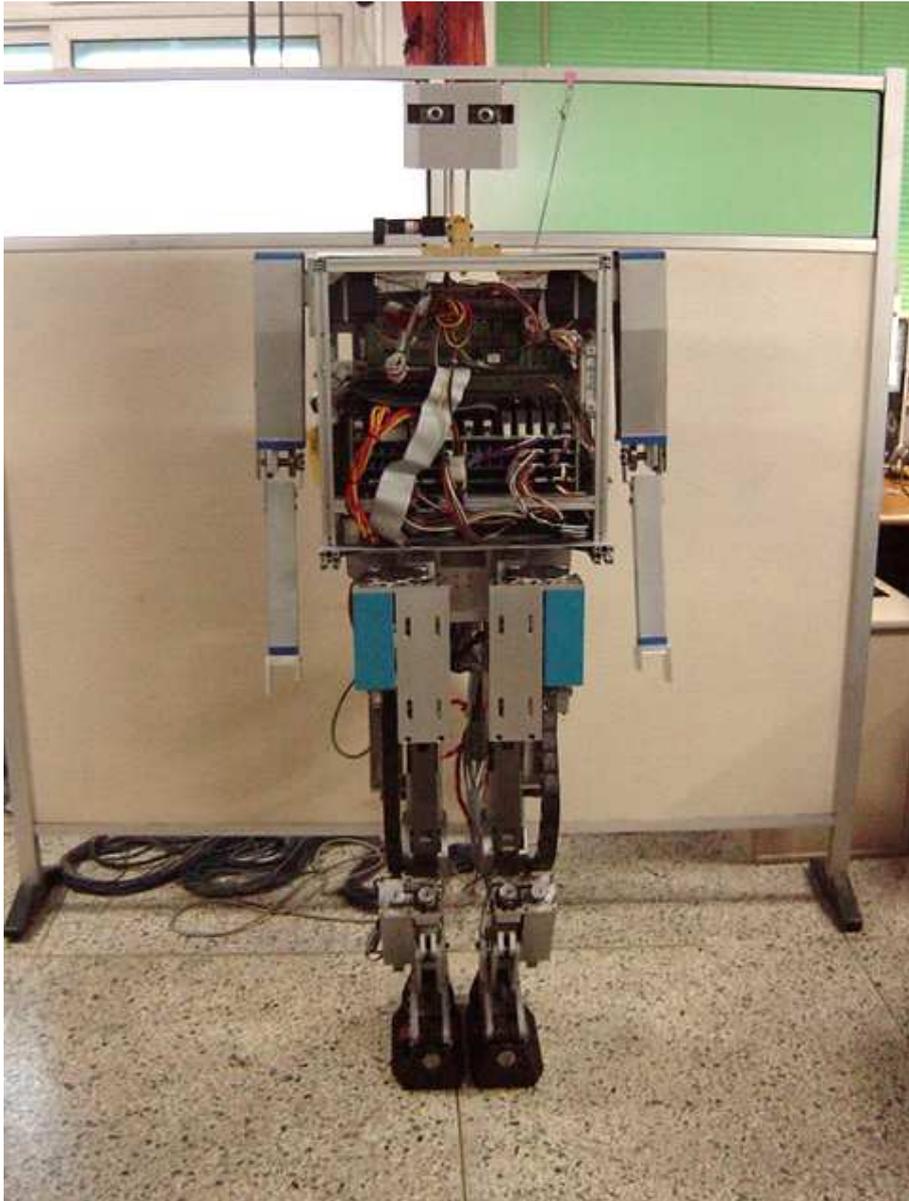


Fig. 2.1 개발된 자율 이족 보행 로봇

2.1 수학적 모델의 유도

구속력(constraint force)이 가상일 원리(principle of virtual work)를 만족할 때

홀로노믹(holonomic) 구속조건 하에서 기계시스템의 거동을 나타내는 미분 방정식을 Euler- Lagrange 방정식이라고 한다. 유도 방법에는 Hamilton의 최소 작용원리(Hamilton's principle of least action) 및 가상 변위(virtual displacement)에 의한 유도 방법이 있으며 여기서는 가상 변위에 기초한다.

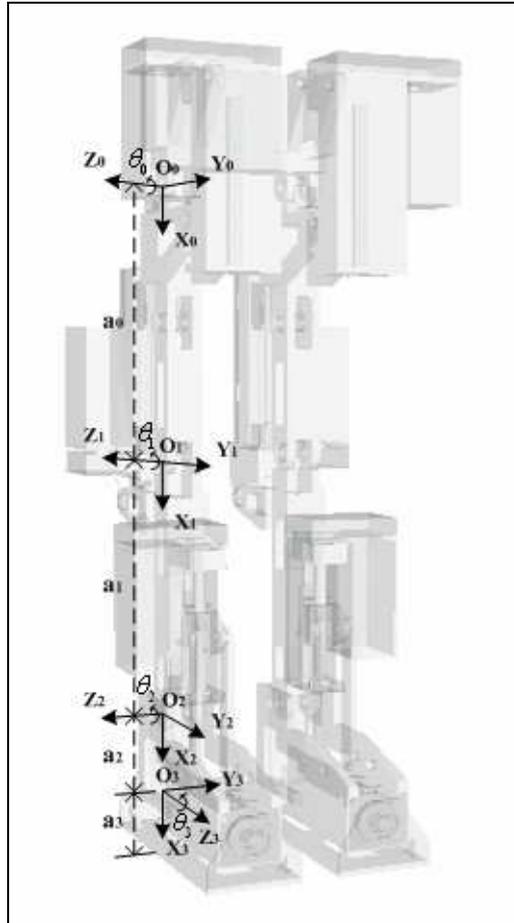


Fig. 2.2 이족 보행로봇의 Denavit-Hartenberg 좌표계

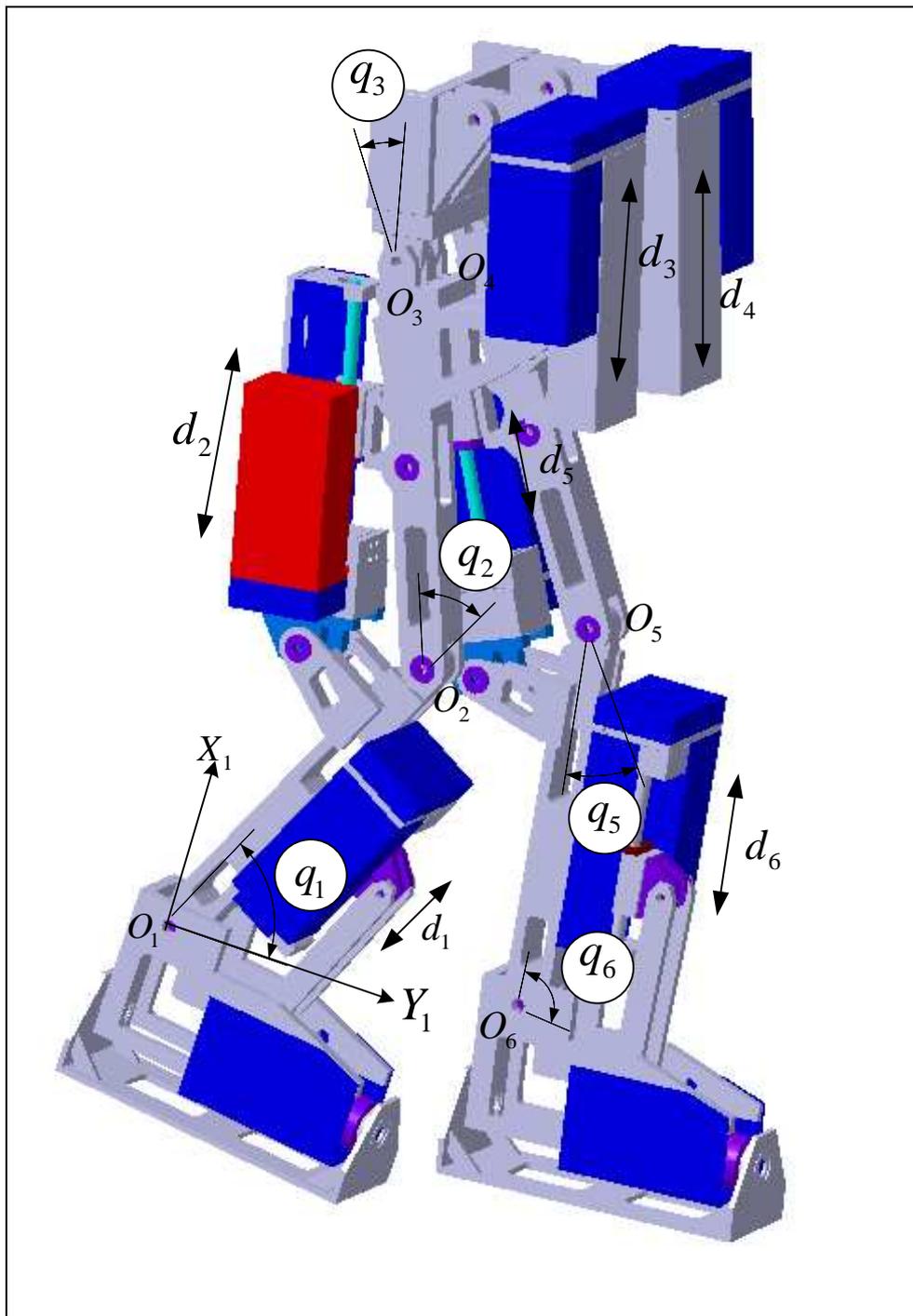


Fig. 2.3 전진 보행시 기구학적 모델링

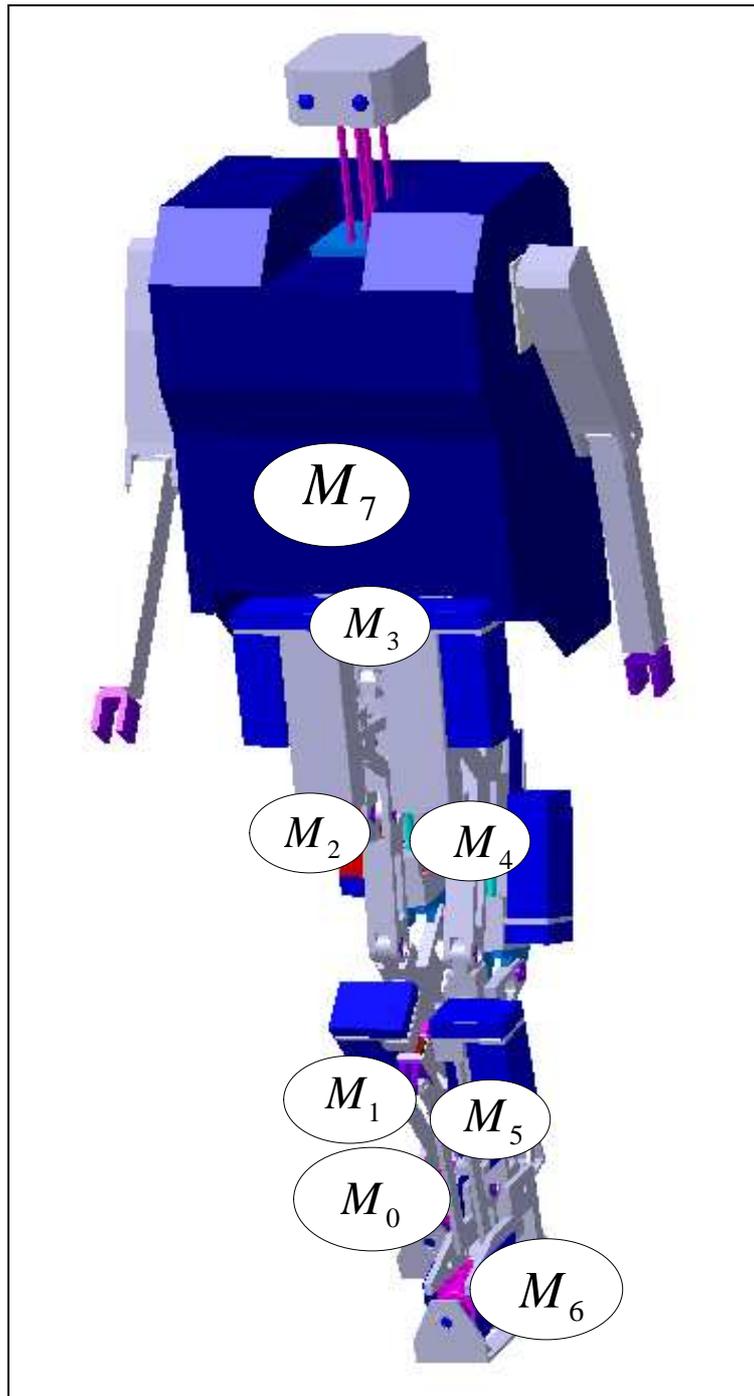


Fig. 2.4 15자유도의 자율 이족 보행 로봇의 질량 모델링

각각의 좌표가 r_1, \dots, r_k 인 k 개의 질점으로 이루어진 시스템에서 만약, 이 질점들이 아무런 제한 없이 자유롭게 움직일 수 있다면, 각 질점의 운동량의 시간변화율은 그 질점에 작용하는 외력과 같다. 그러나 질점들의 운동이 어떤 모습으로든 제약을 받는다면, 외력뿐만 아니라 구속이 유지되게 하는 구속력을 고려해야 할 것이다.

k 개의 좌표들 r_1, \dots, r_k 에서 구속조건이 다음의 등호 꼴을 가지면,

$$g_i(r_1, \dots, r_k) = 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (2.1)$$

홀로노믹(holonomic) 이라 하고, 그렇지 않으면 비홀로노믹(nonholonomic) 이라 한다.

시스템이 l 개의 홀로노믹 구속조건 아래 있으면 비구속 시스템보다 l 개만큼 적은 자유도를 가지는 구속 시스템으로 생각할 수 있다. 이때 시스템은 k 개의 질점들의 좌표를 n 개의 일반화 좌표(generalized coordinates)인 q_1, \dots, q_n 로 나타낼 수 있다. 즉, 구속 조건 식 (2.1)의 여러 질점들의 좌표는,

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, k \quad (2.2)$$

의 형태로 나타낼 수 있다고 가정한다. 이때 q_1, \dots, q_n 는 독립적이다. 일반화 좌표의 개념은 무한히 많은 질점들이 있을 때도 쓰일 수 있다. 그러나 간단히 하기 위해서 질점 수가 유한하다고 가정한다. 통상적인 일반화 좌표는 위치, 각도 등이 되며 실제 이족보행로봇에 있어서의 관절 변수를 q_1, \dots, q_n 으로 나타내게 하였다. 구속조건과 일치하는 무한소 변위 $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ 로 구성되는 가상 변위에 있어서 요구하는 구속조건 식(2.2)을 만족시키기 위해서는 모든 가상 변위의 집합은,

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \delta q_j, \quad i=1, \dots, k \quad (2.3)$$

가 되고, 이때 일반화 좌표의 가상 변위 $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ 는 구속되지 않는다.

또 다른 가정으로 각 질점이 평형 상태라고 가정하면 평형상태(equilibr -

ium)의 구속시스템을 설명할 수 있다. 평형 상태의 경우에서 각 질점의 합력은 0 이 되고, 이는 각 가상 위치의 집합에 의한 일은 0 임을 뜻한다. 따라서 가상 변위의 어떤 집합에 의한 일의 합도 0 이다.

따라서,

$$\sum_{i=1}^k F_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.4)$$

여기서 F_i 는 질점 i 에 작용하는 총 힘이다. 다시 말해서 힘 F_i 는 외력 f_i 와 구속력 $f_i^{(a)}$ 의 합이다. 가상 변위의 어떤 집합에 해당되는 구속력에 의한 한 일의 총합은 0, 즉

$$\sum_{i=1}^k (f_i^{(a)})^T \delta r_i = 0 \quad (2.5)$$

이라고 가정한다면, 이는 질점 한 쌍 사이의 구속력의 방향이 두 질점을 잇는 반지름 벡터 상에 있을 때마다 성립 될 것이다. 식 (2.5)를 식 (2.4)에 대입하면 그 결과는

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.6)$$

된다. 이 방정식의 좋은 점은 모르는 구속력을 포함하지 않고, 알려진 외력만 가진다는 점이다. 이 방정식은 가상일 원리를 나타내는 식으로서, 어떤 가상 변위의 집합에 해당되는 외력에 의한 일은 0 이다. 이 원리는 일반적으로 적용되는 것은 아니고 구속력이 일을 하지 않을 때인, 즉 식(2.5)가 성립될 때만 적용되는 것이다. 따라서 가상일 원리를 쓰면 구속력을 구하지 않고 시스템의 동역학 문제를 해결할 수 있다. 즉, 가상일의 원리는 강성이 유일한 구속조건일 경우에 적용된다. 그러나 식 (2.6)에서 가상변위 δr_i 는 독립 적이지 않으므로 이 방정식에서 각 계수 f_i 가 개별적으로 0 이라고 할 수 없다. 이러한 가정을 만족하기 위해서는 일반화 좌표로 변환되어야 한다. 이러한 일반화 형태로의 변환 이전에 평형이 아닌 시스템을 생각한다면, 그런 시스템에서의 D'Alembert의 원리는 다음과 같다.

각 i 에 대해 질점 i 에 운동량인 허구의 추가력 $-\dot{p}_i$ 를 도입하면, 각 질점은 평형 상태에 있을 것이다. 따라서 식 (2.4)의 F_i 를 $f_i - \dot{p}_i$ 로 바꾸면 결과식은 임의의 시스템에 대해서도 유효하다. 그러면 가상일 원리를 써서 전처럼 구속력을 없앨 수 있다 그 결과 식은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i - \sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.7)$$

좌변의 첫째 항은 외력에 가상 일이고 두 번째 항은 운동량에 의한 것이다. 첫 식은 δr_i 의 각 계수가 0이라는 것을 뜻하지 않는다. 이 목적으로 각 δr_i 를 식 (2.3)에서처럼 일반화 좌표의 해당 가상 변위로 나타낸다. 그러면 힘 f_i 에 대한 가상 일은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n f_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta q_j \quad (2.8)$$

여기서,

$$\Gamma_j = \sum_{i=1}^k f_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \quad (2.9)$$

식(2.9)는 일반화 힘(generalized force)이다. q_j 가 길이의 차원을 가질 필요가 없듯이, Γ_j 는 힘의 차원을 가질 필요가 없다. 그러나 $\Gamma_j \delta q_j$ 는 항상 일의 차원을 가져야만 한다. 다음으로 식 (2.7)의 두 번째 항을 고려할 때 $p_i = m_i \dot{r}_i$ 이며,

$$\sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \delta q_j \quad (2.10)$$

다음으로 미분의 곱 법칙을 쓰면

$$\sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{r}_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \right] - m_i \dot{r}_i^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \right] \right\} \quad (2.11)$$

연쇄 규칙을 써서 식 (2.2)를 미분하면

$$v_i = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \dot{q}_j \quad (2.12)$$

여기서,

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta \dot{q}_j} = \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^2 r_i}{\Delta q_j \Delta q_i} \dot{q}_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta q_j} \quad (2.13)$$

식 (2.13) 및 (2.12)를 식 (2.11)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i v_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \right] - m_i v_i^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} \right] \right\} \quad (2.14)$$

일반적인 운동에너지 K 는

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i \quad (2.15)$$

으로 표현되고, 따라서 위의 합은 간결하게 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\Delta r_i}{\Delta q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\Delta K}{\Delta \dot{q}_j} - \frac{\Delta K}{\Delta q_j} \quad (2.16)$$

식 (2.16)를 식 (2.10)에 대입하면 식 (2.7)의 두번째 합은

$$\sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\Delta K}{\Delta \dot{q}_j} - \frac{\Delta K}{\Delta q_j} \right\} \delta q_j \quad (2.17)$$

마지막으로 식 (2.7) 과 식(2.8)을 묶으면

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\Delta K}{\Delta \dot{q}_j} - \frac{\Delta K}{\Delta q_j} - \Gamma_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (2.18)$$

가상 변위 δq_j 들은 독립 적이므로 식 (2.18)의 계수가 0 임을 결론 지을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta K}{\Delta \dot{q}_j} - \frac{\Delta K}{\Delta q_j} = \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

일반화 힘 Γ_j 가 외력과 포텐셜장(potential field)에 의한 힘의 합이라면 아래와 같다.

$$\Gamma_j = -\frac{\Delta V}{\Delta q_j} + \tau_j \quad (2.20)$$

위의 식을 만족하는 함수 τ_j 와 $V(q)$ 가 있다고 한다면, 식 (2.19)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta L}{\Delta \dot{q}_j} - \frac{\Delta L}{\Delta q_j} = \tau_j \quad (2.21)$$

위의 식을 Euler-Lagrangian 방정식이라고 하며, 여기서 $L = K - V$ 는 Lagrangian이다. 또한 함수 V 는 포텐셜에너지 이다.

2.2 로봇 매니플레이터의 Lagrangian

위의 과정에서 시스템의 운동 에너지와 포텐셜 에너지의 차이인 Lagrangian을 구하면 물체의 Euler-Lagrange 방정식을 유도할 수 있다. 실질적으로 로봇 매니플레이터에 적용하기 위하여 강체의 운동에너지와 포텐셜에너지의 수식에 대한 유도 과정이 필요하다. 우선 어떤 물체의 운동에너지는 물체의 전 질량을 질량중심에 모아서 얻어지는 병진 에너지와 질량중심 주위의 물체의 회전 에너지의 합이며, 물체의 포텐셜에너지는 대상의 전 질량을 질량중심에 모았을 때 얻어지는 에너지와 같다. 이와 같이 매니플레이터 각 링크의 운동에너지와 포텐셜에너지의 합이 전체 매니플레이터의 합이 된다. 질점들의 연속체로 이루어진 물체를 가정할 때, 이 물체의 질량의 밀도를 ρ 로 나타내고, 물체 자체의 범위를 B 로 나타낸다면,

$$\int_B \rho(x, y, z) dx dy dz = m \quad (2.22)$$

위와 같고 이 때의 m 은 물체의 질량이다. 물체의 운동에너지는

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_B v^T(x, y, z) v(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz \\
&= \frac{1}{2} \int_B v^T(x, y, z) v(x, y, z) dm
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

으로 주어지고, 여기서 dm 은 좌표 (x, y, z) 에 있는 질점의 무한소질량을 나타낸다. 물체가 3차원 공간에서 어떤 운동을 하려면, 물체의 여러 다른 부위는 각기 다른 속도로 움직일 것이고, 이를 위해 모든 양들을 물체의 질량중심에 따라 나타낸다면, 그때의 물체의 질량중심은 아래의 정의된 좌표 (x_c, y_c, z_c) 와 같이 나타내어진다.

$$x_c = \frac{1}{m} \int_B x dm, \quad y_c = \frac{1}{m} \int_B y dm, \quad z_c = \frac{1}{m} \int_B z dm$$

이 식은 더욱 간결하게 표현될 수 있다. r_c 가 질량중심의 3차원 좌표벡터를 나타내고 r 이 물체상의 좌표벡터를 나타낸다고 한다면 그때의 r_c 는 아래와 같다.

$$r_c = \frac{1}{m} \int_B r dm \tag{2.24}$$

질량중심을 원점으로 하는 좌표축을 질량중심에 단단하게 붙었다고 가정한다면, 물체가 움직이면 물체 위의 한 점의 속도는

$$v = v_c + \omega \times r \tag{2.25}$$

윗 식은 관성 좌표계로 나타낸 질점의 속도 식이 된다. 그러나 이 식을 사용하여 같은 벡터를 운동 좌표계로 나타내어 계산할 수 있다. 변환은 벡터의 회전행렬을 곱해서 이루어진다. R 이 자유벡터를 운동 좌표 계에서 관성 좌표계로 변환하는 행렬이라고 하고, 그 때의 r 에 위치하는 질점의 속도를 왜대칭 행렬을 사용하여 운동 좌표계로 표현하면 다음과 같다.

$$R^T(v_c + \omega \times r) = R^T v_c + (R^T \omega \times R^T r) \tag{2.26}$$

식 (2.23)에서 운동에너지를 계산할 때 속도벡터는 어떤 좌표계로 나타내어도 동일하다. 이 점에서 식(2.25)의 모든 양을 강체에 부착된 운동 좌표계로 나타낼 수

있다. 따라서 벡터의 외적을 아래의 식처럼 벡터의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$v = v_c + S(\omega)r \quad (2.27)$$

여기서 $S(\omega)$ 는 왜대칭 행렬이다. 식 (2.27)을 식 (2.23)에 대입하면 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \frac{1}{2} \int_B [v_c + S(\omega)r]^T [v_c + S(\omega)r] dm \quad (2.28)$$

적분 안의 곱을 풀어쓰면 4개의 항이 된다. 그 중에서 2,3의 항은 상쇄되고 1,4항만 남게 된다. 그중 첫 번째 항은 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2} \int_B v_c^T v_c dm = \frac{1}{2} m v_c^T v_c \quad (2.29)$$

K 는 속도 v_c 로 움직이는 질량 m 의 운동에너지로서 운동에너지의 병진부(translational part)라 불린다. 두 번째 및 세 번째 항은 질량중심이 좌표 계의 원점에 있음을 상기할 때 0 이 된다. 마지막 항은

$$K_4 := \frac{1}{2} \int_B r^T S^T(\omega) S(\omega) r dm$$

윗 식에서 대각합 (Tr)을 사용하면,

$$K_4 := \frac{1}{2} \int_B Tr S(\omega) r r^T S^T(\omega) dm = \frac{1}{2} Tr S(\omega) J S^T(\omega) \quad (2.30)$$

여기서, $J = \int_B r r^T dm$

으로 정의되는 3×3 행렬이다. 윗 식에서 왜대칭 행렬 $S(\omega)$ 을 풀어서 식 (2.30)에 대입하고 세 행렬의 곱의 대각합을 계산하면 다음의 결과를 얻는다.

$$K_4 = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \quad (2.31)$$

여기서 I 는 3×3 관성행렬이다. 식 (2.31)은 운동에너지의 회전부(rotation part)이다. 따라서 물체의 전체 운동에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$K = \frac{1}{2}mv_c^T v_c + \frac{1}{2}\omega^T I \omega \quad (2.32)$$

위 식에서 첫 번째 항은 질량중심에 위치한 m 의 운동에너지이다. 물체가 회전운동을 하지 않을 때 이것이 운동에너지의 전부가 될 것이다. 두 번째 항은 물체가 병진운동뿐 만 아니라, 회전운동을 할 때 생기는 추가적 수정 항으로 중심을 벗어난 물체의 다른 부위들이 다른 속도로 움직인다는 사실을 설명한다. 여러 벡터들이 나타내어진 좌표계에 대해서 설명한다면, 우선 첫 번째 항 $v_c^T v_c$ 는 벡터 v_c 의 길이의 제곱이다. 좌표계가 바뀌면 단순히 회전 행렬을 곱하면 되고, 길이는 바뀌지 않으므로 곱은 벡터가 나타내어진 좌표계에 무관하다. 다음으로 운동에너지의 회전 부를 생각한다면, 이 때 어떤 좌표계에서 ω 와 관성행렬 I 를 연산하였는지가 문제가 된다. 그러나 삼중곱(triple product) $\omega^T I \omega$ 는 모든 좌표계에서 동일하다. 물체에 좌표계를 부착하면 관성행렬 I 는 물체의 운동과 무관하므로 이 좌표 계로 계산한다. 이때 각속도를 같은 좌표계로 계산할 필요가 있다.

ω_0 가 관성 좌표 계에서 나타낸 물체의 각속도라면 $R^T \omega_0$ 는 자신의 좌표계로 나타낸 대상물의 각속도이다. 이때 R 은 물체 좌표계의 벡터를 관성 좌표계로 바꾸는 회전행렬이다. n링크로 이루어진 매니퓰레이터에 관해서 위에서 유도된 식들을 대입할 수 있다. 링크 상의 임의의 점의 선속도와 각속도는 간단히 자코비안 행렬과 관절변수의 미분으로 나타낼 수 있다. 적절한 자코비안 행렬 J_{v_i} 와 J_{ω} 에 대해서

$$v_{ci} = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad \omega_i = R_i^T(q)J_{\omega}(q)\dot{q}$$

이고, 여기서 추가적인 행렬 R_i^T 는 각속도가 링크에 부착된 좌표계로 표현 되었음을 나타낸다. 링크 i 의 질량이 m_i 이고, 좌표계 i 에 나란한, 그러나 원점이 질량중심에 있는 좌표계를 중심으로 계산된 링크 i 의 관성행렬이 I_i 라고 한다면 식(2.32)에서

매니플레이터의 총 운동에너지는,

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=0}^n [m_i J_{v,i}(q)^T J_{v,i}(q) + J_{\omega}(q)^T R_i(q) I R_i^T(q) J_{\omega}(q)] \dot{q} \quad (2.33)$$

이다. 다시 말해 매니플레이터의 운동에너지는 다음과 같은 형태가 된다.

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (2.34)$$

여기서, $D(q)$ 는 통상 형상에 좌우되는 대칭인 양의 한정(symmetric positive definite)행렬인 관성행렬이다. 다음으로 포텐셜에너지 항을 고려한다면, 강체 동역학의 경우 하나뿐인 포텐셜에너지 원은 중력이다. 벡터 g 가 기준 좌표계로 나타낸 중력벡터라고 정의한다. 그러면 물체의 r 에 있는 무한소 질점의 포텐셜에너지는 $g^T r dm$ 이다. 따라서 총 포텐셜 에너지는 아래와 같다.

$$V = \int_B g^T r dm = g^T \int_B r dm = g^T r_c m \quad (2.35)$$

식 (2.33) 및 식 (2.25)에서 유도된 바와 같이 운동에너지는 다음과 같이 벡터 \dot{q} 의 2차 함수(quadratic function) 형태이다.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j := \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (2.36)$$

여기서 $n \times n$ 관성행렬 $D(q)$ 는 $q \in R^n$ 일 때 대칭이고 양의 한정이다. 이런 시스템의 Euler-Lagrange 방정식은 다음과 같이 이끌어 낼 수 있다.

$$L = K - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{\Delta \dot{q}_k} &= \sum_j d_{ij}(q) \dot{q}_j, \quad \frac{d}{dt} \frac{\Delta L}{\Delta \dot{q}_k} = \sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} d_{kj}(q) \dot{q}_j \\ &= \sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{이 때, } \frac{\Delta L}{\Delta q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\Delta d_{ij}}{\Delta q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\Delta V}{\Delta q_k} \quad (2.39)$$

따라서, Euler-Lagrange 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_j d_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_i} - \frac{1}{2} \frac{\Delta d_{ij}}{\Delta q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\Delta V}{\Delta q_k} = \tau_k \quad (2.40)$$

합의 순서를 바꾸고 대칭성을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_i} + \frac{\Delta d_{ki}}{\Delta q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.41)$$

따라서,

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_j} - \frac{1}{2} \frac{\Delta d_{ij}}{\Delta q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_i} + \frac{\Delta d_{ki}}{\Delta q_j} - \frac{\Delta d_{ij}}{\Delta q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.42)$$

우측의 식을 Christoffel 기호라 한다. 고정된 k 에 대하여 $c_{ijk} = c_{jik}$ 의 형태를 가진다. 마지막으로 포텐셜에너지 항인

$$\Phi_k = \frac{\Delta V}{\Delta q_k} \quad (2.43)$$

를 정의하면 Euler-Lagrange 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i \dot{q}_j + \Phi_k(q) = \tau_k, \quad k=1, \dots, n \quad (2.44)$$

윗 식에는 세 종류의 항이 있다. 첫 번째 항은 일반화 좌표의 2차 미분을 포함한다. 두 번째 항은 계수가 q 에 좌우될 수 있는 q 의 1차 미분의 2차 항들이다. 이 항들은 다음의 두 종류로 구분될 수 있다. 곱의 꼴 \dot{q}_i^2 을 가지는 원심력(centrifugal force)항과 $i \neq j$ 일 때 곱의 꼴을 $\dot{q}_i \dot{q}_j$ 가지는 Coriolis항이다. 세 번째 항은 q 만 가지고 미분 꼴을 가지지 않는 항으로서 포텐셜에너지를 미분하여 구해지는 항이다. 식(2.44)를 간략하게 표현하면 다음과 같다.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \Phi(q) = \tau \quad (2.45)$$

이때 위의 행렬 $C(q, \dot{q})$ 의 k, j 번째 요소는 아래와 같이 정의된다.

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta d_{kj}}{\Delta q_i} + \frac{\Delta d_{ki}}{\Delta q_j} - \frac{\Delta d_{ij}}{\Delta q_k} \right\} \dot{q}_i$$

2.3 이족 보행 로봇의 실제 모델 방정식의 유도

이족 보행로봇을 구성하는 다리는 Fig.2.2 및 Fig.2.3에 나타난 바와 같이 기본적으로 발목, 무릎 및 힙의 회전관절로 구성되어 있는 일반적인 3자유도 산업용 스칼라 로봇 매니퓰레이터와 같은 연쇄적인 구조이다. 전방보행에 대하여 균형관절을 포함한 7 자유도 형태에 대하여 지지부 발목의 기저 좌표계에 대한 이족보행로봇의 동역학적 모델링 및 운동 방정식을 구하기 위한 각 링크의 기구학적 위치는 아래와 같다.

$$M_{X_1} = l_{c1} \cos q_1$$

$$M_{Y_1} = l_{c1} \sin q_1$$

$$M_{X_2} = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos q_{12}$$

$$M_{Y_2} = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin q_{12}$$

$$M_{X_3} = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_{12} + l_{c3} \cos q_{123}$$

$$M_{Y_3} = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_{12} + l_{c3} \sin q_{123}$$

$$M_{X_4} = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_{12} + l_3 \cos q_{123} + l_{c4} \cos q_{1234}$$

$$M_{Y_4} = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_{12} + l_3 \sin q_{123} + l_{c4} \sin q_{1234}$$

$$M_{X_5} = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_{12} + l_3 \cos q_{123} + l_4 \cos q_{1234} + l_{c5} \cos q_{12345}$$

$$M_{Y_5} = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_{12} + l_3 \sin q_{123} + l_4 \sin q_{1234} + l_{c5} \sin q_{12345}$$

$$\begin{aligned}
M_{x_6} &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_{12} + l_3 \cos q_{123} + l_4 \cos q_{1234} + l_5 \cos q_{12345} + l_{c6} \cos q_{123456} \\
M_{y_6} &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_{12} + l_3 \sin q_{123} + l_4 \sin q_{1234} + l_5 \sin q_{12345} + l_{c6} \sin q_{123456} \\
M_{x_7} &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_{12} + l_3 \cos q_{123} + l_{c7} \cos q_{1237} \\
M_{y_7} &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_{12} + l_3 \sin q_{123} + l_{c7} \sin q_{1237}
\end{aligned}$$

여기서, M_{x_i}, M_{y_i} 는 기저 좌표 계를 기준으로 한 각 링크 i 의 질량 중심으로서, 각 링크에 대해서 상대적인 위치로 표현되었고, $q_{1234567} = \sum_{i=1}^7 q_i$ 을 의미한다. 다리는 지지부 및 운동부로 구분될 수 있다.

우선적으로 지지부 다리는 Fig.2.3에서의 $O_1 \sim O_3$ 로서 이에 대한 파라미터는 다음과 같이 정의된다.

- l_1 : 발목에서 무릎까지의 길이
- l_{c1} : 발목 좌표계(O_1)에서 l_1 상의 무게중심 거리
- l_2 : 무릎에서 힙까지의 길이
- l_{c2} : 무릎 좌표계(O_2)에서 l_2 상의 무게중심 거리
- l_3 : 힙에서 상부 균형 관절까지의 길이
- l_{c3} : 힙 좌표계(O_3)에서 l_3 의 무게중심 거리

다음으로 운동부 다리는 지지부의 골반(O_3)에서 Z 축으로 평행하게 운동부의 골반(O_4)으로 연결되어 있으며 $O_4 \sim O_6$ 가 이에 포함된다. 파라미터에 관하여,

- l_4 : 힙에서 무릎까지의 길이
- l_{c4} : 힙 좌표계(O_4)에서 l_4 상의 무게중심 거리
- l_5 : 무릎에서 까지의 길이

l_{c5} : 무릎 좌표계(O_5)에서 l_5 상의 무게중심 거리

l_{c6} : 발목 좌표계(O_5)에서 발꿈치 방향의 무게중심 거리

그리고 지지부 다리에서 연결된 상부 균형관절(O_7)에 대한 파라미터에서,

l_{c7} : 상부 펜듈럼 좌표계(O_7)에서 상단방향의 무게중심 거리

2.3.1 자코비안

로봇의 관절 변수가 주어졌을 때, 말단 장치인 발바닥의 위치와 방향은 Fig.2.2와 같이 Denavit-Hartenberg (D-H) 규약에 의해 정의된 좌표계를 이용하여 결정한다.

D - H 규약은 4개의 기본 변환 행렬의 곱으로 각 관절의 동차 변환 행렬 A_i 로 표현하는 것이다. 즉,

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,l_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & l_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & l_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서, l_i 는 각 관절의 링크 길이 (length), α_i 는 비틀림 (twist), d_i 는 오프셋(offset), θ_i 는 각도 (angle)이다. Fig.2.2에 의해 설정된 매개 변수는 Table 2.1과 같다.

Table 2.1 이족보행 로봇 하체의 링크 매개 변수

링크	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	-90°	0	θ_3
4	l_4	0	0	θ_4

관성 좌표계에 대한 말단 장치의 위치와 방향은 다음과 같이 주어진다.

$$T_0^n(q) = A_1(q_1), \dots, A_n(q_n) \quad (2.46)$$

$$= \begin{bmatrix} R_0^n(q) & d_0^n(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n=1, \dots, 7$$

여기서, $q = (q_1, \dots, q_7)^T$ 는 관절변수의 벡터이다. 말단장치 좌표계로부터 기저 좌표계로의 변환을 나타내면, 이족 로봇이 움직임에 따라 관절변수 q_i 와 말단장치 위치 벡터 d_0^n 와 방향 R_0^n 는 시간의 함수가 된다. 여러 개의 링크로 연결되어 있는 이족 로봇의 보행 시 각각의 링크는 각기 다른 선속도와 각속도를 가진다. 따라서 말단장치의 선속도와 각속도를 기저 좌표계에 대한 관절속도의 벡터 $\dot{q}(t)$ 와 연관 지어야 한다.

X 및 Y 축에 대하여 각 링크의 위치를 d_0^n 로 표현한다면,

$$S(\omega_0^n) = \dot{R}_0^n (\dot{R}_0^n)^T \quad (2.47)$$

여기서 $S(\omega)$ 는 왜대칭 행렬이다. 위의 식이 각속도 벡터 ω_0^n 를 정의한다.

$$v_0^n = \dot{d}_0^n \quad (2.48)$$

위의 식이 말단장치의 선 속도를 나타내며, 다음의 관계를 구할 수 있다.

$$v_{ci} = J_{v_i}(q)\dot{q}, \quad \omega_i = R_i^T(q)J_{\omega_i}(q)\dot{q}, \quad i=1, \dots, 7 \quad (2.49)$$

여기서 $J_{v_i}, J_{\omega_i} \in R^{3 \times 7}$ 행렬로서 선속도 자코비안과 각속도 자코비안이다.

로봇의 관절은 전부 회전관절로 구성되어 있으므로 선속도 및 각속도를 포함하는 자코비안은 아래와 같이 정의된다.

$$J_i = \begin{bmatrix} z_i \times (O_n - O_i) \\ z_i \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 7 \quad (2.50)$$

여기서 $z_i \times (O_n - O_i)$ 부분이 선속도 자코비안 이며, z_i 는 각속도 자코비안이다. 또한 앞서 지적했듯이 각속도는 각 링크에 부착된 좌표계로 나타낼 필요가 있다. Fig.2.2 에서 보는 바와 같이 이족로봇의 각 관절은 회전관절로만 구성되어있고 각 관절 좌표계의 Z 축들이 같은 방향이므로 각속도 자코비안은 아래와 같이 동일하다.

$$J_{\omega_i} = [0 \quad 0 \quad 1]^T, \quad i=1, \dots, 7 \quad (2.51)$$

위에서 나타내어진 인체형 15자유도 이족 보행 로봇에 대한 각 링크의 질량중심길이를 각각의 관절 각으로 편 미분하여 구해진 선속도 자코비안은 아래와 같이 정의된다.

행렬에서 각 행은 다음과 같다.

$$J_{v_c1} = \begin{bmatrix} -l_{c1}S_{q1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{c1}C_{q1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_c2} = \begin{bmatrix} -l_1S_{q1} - l_{c2}S_{q12} & -l_{c2}S_{q12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1C_{q1} + l_{c2}C_{q12} & l_{c2}C_{q12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{v_c3} = \begin{bmatrix} -l_1S_{q1} - l_2S_{q12} - l_{c3}S_{q123} & -l_2S_{q12} - l_{c3}S_{q123} & -l_{c3}S_{q123} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1C_{q1} + l_2C_{q12} + l_{c3}C_{q123} & l_2C_{q12} + l_{c3}C_{q123} & l_{c3}C_{q123} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

J_{v_c4} 행렬에서 각 행은 다음과 같다.

$$J_{v_c4}(1) = [-l_1S_{q1} - l_2S_{q12} - l_4S_{q1234}, -l_2S_{q12} - l_4S_{q1234},$$

$$-l_4S_{q1234}, -l_4S_{q1234} - l_{c5}S_{q1234}, 0, 0, 0]$$

$$J_{v_c4}(2) = [l_1C_{q1} + l_2C_{q12} + l_4C_{q1234}, l_2C_{q12} + l_4C_{q1234},$$

$$l_4C_{q1234}, l_4C_{q1234} + l_{c5}C_{q1234}, 0, 0, 0]$$

$$J_{v_c4}(3) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

J_{v_c5} 행렬에서 각 행은 다음과 같다.

$$J_{v_c5}(1) = [-l_1S_{q1} - l_2S_{q12} - l_4S_{q1234} - l_{c5}S_{q12345}, -l_2S_{q12} - l_4S_{q1234} - l_{c5}S_{q12345},$$

$$-l_4S_{q1234} - l_{c5}S_{q12345}, -l_4S_{q1234} - l_{c5}S_{q1234}, -l_{c5}S_{q12345}, 0, 0]$$

$$J_{v_c5}(2) = [l_1C_{q1} + l_2C_{q12} + l_4C_{q1234} + l_{c5}C_{q12345}, l_2C_{q12} + l_4C_{q1234} + l_{c5}C_{q12345},$$

$$l_4C_{q1234} + l_{c5}C_{q12345}, l_4C_{q1234} + l_{c5}C_{q1234}, l_{c5}C_{q12345}, 0, 0]$$

$$J_{v_c5}(3) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

J_{v_c6} 행렬에서 각 행은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
J_{v_c6}(1) &= [-l_1 S_{q1} - l_2 S_{q12} - l_4 S_{q1234} - l_5 S_{q12345} - l_{c6} S_{q123456}, -l_2 S_{q12} - l_4 S_{q1234} \\
&\quad - l_5 S_{q12345} - l_{c6} S_{q123456}, -l_4 S_{q1234} - l_5 S_{q12345} - l_{c6} S_{q123456}, -l_4 S_{q1234} \\
&\quad - l_5 S_{q1234} - l_{c6} S_{q123456}, -l_5 S_{q12345} - l_{c6} S_{q123456}, -l_{c6} S_{q123456}, 0] \\
J_{v_c6}(2) &= [l_1 C_{q1} + l_2 C_{q12} + l_4 C_{q1234} + l_5 C_{q12345} + l_{c6} C_{q123456}, l_2 C_{q12} + l_4 C_{q1234} \\
&\quad + l_5 C_{q12345} + l_{c6} C_{q123456}, l_4 C_{q1234} + l_5 C_{q12345} + l_{c6} C_{q123456}, l_4 C_{q1234} \\
&\quad + l_5 C_{q1234} + l_{c6} C_{q123456}, l_5 C_{q12345} + l_{c6} C_{q123456}, +l_{c6} C_{q123456}, 0] \\
J_{v_c6}(3) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]
\end{aligned}$$

J_{v_c7} 행렬에서 각 행은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
J_{v_c7}(1) &= [-l_1 S_{q1} - l_2 S_{q12} - l_3 S_{q123} - l_{c7} S_{q1237}, -l_2 S_{q12} - l_3 S_{q123} - l_{c7} S_{q1237}, \\
&\quad -l_3 S_{q1237} - l_{c7} S_{q1237}, 0, 0, -l_{c7} S_{q1237}] \\
J_{v_c7}(2) &= [l_1 C_{q1} + l_2 C_{q12} + l_3 C_{q123} + l_{c7} C_{q1237}, l_2 C_{q12} + l_3 C_{q123} + l_{c7} C_{q1237}, \\
&\quad l_3 C_{q123} + l_{c7} C_{q1237}, 0, 0, 0, l_{c7} C_{q1237}] \\
J_{v_c7}(3) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]
\end{aligned}$$

여기서, $C_{q1,\dots,7} = \sum_{i=1}^7 \cos_i$, $S_{q1,\dots,7} = \sum_{i=1}^7 \sin_i$, 을 의미한다.

2.3.2 관성행렬

이족보행로봇의 각 링크에 대한 선속도 및 각속도 자코비안을 위에 나타내었다. 동역학 방정식을 유도하기 위해서는 식 (2.33)에 나타나 바와 같이 통상 형상에 좌우되는 대칭인 양의 한정행렬인 관성행렬 $D(q)$ 를 구해야 한다. 관성행렬의 구성요소 중에서 선속도를 포함하는 부분은 단지 질량과 선속도 자코비안의 이중곱으로 구성되지만, 각속도를 포함하는 부분에서는 각속도를 각 링크에 부착된 좌표계로 나타내어야 한다. 그러나 이족 로봇 관절구성은 전부 회전관절로 구성되어있으므로 모든 축의 방향은 동일하다. 또한 ϖ_i 는 k 방향이므로 삼중곱

$\bar{\omega}_i^T I \bar{\omega}_i$, $i=1, \dots, 7$ 는 단순히 관성모멘트와 각속도 크기의 제곱임을 알 수 있다.

식(2.33)의 내용에 따라 곱을 수행하고,

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ 을 쓰면, 전체 시스템에 있어서 관성행렬을 구할 수 있다.

단, 여기서는 관성행렬의 일부분인 지지부의 발목에 있어서 발목을 기준 좌표로 상대적 관성행렬을 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 D_{11} = & m_1 l_{c1} + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} C_{q2}) + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 C_{q2} + 2l_2 l_{c3} C_{q3} + 2l_1 l_{c3} C_{q23}) \\
 & + m_4 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c4}^2 + 2l_1 l_2 C_{q2} + 2l_1 l_{c4} C_{q234} + 2l_2 l_{c4} C_{q34}) \\
 & + m_5 (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + l_{c5}^2 + 2l_1 l_2 C_{q2} + 2l_1 l_4 C_{q234} + 2l_1 l_{c5} C_{q2345} + 2l_2 l_4 C_{q34} + 2l_2 l_{c5} C_{q345} \\
 & + 2l_4 l_{c5} C_{q5}) \\
 & + m_6 (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_{c6}^2 + 2l_1 l_2 C_{q2} + 2l_1 l_4 C_{q234} + 2l_1 l_5 C_{q2345} + 2l_1 l_{c6} C_{q23456} \\
 & + 2l_2 l_4 C_{q345} + 2l_2 l_5 C_{q345} + 2l_2 l_{c6} C_{q3456} + 2l_4 l_5 C_{q5} + 2l_4 l_{c6} C_{q56} + 2l_5 l_{c6} C_{q6}) \\
 & + m_7 (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + l_{c7}^2 + 2l_1 l_2 C_{q2} + 2l_1 l_3 C_{q23} + 2l_1 l_{c7} C_{q237} + 2l_1 l_{c7} C_{q237} + 2l_2 l_3 C_{q3} \\
 & + 2l_2 l_{c7} C_{q37} + 2l_3 l_{c7} C_{q7}) \\
 & + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} = & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} C_{q2}) + m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2 + l_1 l_2 C_{q2} + l_1 l_{c3} C_{q23} + 2l_2 l_{c3} C_{q3}) \\
 & + m_4 (l_2^2 + l_{c4}^2 + l_1 l_2 C_{q2} + l_1 l_{c4} C_{q234} + 2l_2 l_{c4} C_{q34}) \\
 & + m_5 (l_2^2 + l_4^2 + l_{c5}^2 + l_1 l_2 C_{q2} + l_1 l_4 C_{q234} + l_1 l_{c5} C_{q2345} + 2l_2 l_4 C_{q34} + 2l_2 l_{c5} C_{q345} \\
 & + 2l_4 l_{c5} C_{q5}) \\
 & + m_6 (l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_{c6}^2 + l_1 l_2 C_{q2} + l_1 l_4 C_{q234} + l_1 l_5 C_{q2345} + l_1 l_{c6} C_{q23456} + 2l_2 l_4 C_{q345} \\
 & + 2l_2 l_5 C_{q345} + 2l_2 l_{c6} C_{q3456} + 2l_4 l_5 C_{q5} + 2l_4 l_{c6} C_{q56} + 2l_5 l_{c6} C_{q6}) \\
 & + m_7 (l_2^2 + l_3^2 + l_{c7}^2 + l_1 l_2 C_{q2} + l_1 l_3 C_{q23} + l_1 l_{c7} C_{q237} + 2l_2 l_3 C_{q3} + 2l_2 l_{c7} C_{q37} + 2l_3 l_{c7} C_{q7}) \\
 & + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 \\
 = & D_{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13} &= m_3(l_{c3}^2 + l_1 l_{c3} C_{q_{23}} + l_2 l_{c3} C_{q_3}) + m_4(l_{c4}^2 + l_1 l_{c4} C_{q_{234}} + l_2 l_{c4} C_{q_{34}}) \\
&\quad + m_5(l_4^2 + l_{c5}^2 + l_1 l_4 C_{q_{234}} + l_1 l_{c5} C_{q_{2345}} + 2l_2 l_4 C_{q_{34}} + 2l_2 l_{c5} C_{q_{345}} + 2l_4 l_{c5} C_{q_5}) \\
&\quad + m_6(l_4^2 + l_5^2 + l_{c6}^2 + l_1 l_4 C_{q_{234}} + l_1 l_5 C_{q_{2345}} + l_1 l_{c6} C_{q_{23456}} + 2l_2 l_4 C_{q_{345}} \\
&\quad + 2l_2 l_5 C_{q_{345}} + 2l_2 l_{c6} C_{q_{3456}} + 2l_4 l_5 C_{q_5} + 2l_4 l_{c6} C_{q_{56}} + 2l_5 l_{c6} C_{q_6}) \\
&\quad + m_7(l_3^2 + l_{c7}^2 + l_1 l_2 C_{q_2} + l_1 l_3 C_{q_{23}} + l_1 l_{c7} C_{q_{237}} + l_2 l_3 C_{q_3} + l_2 l_{c7} C_{q_{37}} + 2l_3 l_{c7} C_{q_7}) \\
&\quad + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 \\
&= D_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{14} &= m_4(l_{c4}^2 + l_1 l_{c4} C_{q_{234}} + l_2 l_{c4} C_{q_{34}}) \\
&\quad + m_5(l_4^2 + l_{c5}^2 + l_1 l_4 C_{q_{234}} + l_1 l_{c5} C_{q_{2345}} + 2l_2 l_4 C_{q_{34}} + 2l_2 l_{c5} C_{q_{345}} + 2l_4 l_{c5} C_{q_5}) \\
&\quad + m_6(l_4^2 + l_5^2 + l_{c6}^2 + l_1 l_4 C_{q_{234}} + l_1 l_5 C_{q_{2345}} + l_1 l_{c6} C_{q_{23456}} + 2l_2 l_4 C_{q_{345}} \\
&\quad + 2l_2 l_5 C_{q_{345}} + 2l_2 l_{c6} C_{q_{3456}} + 2l_4 l_5 C_{q_5} + 2l_4 l_{c6} C_{q_{56}} + 2l_5 l_{c6} C_{q_6}) \\
&\quad + I_4 + I_5 + I_6 \\
&= D_{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{15} &= m_5(l_{c5}^2 + l_{c5} C_{q_{2345}} + l_2 l_{c5} C_{q_{345}} + l_4 l_{c5} C_{q_5}) \\
&\quad + m_6(l_5^2 + l_{c6}^2 + l_1 l_5 C_{q_{2345}} + l_1 l_{c6} C_{q_{23456}} + l_2 l_5 C_{q_{345}} + l_2 l_{c6} C_{q_{3456}} + l_4 l_5 C_{q_5} \\
&\quad + l_4 l_{c6} C_{q_{56}} + 2l_5 l_{c6} C_{q_6}) \\
&\quad + I_5 + I_6 \\
&= D_{51}
\end{aligned}$$

$$D_{16} = m_6(l_{c6}^2 + l_1 l_5 C_{q_{23456}} + l_2 l_{c6} C_{q_{3456}} + l_4 l_{c6} C_{q_{56}} + 2l_5 l_{c6} C_{q_6}) + I_6 = D_{61}$$

$$D_{17} = m_7(l_{c7}^2 + l_1 l_{c7} C_{q_{237}} + l_2 l_{c7} C_{q_{37}} + l_3 l_{c7} C_{q_7}) + I_7 = D_{71}$$

2.3.3 Christoffel 항

Christoffel 항은 식 (2.42)에서처럼 곱의 꼴 \ddot{q}_i 을 가지는 원심력 항과 $i \neq j$ 일 때 곱의 꼴 $\dot{q}_i \dot{q}_j$ 을 가지는 Coriolis 항으로 구성되며 위에서 구해진 관성행렬 $D(q)$ 를 각 링크의 관절 각 q_i 로 편미분해서 구해진다. 다시 말하면 이족보행로봇이 움직일 경우 로봇을 구성하는 여러 링크부분이 서로 연결되어 같거나 혹은 다른 방향으로

운동할 때 발생하는 간섭력 항을 포함한다. 여기서는 지지부의 발목에 있어서 부분적인 Chrostoffel 항을 나타내었다.

$$C_{111} = \frac{1}{2} \frac{\Delta D_{11}}{\Delta q_1} = 0$$

$$\begin{aligned} C_{121} &= -m_2 l_{c2} S_{q_2} - m_3 (l_{12} S_{q_2} + l_{1c3} S_{q_{23}}) - m_4 (l_{12} S_{q_2} + l_{1c4} S_{q_{234}}) \\ &\quad - m_5 (l_{12} S_{q_2} + l_{14} S_{q_{234}} + l_{1c5} S_{q_{2345}}) \\ &\quad - m_6 (l_{12} S_{q_2} + l_{14} S_{q_{234}} + l_{15} S_{q_{2345}} + l_{1c6} S_{q_{23456}}) \\ &\quad - m_7 (l_{12} S_{q_2} + l_{13} S_{q_{23}} + l_{1c7} S_{q_{237}}) \\ &= C_{211} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{131} &= -m_3 (l_{1c3} S_{q_{23}} + l_{2c3} S_{q_3}) - m_4 (l_{1c4} S_{q_{234}} + l_{2c4} S_{q_{34}}) \\ &\quad - m_5 (l_{14} S_{q_{234}} + l_{1c5} S_{q_{2345}} + l_{24} S_{q_{34}} + l_{2c5} S_{q_{345}}) \\ &\quad - m_6 (l_{14} S_{q_{234}} + l_{15} S_{q_{2345}} + l_{1c6} S_{q_{23456}} + l_{24} S_{q_{34}} + l_{25} S_{q_{345}} + l_{2c6} S_{q_{3456}}) \\ &\quad - m_7 (l_{13} S_{q_{23}} + l_{1c7} S_{q_{237}} + l_{23} S_{q_3} + l_{2c7} S_{q_{37}}) \\ &= C_{311} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{141} &= -m_4 (l_{1c4} S_{q_{234}} + l_{2c4} S_{q_{34}}) \\ &\quad - m_5 (l_{14} S_{q_{234}} + l_{1c5} S_{q_{2345}} + l_{24} S_{q_{34}} + l_{2c5} S_{q_{345}}) \\ &\quad - m_6 (l_{14} S_{q_{234}} + l_{15} S_{q_{2345}} + l_{1c6} S_{q_{23456}} + l_{24} S_{q_{34}} + l_{25} S_{q_{345}} + l_{2c6} S_{q_{3456}}) \\ &= C_{411} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{151} &= -m_5 (l_{1c5} S_{q_{2345}} + l_{2c5} S_{q_{345}} + l_{4c5} S_{q_5}) \\ &\quad - m_6 (l_{15} S_{q_{2345}} + l_{1c6} S_{q_{23456}} + l_{25} S_{q_{345}} + l_{2c6} S_{q_{3456}} + l_{45} S_{q_5} + l_{4c6} S_{q_{56}}) \\ &= C_{511} \end{aligned}$$

$$C_{161} = -m_6 (l_{1c6} S_{q_{23456}} + l_{2c6} S_{q_{3456}} + l_{4c6} S_{q_{56}} + l_{5c6} S_{q_6}) = C_{611}$$

$$C_{171} = -m_7 (l_{1c7} S_{q_{237}} + l_{2c7} S_{q_{37}} + l_{3c7} S_{q_7}) = C_{711}$$

2.3.4 포텐셜 에너지

이 보행로봇의 전방 보행형태를 7개의 링크로 연결된 매니퓰레이터로 가정한다면

매니플레이터의 포텐셜에너지는 단순히 7개의 링크 포텐셜에너지의 합이다. 각 링크에 대해서 포텐셜에너지는 질량곱하기 중력가속도 곱하기 질량중심의 높이이다. 다시 말하면 물체의 총 포텐셜에너지는 대상물의 전 질량이 질량중심에 모였을 때와 같다. 구해진 총 포텐셜에너지를 각 링크의 관절변수에 대하여 식 (2.43)에서와 같이 편 미분하면 Euler-Lagrange 방정식에 포함되는 포텐셜에너지 항을 구할 수 있다. 구한 매니플레이터의 포텐셜에너지는 벡터 q 에 좌우되고 \dot{q} 에 좌우되지 않는다. 구한 각 링크의 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & (m_1gl_{c1} + m_2gl_1 + m_3gl_1 + m_5gl_1 + m_6gl_1 + m_7gl_1)C_{q1} \\ & + (m_2gl_{c2} + m_3gl_2 + m_5gl_2 + m_4gl_2 + m_6gl_2 + m_7gl_2)C_{q12} \\ & + (m_3gl_{c3} + m_7gl_{c7})C_{q123} + (m_4gl_{c4} + m_5gl_4 + m_6gl_5 + m_6gl_6)C_{q1234} \\ & + (m_5gl_{c5} + m_6gl_5)C_{q12345} + m_6gl_{c6}C_{q123456} + m_7gl_{c7}C_{q1237}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & (m_2gl_{c2} + m_3gl_2 + m_5gl_2 + m_4gl_2 + m_6gl_2 + m_7gl_2)C_{q12} \\ & + (m_3gl_{c3} + m_7gl_{c7})C_{q123} + (m_4gl_{c4} + m_5gl_4 + m_6gl_5 + m_6gl_6)C_{q1234} \\ & + (m_5gl_{c5} + m_6gl_5)C_{q12345} + m_6gl_{c6}C_{q123456} + m_7gl_{c7}C_{q1237}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & (m_3gl_{c3} + m_7gl_{c7})C_{q123} + (m_4gl_{c4} + m_5gl_4 + m_6gl_5 + m_6gl_6)C_{q1234} \\ & + (m_5gl_{c5} + m_6gl_5)C_{q12345} + m_6gl_{c6}C_{q123456} + m_7gl_{c7}C_{q1237}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & (m_4gl_{c4} + m_5gl_4 + m_6gl_5 + m_6gl_6)C_{q1234} + (m_5gl_{c5} + m_6gl_5)C_{q12345} \\ & + m_6gl_{c6}C_{q123456}\end{aligned}$$

$$\Phi_5 = (m_5gl_{c5} + m_6gl_5)C_{q12345} + m_6gl_{c6}C_{q123456}$$

$$\Phi_6 = m_6gl_{c6}C_{q123456}$$

$$\Phi_7 = m_7gl_{c7}C_{q1237}$$

2.4 회전 관절 공간에서의 동역학 모델링

2.4.1 Closed-Form 동역학 방정식

제안된 시스템에 대한 회전관절 공간의 동역학 방정식을 유도하기 위하여 전방보행에 대한 각 회전관절 부분의 제어입력인 토크 입력 τ_1, \dots, τ_7 이 각 관절에 주어진다. 동역학 방정식은 Euler-Lagrange 방정식을 사용하였으며 앞서 유도되었던 관성행렬 및 Christoffel 기호와 포텐셜에너지 항을 대입하면 Euler-Lagrange 방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_j d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \Phi_k(q) = \tau_k, \quad k=1, \dots, 7 \quad (2.52)$$

윗 식의 첫 번째 항은 일반화 좌표의 2차 미분을 포함하는 양의 한정 행렬인 관성행렬이다. 두 번째 항은 계수가 q 에 좌우될 수 있는 q 의 1차 미분의 2차 항들로서 원심력 및 Coriolis 항으로 구분된다. 이 부분은 다 관절의 로봇이 움직일 때 로봇을 구성하는 각 링크에 대한 다른 링크 부분의 간섭력 항을 포함한다. 세 번째 항은 q 만 가지고 미분 꼴을 가지지 않는 항으로서 포텐셜에너지를 미분하여 구해지는 항이다. 이 항은 토크 입력이 없을 경우 이족 보행 로봇에 작용하는 유일한 외력으로 간주된다. 위의 7 자유도에 관한 Euler-Lagrange 방정식에 대해 관성행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \Phi(q) = \tau$$

여기서, $D(q) \in R^{7 \times 7}$, $C(q, \dot{q}) \in R^{7 \times 7}$, $\Phi(q) \in R^{7 \times 1}$ 이다.

2.5 미끄럼 관절 공간에서의 동역학 모델링

2.5.1 사절 링크 기구를 이용한 각 관절의 모델링

발목 관절, 무릎 관절 및 허리 관절에서 회전운동을 직선운동으로 변환하는 사절링크 구조는 Fig. 2.5 도식화 할 수 있다.

Fig.2.5의 사절 링크에서 $l_i (i=1,2,3)$ 에 대한 코사인법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$l_i = a_{i2}^2 + d_i^2 - 2a_{i2}d_i \cos \alpha_i = a_{i3}^2 + a_{i4}^2 - 2a_{i3}a_{i4} \cos \beta_i$$

$$d_i = \frac{C_i + [C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (2.53)$$

$i=1$ 이면 발목 관절, $i=2$ 이면 무릎 관절, $i=3$ 이면 허리 관절이며 식 (2.53) 에서

$$A_i = a_{i3}^2 + a_{i4}^2 - a_{i2}^2$$

$$B_i = -2a_{i3}a_{i4}$$

$$C_i = 2a_{i2} \cos \alpha_i$$

이다. 그리고 링크 길이 a_{i2}, a_{i3}, a_{i4} 와 링크 각 α_i 는 고정된 값이다. 식 (2.53) 의 미끄럼 변위를 시간에 관해 미분하면 다음과 같이 속도 및 가속도를 구할 수 있다.

$$\dot{d}_i = -[C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{-\frac{1}{2}} B_i \sin \beta_i \dot{\beta}_i \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \ddot{d}_i = & -2[C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{-\frac{3}{2}} B_i^2 \sin^2 \beta_i \dot{\beta}_i^2 \\ & - [C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{-\frac{1}{2}} (B_i \cos \beta_i \dot{\beta}_i^2 + B_i \sin \beta_i \ddot{\beta}_i) \end{aligned} \quad (2.55)$$

회전각 β_i 와 d_i 의 속도 및 가속도 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\beta_i = a \cos \left[\frac{d_i^2 - A_i - C_i d_i}{B_i} \right] \quad (2.56)$$

$$\dot{\beta}_i = R_{i1} \dot{d}_i \quad (2.57)$$

$$\ddot{\beta}_i = R_{i2} \dot{d}_i^2 + R_{i3} \ddot{d}_i \quad (2.58)$$

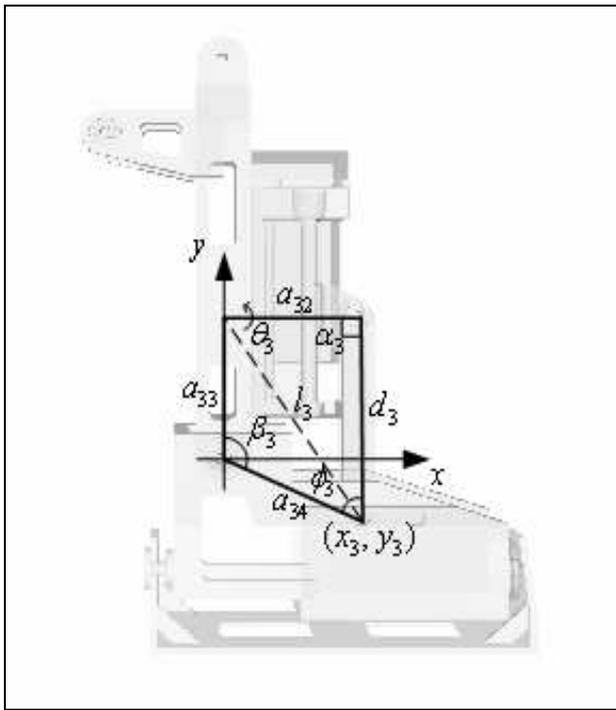
식 (2.57) 와 (2.58) 에서

$$R_{i1} = \frac{[C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{\frac{1}{2}}}{B_i \sin \beta_i}$$

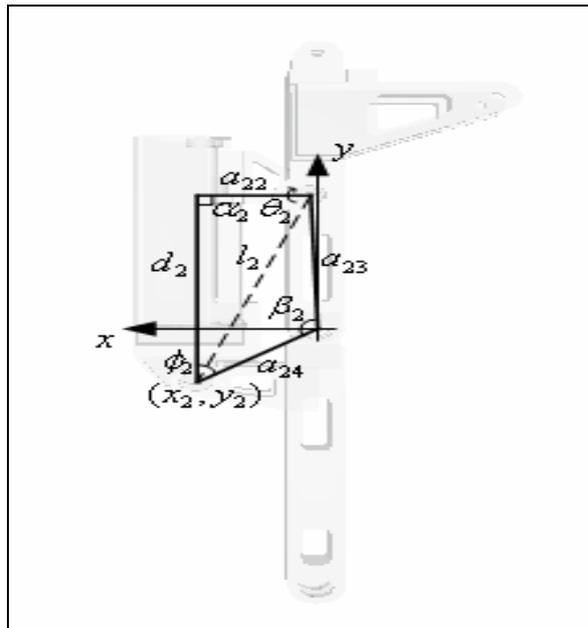
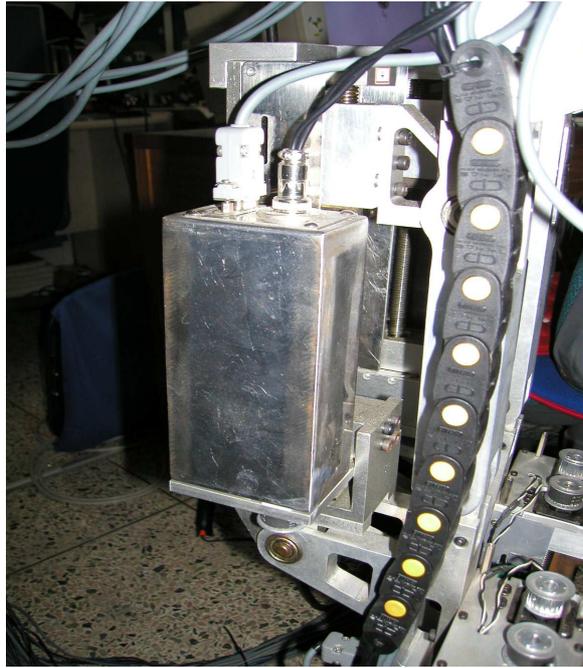
$$R_{i2} = -2[C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{-1} B_i \sin \beta_i R_{i1}^2 + \frac{\cos \beta_i}{\sin \beta_i} R_{i1}^2$$

$$R_{i3} = -\frac{[C_i^2 + 4(A_i + B_i \cos \beta_i)]^{\frac{1}{2}}}{B_i \sin \beta_i}$$

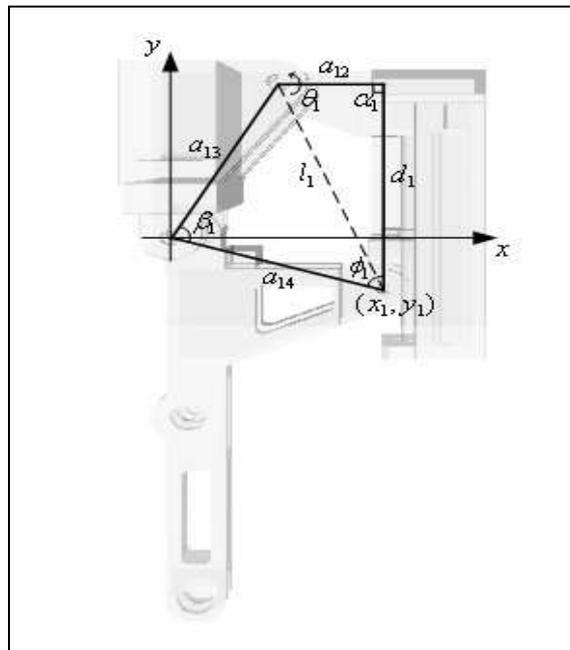
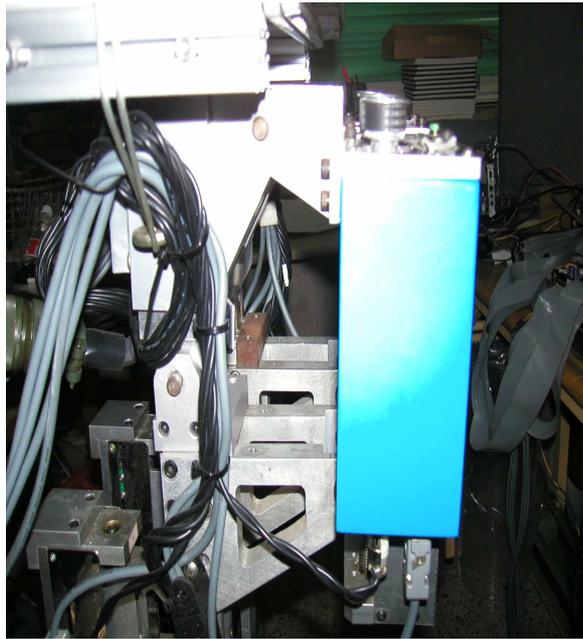
이다.



(a) 발목 관절의 형상 모델링



(b) 무릎 관절의 형상 모델링



(c) 허리 관절의 형상 모델링

Fig. 2.5 각 관절의 형상 모델링

2.5.2 미끄럼 관절 공간에서의 제어 입력

제어입력의 형태도 관절구동을 위한 토크 입력을 볼 나사 구동방향에 대한 힘의 입력으로 변환한다. 즉, 앞서 회전관절공간의 운동방정식에서의 회전 관절에 발생하는 토크 τ 를 볼 나사의 직선운동에 의한 직선운동 방향의 구동력 F 의 관계로 정립하고자 한다. 회전관절 공간의 제어입력인 토크 τ_i 는 $i=1, \dots, 6$ 일 때, 각 관절공간 상의 좌표계에서 발생한다. 직선운동 방향의 구동력 F 에 대한 관계식을 유도하기 위해 각각의 볼 나사의 미끄럼 방향에 수직인 법선을 그렸을 때, 이 법선 길이와 볼 나사에 가해지는 구동력 F 의 곱이 각 관절에서 발생하는 토크 τ 가 된다. 단, O_7 인 상부 균형관절은 직접적으로 토크 입력을 받는다.

발목관절, 무릎 관절 및 허리 관절 에 작용하는 토크 τ_i ($i=1,2,3$)와 사절기구의 구동원인 볼 나사의 제어입력 F_i 사이의 관계식을 유도한다. Fig.2.4 에 표시된 바와 같이 4절 링크의 회전부분에 임의의 좌표 (X_i, Y_i) 에 대한 평행사변형의 원리를 이용하여 다음 식을 정리할 수 있다.

$$d_i \cos(\psi_i + N_i) + a_{i2} \cos \theta_i = a_{i4} \cos N_i - a_{i3} \cos(\beta_i - N_i) = C_i \quad (2.60)$$

$$d_i \sin(\psi_i + N_i) - a_{i2} \sin \theta_i = a_{i4} \sin N_i + a_{i3} \sin(\beta_i - N_i) = D_i \quad (2.61)$$

여기서, i 는 허리 관절($i=1$), 무릎 관절($i=2$), 발목 관절($i=3$)이다.

식 (2.60)에서 아래의 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_i &= d_i \cos \psi_i \cos N_i - d_i \sin \psi_i \sin N_i + a_{i2} \cos(\pi - N_i) \{ \cos \alpha_i \cos \psi_i \\ &\quad - \sin \alpha_i \sin \psi_i \} + a_{i2} \sin(\pi - N_i) \{ \sin \alpha_i \cos \psi_i + \cos \alpha_i \sin \psi_i \} \\ &= A_i \cos \psi_i - B_i \sin \psi_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

여기서,

$$A_i = S_i + U_i \cos \phi_i + V_i \sin \phi_i, B_i = T_i + U_i \sin \phi_i - V_i \cos \phi_i$$

또한, 위의 정의에 사용된 기호는 다음과 같다.

$$S_i = d_i \cos N_i, T_i = d_i \sin N_i \\ U_i = a_{i2} \cos(\pi - N_i), V_i = a_{i2} \sin(\pi - N_i)$$

다음으로 식 (2.61)에서 아래의 식을 유도할 수 있다.

$$D_i = d_i \sin \psi_i \cos N_i + d_i \cos \psi_i \sin N_i - a_{i2} \sin(\pi - N_i) \{ \cos \alpha_i \cos \psi_i \\ - \sin \alpha_i \sin \psi_i \} + a_{i2} \cos(\pi - N_i) \{ \sin \alpha_i \cos \psi_i + \cos \alpha_i \sin \psi_i \} \\ = A_i \sin \psi_i + B_i \cos \psi_i \quad (2.63)$$

식 (2.65)에 사용된 기호는 식 (2.62)에서 정의된 것과 동일하다. 앞서 유도된 두 식을 사용하여 발목 좌표계에서 볼 나사 미끄럼 방향에 수직인 법선의 길이는 다음과 같이 유도된다.

$$\psi_i = a \tan \left(\frac{A_i D_i - B_i C_i}{A_i C_i + B_i D_i} \right), L_i = a_{i4} \times \cos \psi_i \quad (2.64)$$

따라서 발목에 있어서 회전 관절공간 운동방정식에서의 회전관절에 발생하는 토크 τ_i 를 볼 나사의 직선운동에 의한 직선운동 방향의 구동력 F_i 의 관계로 유도할 수 있다.

$$\tau_i = F_i \times L_i = F_i \times a_{i4} \cos \psi_i \quad (2.65)$$

2.5.3 미끄럼 관절 공간의 동역학 방정식

본 논문에서 제작한 이족 보행 로봇은 사절 링크구조에서 회전링크의 한 변을 볼 나사를 사용하여 직선운동으로 대체함으로써 볼 나사의 길이변화에 의한 서로 연결된 다른 링크의 회전각을 변환시키고 궁극적으로 로봇 다리의 회전축을 구동한다.

유도된 발목, 무릎 및 힙의 회전관절 각의 변위 q_i 와 볼나사 길이 방향의 미끄럼 변위 d_i 의 관계식을 회전관절구조에서의 Euler-Lagrange 방정식에 대입함에 따라서 식 (2. 52)의 관절각 변위 $[q_1, \dots, q_7]$ 가 $[d_1, \dots, d_6, q_7]$ 인 미끄럼 변위로 대체되었다. 또한 제어입력에 대하여 식 (2. 65)처럼 관절구동을 위한 토크 입력을 볼 나사 구동방향에 대한 힘의 입력으로 변환하였다. 즉, 회전관절 공간과 미끄럼 관절공간의 관계식과 토크 τ_i 와 구동력 F_i 관계를 이용하여 7 자유도에 관한 회전 관절공간의 Euler-Lagrange 방정식인 식(2. 52)을 다음의 미끄럼 관절공간의 식으로 표현하였다. 단, 여기서 균형관절인 q_7 의 경우 회전관절이므로 회전관절 변위 및 토크 제어입력을 그대로 사용한다.

$$H(d)\ddot{d} + Q(d, \dot{d})\dot{d} + h_f(d) = LF \quad (2.66)$$

여기서, $i, j = 1, \dots, 6$ 일 때

$$H(d)_{ij} = D(d)_{ij} R_{3i}(d), \quad Q(d, \dot{d})_{ij} = C(d, \dot{d}) + H(d)R_{1j}(d)\dot{d}_j$$

$$L_i = l_4 \cos \psi_i$$

단, l_4 는 지지부 다리의 발목, 무릎 및 힙 등의 관절 좌표계 순서 ($O_1 \sim O_6$)에서 $a_{14}, a_{24}, a_{34}, \dots$ 임을 말한다.

제 3 장 슬라이딩 모드 제어기 설계 및 시뮬레이션

3.1 시뮬레이션의 조건

이족보행로봇의 보행을 구현하기 위해서, 본 논문에서는 보행 동작 중 한발 지지 상태의 동역학 해석을 수행하였다. 이를 통해 앞서 유도되었던 Pitch 운동을 하는 7 자유도의 운동방정식의 특성을 살펴보기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다.

본 시뮬레이션에서는 유도된 운동 방정식이 매우 비선형적이고, 질량이나 관성모멘트 등의 파라미터가 매우 불확실하여 슬라이딩 모드 제어를 적용하여 경로제어를 수행하였다.

외력 F_i 는 가하지 않고 중력항만을 고려했으며 지면에 대한 반발력은 고려하지 않았다. 지지부 다리의 발목에 기저 좌표계가 설치된 전방보행에 있어, 각 관절의 움직임이 한계조건을 넘어서면 멈추도록 설정되어있다. 각 관절의 회전 범위의 한계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 45^\circ < q_1 < 90^\circ, & \quad 45^\circ < q_6 < 90^\circ \quad (\text{발목}) \\ 0^\circ < q_2 < 90^\circ, & \quad -90^\circ < q_5 < 0^\circ \quad (\text{무릎}) \\ -45^\circ < q_3 < 25^\circ, & \quad 155^\circ < q_4 < 225^\circ \quad (\text{허리}) \\ -150^\circ < q_7 < 150^\circ & \quad (\text{균형관절}) \end{aligned}$$

이러한 보행의 움직임 형태는 사람의 전방보행에 있어서 몸의 자중을 전방으로 향하고 자신의 보폭을 자신의 발바닥의 크기 정도로 하고 걸을 때의 형상과 흡사한 형태이다. 이족 로봇의 모델링에 사용된 물성치는 아래의 Table 3.1 과 같다.

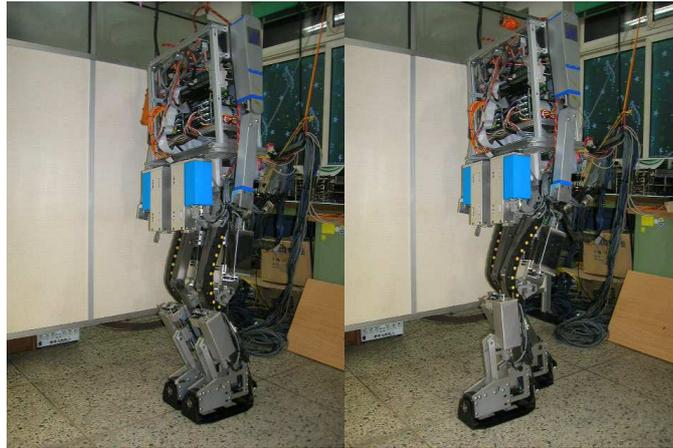


Fig.3. 1 각 관절의 회전 범위 내의 이족 로봇 형태

Table 3.1 이족 보행 로봇의 물성치

구분	길이[mm]	질량[kg]	관성 행렬[kg·mm ²]
Shank	350	1.3718	15130
Shank C.O.M	176.72	1.3718	15130
Thigh	350	1.2438	13120
Thigh C.O.M	161.22	1.2438	13120
Hip	250	1.7118	14658
Hip C.O.M	127.23	1.7118	14658
Pendulum	107.24	1.5118	16800
Swing Foot	30.23	0.7118	4658
Total		10.8774	107274

여기서 C.O.M(Center of mass)은 질량중심까지의 길이이다.

다음으로 각 회전관절의 초기 회전각을 다음과 같이 두었을 때, 자중에 의한 불
나사 길이 및 관절 각의 운동변화를 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 q_1 = 60^\circ, q_6 = 50^\circ & \quad (\text{발목}) \\
 q_2 = 60^\circ, q_5 = -60^\circ & \quad (\text{무릎}) \\
 q_3 = -30^\circ, q_4 = 120^\circ & \quad (\text{허리}) \\
 q_7 = 0^\circ & \quad (\text{균형관절})
 \end{aligned}$$

위의 다리 형상은 Fig.3.2와 같이 상체를 조금 숙인 기마 자세의 형상로서 실제 사람의 직립 보행 형태와 유사하다. 이것은 두발 지지단계에서 한발 지지단계를 거치면서 반복되는 걸음 형상에 있어 순간적으로 지지하는 다리의 발바닥이 그리는 폐곡선 안에 몸 전체의 움직임에 대한 모멘트 평형 점을 두기 위함이다. 위와 같은 초기형태를 정하고 전방보행에 관한 시뮬레이션을 실행하였다. 단, 각 관절부위에 외력 F_i 는 가하지 않고 중력항만을 고려했을 때의 시뮬레이션이므로 결과적으로 이족 로봇의 움직임은 서있는 자세에서 주저앉는 자세로 변화하게 될 것이다. 또한 지면에 대한 반발력은 고려하지 않았기 때문에 지지부 다리의 발바닥이 지면에 고정되고 운동부의 발목은 단순히 매니퓰레이터의 말단장치와 같이 구속조건이 없고 다만 관절 각의 한계범위 내에서 움직이게 될 것이다.



Fig.3.2 이족 보행 로봇의 보행 초기 형태

3.2 슬라이딩 모드 제어기 설계

식(2.74)에서 볼나사 공간의 운동 방정식으로 변환된 이족 로봇 시스템은 일반적인 관절 형태의 로봇에 볼나사 구조가 포함되어 시스템의 질량이나 관성과 같은 변수들의 계측이 어렵고, 마찰력 등이 작용하여 시스템의 비선형성이 증가한다. 이러한 시스템의 경로 제어를 위하여 Fig.3.3과 같이 슬라이딩 모드제어를 적용하였다.

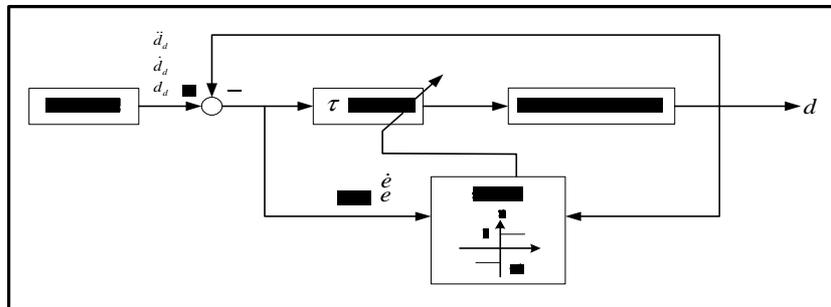


Fig.3.3 슬라이딩 모드 제어기의 블럭도

슬라이딩 모드의 구성은 다음과 같다.

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (3.1)$$

여기서, 추정오차 $e = d - d_r$ 이고, d_r 는 원하는 회전각에 대한 볼나사의 이동경로이다.

그리고 $s = \dot{e} + \lambda e$ 에서 $s = \dot{d} - \dot{d}_d$ 로 두면, $\dot{d}_d = \dot{d}_r - \lambda \dot{d}$ 이다.

슬라이딩 모드 제어기의 안정도는 Lyapunov 함수 후보를 보면 알 수 있다. Lyapunov 함수 후보를 고려 할 때 $V > 0$, $\dot{V} < 0$ 이어야 안정(점근적 안정)하다.

따라서

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (3.2)$$

라 두면 $V > 0$ 이 된다.

$$\dot{V} = s^T (\ddot{d} - \ddot{d}_d) \quad (3.3)$$

에서는 $\dot{V} < 0$ 이어야 한다.

$s = \dot{e} + \lambda e$ 일 때 $\dot{s} = \ddot{e} + \lambda \dot{e}$ 이 되고

식(3.3)에서 식(3.4)를 대입하여 풀면,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T (\ddot{d} - \ddot{d}_d) \\ &= s^T (H^{-1}(-Q(d, \dot{d})\dot{d} - \Phi(d) + \tau) + \hat{H}^{-1}(\hat{Q}\dot{d}_d + \hat{\Phi}(d) - \hat{\tau})) \\ &= s^T (-H^{-1}Q(d, \dot{d})\dot{d} - H^{-1}\Phi(d) + H^{-1}\tau + \hat{H}^{-1}\hat{Q}\dot{d}_d + \hat{H}^{-1}\hat{\Phi}(d) - \hat{H}^{-1}\hat{\tau}) \\ &= s^T (\tilde{H}\ddot{d}_d + \tilde{Q}\dot{d}_d + \tilde{\Phi} - k \cdot \text{sgn}(s)) \\ &\leq -k |s| \text{sgn}(s) + |s| (\tilde{H} |\ddot{d}_d| + \tilde{Q} |\dot{d}_d| + \tilde{\Phi}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

이 과정에서 제어 입력은

$$\tau = \hat{\tau} - k \cdot \text{sgn}(s) \quad (3.5)$$

여기서,

$$\hat{\tau} = \hat{H}\ddot{d}_d + \hat{Q}\dot{d}_d + \hat{\Phi} \quad (3.6)$$

$$\text{sgn}(s) = +1 (s > 0),$$

$$-1 (s < 0)$$

여기서, 추정치 오차 $\dot{d}_r = \dot{d}_d - \lambda e$, $\tilde{H} = \hat{H} - H$, $\tilde{Q} = \hat{Q} - Q$, $\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} - \Phi$ 이고,

$$k_i = \left| \left[\tilde{H}\ddot{d}_r + \tilde{Q}\dot{d}_r + \tilde{\Phi} \right]_i \right| + \eta_i \quad (3.7)$$

이다.

3.3 시뮬레이션

본 시뮬레이션에서는 C언어를 이용하여 비선형 방정식을 4차 Runge-Kutta 방법으로 근사해를 구하였다.

여기서 원하는 볼나사의 이동경로 d_r 은 다음과 같이 정의된다. 이를 궤적으로 각 관절의 볼나사 길이가 구해지게 된다. 원하는 궤적 함수는 3차 방정식으로 식(3.8)과 같다.

$$d_r = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (3.8)$$

여기서,

$a_0 = q_0$, $a_1 = \dot{q}_0$, $a_2 = \frac{3(q_1 - q_0) - (2\dot{q}_0 + \dot{q}_1)t_f}{t_f^2}$, $a_3 = \frac{2(q_0 - q_1) + (\dot{q}_0 + \dot{q}_1)t_f}{t_f^3}$ 이고, q_0 는 초기 위치에서의 볼나사 길이이며, q_1 은 최종 위치에서의 볼나사의 길이이다. 그리고, t_f 는 로봇이 구동을 하여 최종 위치에 도달하는 시간이다. Table 3.2에서 각 항의 상수 값들을 나타내었다.

Table 3.2 궤적 함수의 상수 값

구분	q_0 [mm]	q_1 [mm]	t_f [sec]
허리 관절	185 mm	131 mm	5 sec
무릎 관절	295 mm	248 mm	5 sec
발목 관절	140 mm	209 mm	5 sec

각 관절의 질량과 관성 모멘트의 추정 오차를 20%로 설정하고 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다.

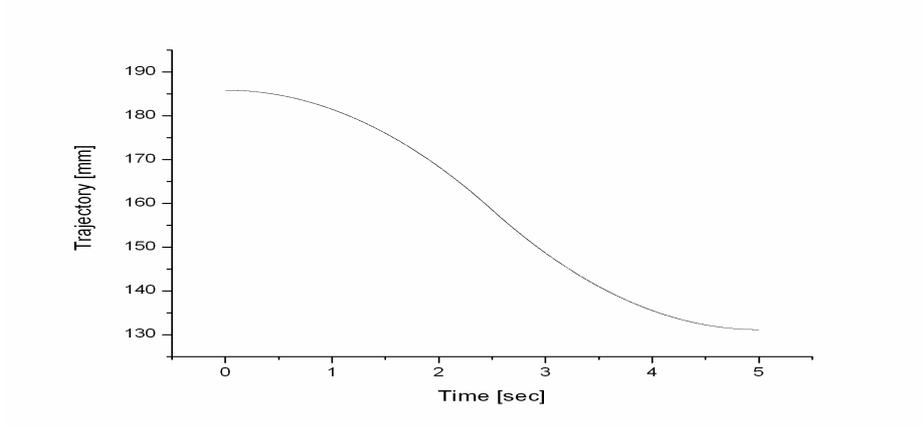


Fig.3.4 발목관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로의 비교

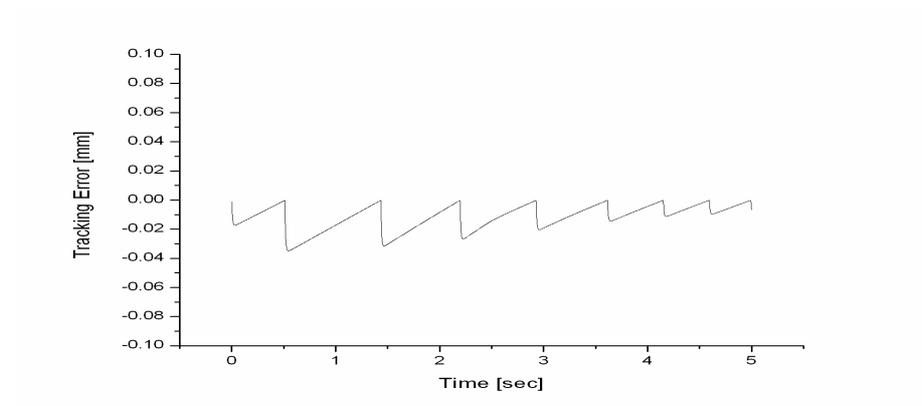


Fig.3.5 발목 관절의 추정 오차

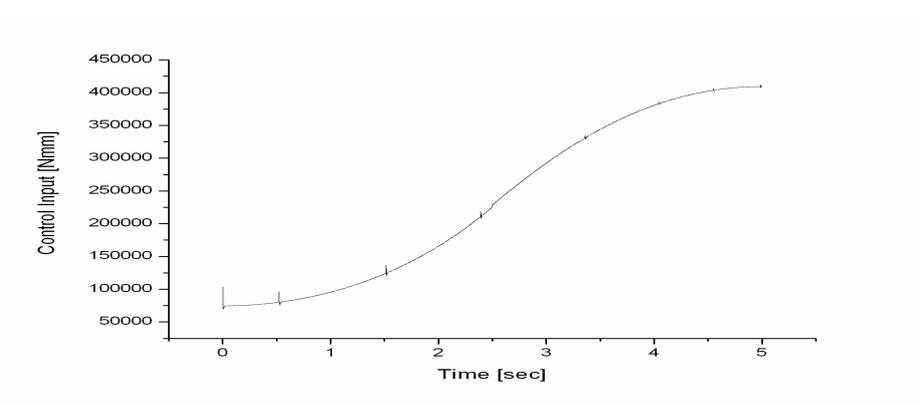


Fig.3.6 발목 관절의 제어 입력

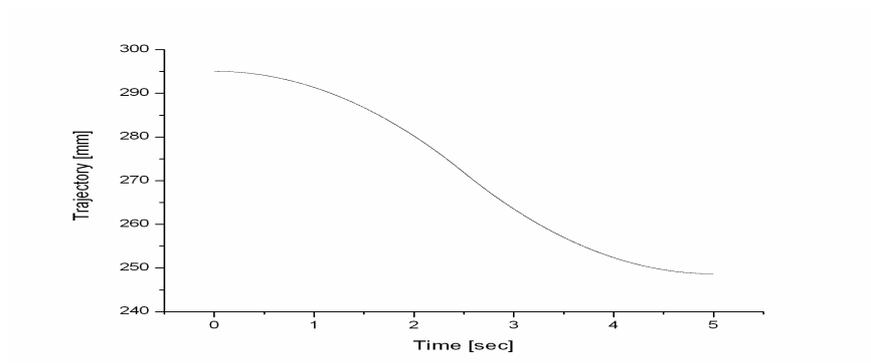


Fig.3.7 무릎 관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로의 비교

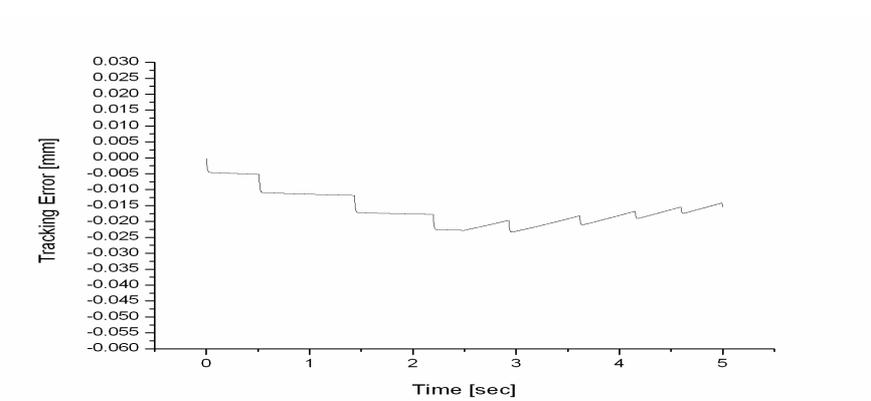


Fig.3.8 무릎 관절의 추정 오차

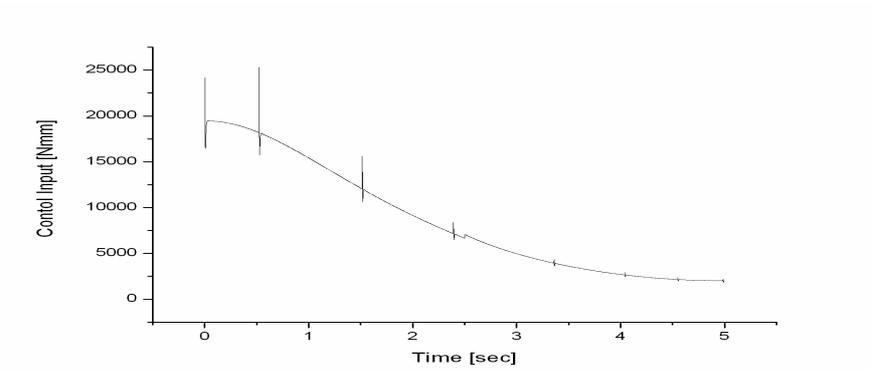


Fig.3.9 무릎 관절의 제어 입력

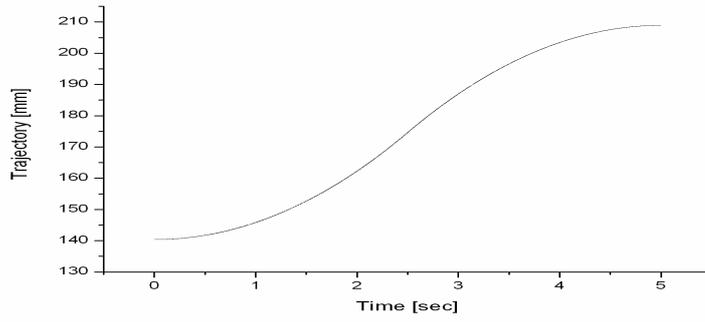


Fig.3.10 허리관절의 미끄럼 변위와 원하는 볼나사의 이동경로의 비교

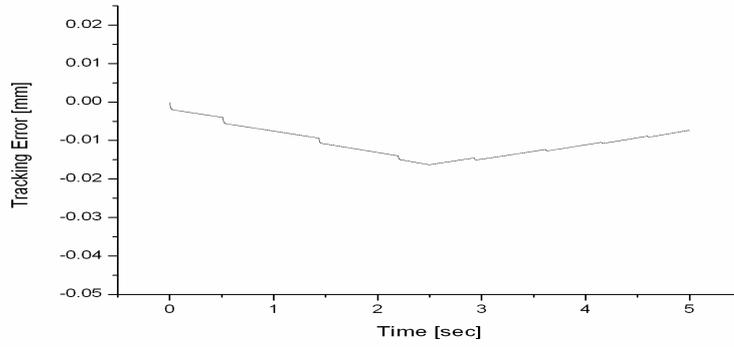


Fig.3.11 허리 관절의 추정 오차

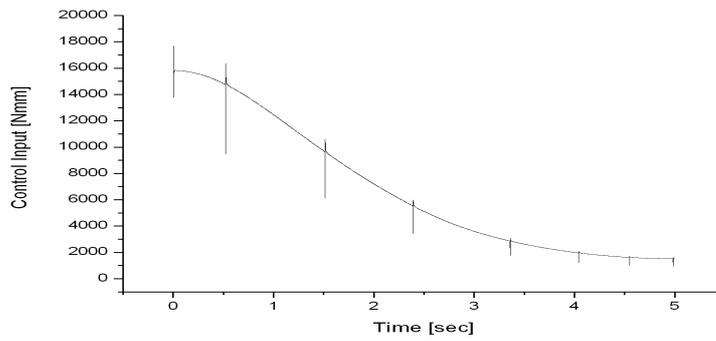


Fig.3.12 허리 관절의 제어 입력

슬라이딩 모드 제어기를 적용한 결과를 Fig.3.4에서 Fig.3.12까지 각 관절의 미끄럼 관절 공간에서의 변위 d 와 원하는 볼나사의 이동경로 d_r 과의 궤적 비교, 추정 오차 및 제어 입력을 나타내었다.

각 관절의 경로는 Fig.3.4, Fig.3.7, Fig.3.10에 나타내었으며 미끄럼 관절 공간에서의 변위 d 와 원하는 볼나사의 이동경로 d_r 의 궤적이 일치 하는 것을 알 수 있다.

그리고 추정 오차는 Fig.3.5, Fig.3.8, Fig.3.11에 나타내었으며, 각 관절에서 추정 오차 값이 줄어드는 경향을 보이며 추정 오차 역시 적음을 알 수 있다.

뿐만 아니라 제어 입력도 Fig.3.6, Fig.3.9, Fig.3.12에 나타난 바와 같이 추정 오차의 스위칭 부분에서 보상하기 위한 제어채터링(control chattering)이 발생한다.

Fig.3.4에서 Fig.3.12까지의 그림에서 나타난 바와 같이 식(2.66)의 미끄럼 관절 공간에서 유도된 비선형적 운동 방정식이나 질량이나 관성모멘트 등의 파라미터가 매우 불확실한 시스템에서 슬라이딩 모드 제어기를 적용하는 것이 적합하다는 것을 알 수 있으며 자율 이족 보행 로봇에 슬라이딩 모드 제어기를 적용하는 것이 적합한 것으로 나타났다.

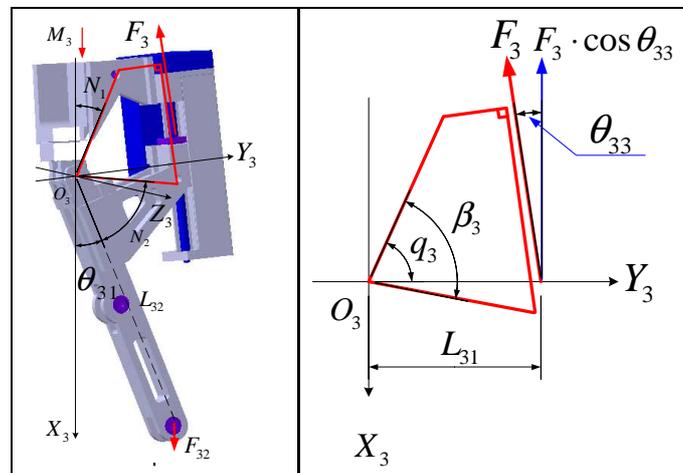
4. 자율 이족 보행 로봇의 구동기 해석

이 장에서 허리관절, 무릎관절, 발목관절의 보행시 유동적인 부하 토크를 구하는 일반적인 방정식을 구한다. 이 경우는 하나의 다리로 모든 하중을 지지한다는 조건에서 이루어졌으며, 몸체의 무게는 머리를 포함하여 몸체, 다리부분을 합쳐 83kg에 달한다.

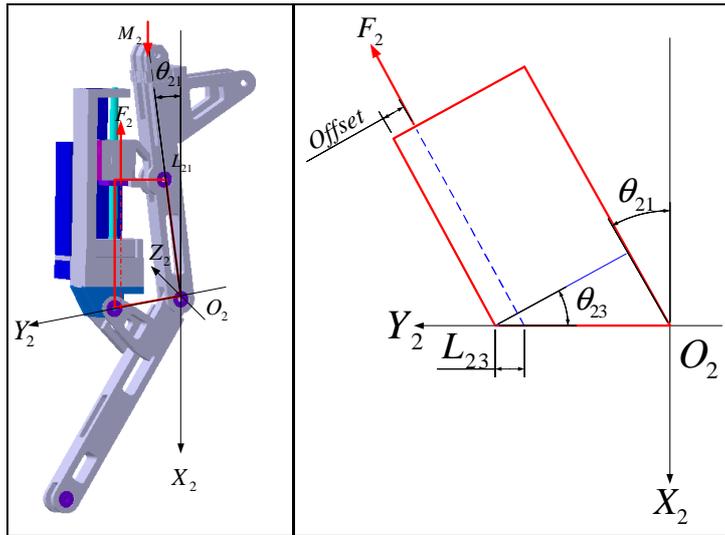
하지만, 허리 무릎, 발목이 기구적인 연쇄동작을 하므로 하나의 독립적인 구동이라고 보기엔 어렵다. 그래서 모든 관절이 동시에 구동하며, 보행 동작에 따른 각 관절의 부하 토크를 계산하여 선택된 모터의 적합성을 알아보려 한다.

4.1 각 관절 구동기의 동력 전달 형태

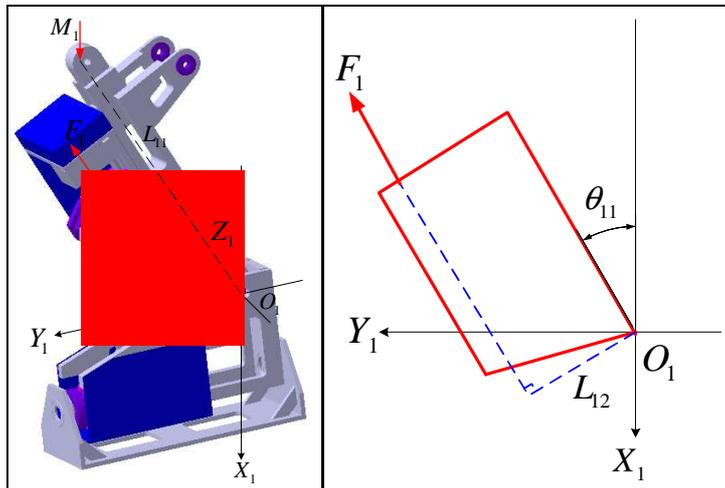
각 관절 구동기의 부하토크 방정식을 유도하기 위해 도식화 하면 Fig.4.1과 같다.



(a) 허리 관절의 구동기에 작용하는 부하 토크



(b) 무릎 관절의 구동기에 작용하는 부하 토크



(c) 발목 관절의 구동기에 작용하는 부하토크

Fig.4.1 각 관절 구동기에 작용하는 부하 토크

식 (2.53) 에서 β_i 가 변하면 볼 나사의 길이와 θ_{i1} 가 변하게 되므로 볼 나사 축 방향의 외력 F_i 의 크기가 변하게 된다. 회전 중심 O_i 에 대한 모멘트 합의 원리에서

외력에 대한 각 관절부의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_1 = \frac{M_1 \cdot L_{11} \cdot \sin \theta_{11}}{L_{12}} \quad (4.1)$$

$$F_2 = \frac{M_2 \cdot L_{21} \cdot \sin \theta_{21}}{L_{22} \cdot \sin(90^\circ - \theta_{23})} \quad (4.2)$$

$$F_3 = \frac{M_3 \cdot L_{32} \cdot \sin(\pi - (N_1 + N_2 + \beta))}{L_{31} \cdot \cos \theta_{33}} \quad (4.3)$$

여기서, M_i 는 한쪽 다리가 지면을 지지할 때의 자중으로 허리 관절에서는 70kgf, 무릎 관절에서는 75kgf, 발목 관절에서는 78kgf 이다. 그리고 L_{i1} 는 이족 로봇의 종아리와 허벅지 길이이다.

각 관절부의 볼 나사에 작용하는 축 방향의 부하 하중에 대한 토크를 계산하는 방정식은 다음과 같다.

$$\tau_{Motorload,i} = \frac{F_i \cdot l_b}{2\pi \cdot \eta} \cdot A \quad (4.4)$$

Table 4.1 각 관절의 부하토크에 대한 상수

구분	볼나사의 리드 l_b [mm]	볼나사의 효율 η [%]	감속비 A
발목 관절	2 mm	90%	1 : 5.8
무릎 관절	2 mm	90%	1 : 5.8
허리 관절	2 mm	90%	1 : 5.8

4.2 각 관절 구동기의 보행 패턴에 따른 부하토크

Fig.4.2에서 이족 보행 로봇이 구동을 함에 따라 각 관절에 작용하는 구동 토크가 변하게 되고 이에 따라 모터의 부하토크가 변하게 된다. 그리고 각 관절의 구동기는 독립적인 것이 아니므로 이족 보행 로봇이 보행 할 때의 부하토크를 구해야 한다.

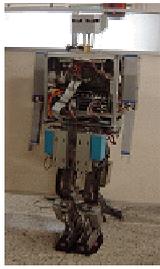
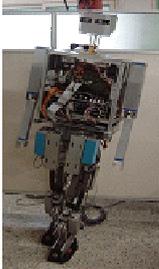
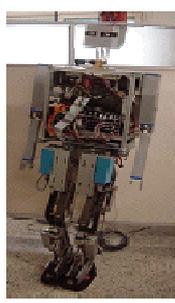
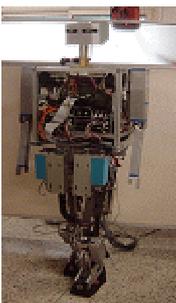
Steps	Walking posture	Steps	Walking posture	Steps	Walking posture
STEP 1		STEP 4		STEP 7	
STEP 2		STEP 5		STEP 8	
STEP 3		STEP 6		STEP 9	

Fig.4.2 이족 보행 로봇의 보행 패턴

로봇이 구동하여 각 보행마다 모터에 작용하는 부하 토크는 Fig.4.3에서 Fig.4.5까지 나타내었으며, C언어를 이용하여 식(4.4)에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다.

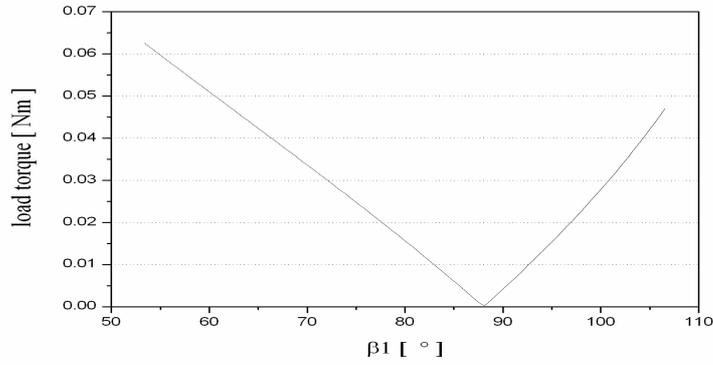


Fig.4.3 허리 관절 구동기에 작용하는 부하토크

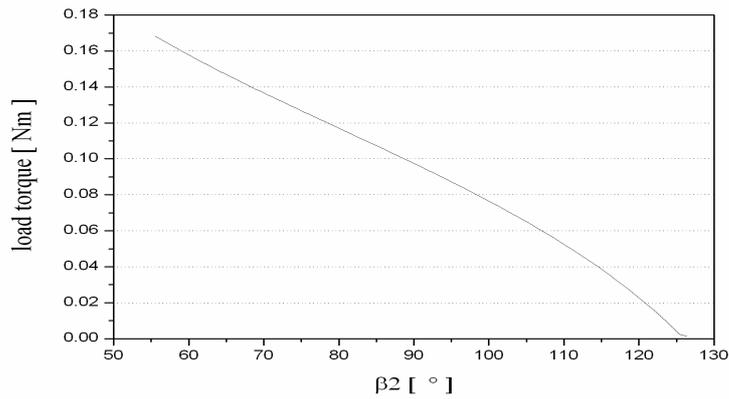


Fig.4.4 무릎 관절 구동기에 작용하는 부하 토크

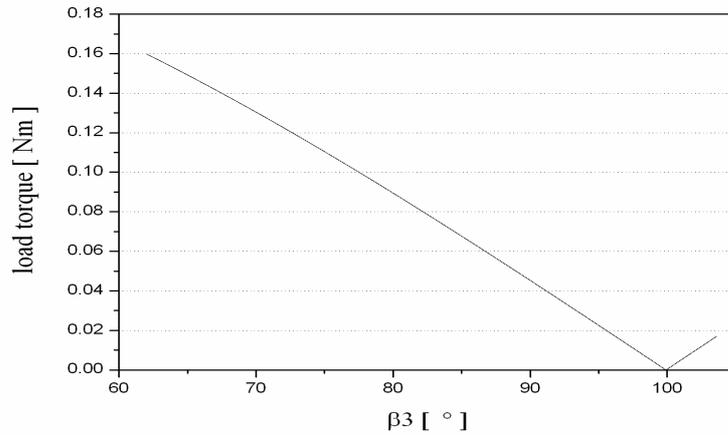


Fig.4.5 발목 관절 구동기에 작용하는 부하 토크

각 관절의 변위각 β 가 변할 경우 Fig.4.3에서 허리관절에서 작용하는 부하토크는 현재 사용중인 모터의 정격 토크보다 작으나, Fig.4.4와 Fig.4.5의 그림과 같이 무릎관절, 발목관절의 구동기에 작용하는 부하 토크가 모터의 정격 토크에 비해 부하 토크가 크게 작용하는 것으로 나타났다.

4.3 각 관절 구동기에서 적정 구동 모터 선택

기존의 이족 보행 로봇이 몸체와 팔 등의 부착과 자체 탑재한 배터리등의 자중 증가로 인하여 모터에 작용하는 부하 토크가 증가하므로써 모터의 기본 용량을 초과하게 되었다. Table 4.2은 현재 사용중인 소형 DC모터의 기본 사양이다.

Table 4.2 각 관절의 구동기에 사용되는 모터 사양

구분	구동 전원[V]	정격 토크[Nm]	최대 전류[A]	용량[W]
허리 관절 모터	15V	0.077Nm	4A	90W
무릎 관절 모터	15V	0.077Nm	4A	90W
발목 관절 모터	15V	0.077Nm	4A	90W

Table 4.2과 비교하여 각 관절 구동기에 작용하는 부하 토크는 모터의 정격 토크에 비해 크게 작용한다. Table 4.3은 모터의 토크 상수에 대한 전류비이며, 각 관절의 토크 상수를 나타내었다. 각 관절에서 작용하는 부하토크를 Table 4.3에서 주어진 토크 상수를 이용하여 각 관절에 공급되는 전류의 양을 계산하면 각 관절 구동기에 공급되는 전류량은 4A 이상인 것으로 나타났다.

Table 4.3 각 관절의 구동기에 사용되는 모터의 토크 상수

구분	허리 관절 모터	무릎 관절 모터	발목 관절 모터
토크 상수[Nm/A]	0.0194 Nm/A	0.0194 Nm/A	0.0194Nm/A

이런 경우 모터의 과잉 공급되는 전류로 인해 모터의 수명이 단축되고, 과잉 전류의 공급으로 배터리의 제작에 문제가 발생한다. 사용중인 모터의 경우 과잉 전류로 단시간 구동하는 것은 무리가 없으나 구동 실험에 있어 단시간의 구동 실험이 어려우므로 과잉 공급되는 전류로 인해 구동기의 모터에 문제가 발생한다.

이러한 문제를 해결하기 위해 보다 큰 용량의 모터가 요구된다. 현재 15자유도의 이족보행로봇에 사용하는 모터는 Table 4.2에 명시된 90W의 소형 DC 모터이므로 동일한 회사의 제품인 Table 4.4에 명시된 150W의 DC모터로 교체가 필요하다.

Table 4.4 동일 회사의 150W DC 모터 사양

구분	구동 전원[V]	정격 토크[Nm]	최대 전류[A]	용량[W]
허리 관절 모터	24V	0.181Nm	6A	150W
무릎 관절 모터	24V	0.181Nm	6A	150W
발목 관절 모터	24V	0.181Nm	6A	150W

5. 결론

본 연구에서는 토크와 안정성의 한계점을 극복하기 위하여 사절링크를 이용한 고강성, 높은 토크 변화율을 갖는 볼 나사를 이용하는 사절링크 구조의 관절 구동기를 채용한 인체형 15자유도 인체형 이족 자율보행로봇을 개발하였으나, 기존의 자체 개발된 이족 보행로봇의 관절 구동기를 정량화하고 모듈화하기 위한 구조 개선 설계 및 해석을 바탕으로 사절링크 구동기를 구조 개선하였다.

이러한 이족 보행 로봇이 가지는 기구학적, 물리적 운동특성을 고려하여 수학적 모델을 도출하였다. 제안된 이족 보행 로봇의 모델은 회전 관절공간 상의 해석 형태가 아니라 사절링크에 볼나사를 채용한 형태의 관절형태를 제안함에 따라 사절링크의 기구학 및 동역학 식을 이용하여 볼나사 구동의 미끄럼관절 공간상의 기구학 및 동역학 식으로 변환하였고, 회전공간의 제어입력인 토크도 미끄럼공간의 볼나사 구동력으로 변환하여 볼나사 공간의 운동방정식으로 변환하였다. 제안된 모델의 타당성을 검증하기 위하여 전방보행에 대한 피치운동을 하는 7 자유도의 운동방정식에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다. 이 시뮬레이션은 유도된 운동방정식이 매우 비선형적이고, 질량이나 관성모멘트 등의 파라미터가 매우 불확실함으로 슬라이딩 모드 제어를 적용하여 경로제어를 수행 함으로써 이족 보행 로봇의 제어기로서 불확실성이 많은 시스템에서 슬라이딩 모드 제어가 적합함을 알 수 있었다.

그러나 본 실험실에서 개발한 기존의 이족 로봇과는 달리 현재 개선된 형태의 자율 이족보행 로봇은 자중의 증가로 인해 현재 사용중인 DC모터보다 용량이 큰

DC모터의 교체 필요성을 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

향후 과제로 두 다리의 좌우방향 관절과 균형 관절에 대한 4 자유도의 운동방정식 모델링과 이에 맞게 좌우 방향 변환과 균형유지가 가능하며 인간의 보행 형태와 유사한 자율 이족 보행 로봇의 개발이 필요하다.

참고문헌

- [1] A.Takanishi, M.Ishida, Y.Yamazaki and I.Kato, "The Realization of Dynamic Walking by The Biped Walking Robot WL-10RD." Journal of the Robotics Society of Japan, Vol.3 No.4, pp.325~336, 1985.
- [2] F. Gubina, H. Hemami. and R. B. McGhee, "On the Dynamic Stability of Biped ocomotion", IEEE trans. on Biomd. Engineering, Vol, BME-21, pp. 102~108, 1974.
- [3] T. T. lee and J. Liao, "Trajectory Planning and Controlk of a 3-link Biped Robot", IEEE Robotics and Automation, pp. 820~823, 1988.
- [4] M. Cotsatis and C. Vibet, "Decoupled control for 2D N-link Biped Walking System", Robotics and Autonomous Systems 5 pp. 97~107, 1989.
- [5] J. Furusho and A. Sano, "Sensor-Based Control of a Nine-Link Biped." Int.J.Robot.Res., vol.9,No.2, pp.83~98, 1990
- [6] C. Leslie Golliday and Hooshang Hemami, "An Approach to Analyzing Biped Loco-motion Dynamics and Designing Robot Locomotion Controls." IEEE, Transactions on Automatic Control, vol.AC-22, No.6, pp.963~972, 1977.
- [7] T. Chang and Y. Hurmuzlu, "Sliding Control without Reaching Phase and its Application to Bipedal Locomotion", J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 447~455, 1993.
- [8] 박인규, 김진결, 김기식, " 이족 보행 로봇을 위한 슬라이딩 제어기 설계", 한국정밀공학회지 제18권 제5호(2001년 5월), pp. 137~146, 2001
- [9] Sun-Ho Lim and Jin-Geol Kim, "Biped Locomotion with Mechanical Compliance.", (In Korean) Korea Robotics and Automation Workshop Conference, pp.21~25, 1992.
- [10] Kawamura S. et al. "Realization of Biped Locomotion by Motion Pattern Learning.", (In Japanese) Journal of Robot Society of Japan

vol.3, No.3, pp.177~180, 1985.

- [11] Ching-Long Shin, "Analysis of the Dynamics of a Biped Robot with Seven Degrees of Freedom.", IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp.3008~3013, 1996.
- [12] 임선호, "이족보행로봇 IWR-III의 균형점 제어구현에 관한 연구.", 인하대학교 대학원 논문집, 1999
- [13] Kenneth J. Waldron, "Realization of Dynamic Biped Walking Stabilized with Trunk Motion Under Known External Force." Advanced Robotics, pp.299~310, 1989.
- [14] A. Takanishi, Y. Egusa, M. Tochizawa, M. Takeya, and I. Kato, "Realization of Dynamic Biped Walking Stabilized with Trunk Motion" RoManSy 7: Proc. Seventh CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, A.Morecki, G.Bianchi and KoJaworek, Eds.Hermes, Paris, pp.68~79, 1990.
- [15] Jin-ichi YAMAGUCHI, Astuo TAKANISHI, and Ichiro KATO, "Development of a Biped of a Biped Walking Robot Compensating for Three-axis Moment by Trunk Motion.", IEEE/RSJ Internal Conference on Intelligent Robots and System, pp.561~566, 1993.
- [16] M. Yamada, J. Furusho and A. Sano, "Dynamics Control of Walking Robot with Kick-Action.", ICAR, pp.405~412, 1985.
- [17] Eric R. Dunn and Robert D. Howe, "Toward Smooth Bipedal Walking.", IEEE, pp.2489~2494, 1994.
- [18] 노경관, 공정식, 김진걸, 김기식, " 유연한 보행 형태를 갖는 이족 보행 로봇의 걸음새 구현", 한국 정밀공학회지 제 19권 제 7호, pp. 43~50,2002
- [19] S. Kajita and K. Tani, "Experimental Study of Biped Dynamic Walking", IEEE Control System Magazine, Vol.16, No.1, pp.13~19, 1996.
- [20] Toshio Fukuda, Youichiron Komata and Takemasa Arakawa, "Recurrent Neural network with Self-adaptive Gas for Biped Locomotion Robot.", IEEE, pp.1710~1714, 1997.

- [21] Juen Hu, Jerry Pratt and Gill Pratt, "Adaptive Dynamic Control of a Bipedal Walking Robot with Radial Basis Function Neural Networks.", Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 400~405, 1998
- [22] K. Ohnishi, M. Shibata and T. Murakami, "Motion Control for Advanced Mechatronics.", IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol.1, No.1, pp.56~67, 1996.
- [23] K. Ohishi and M. Ohishi, "Robust and Easy Realization of Hybrid Control Based on H^∞ Velocity Controller.", Proc. of 26th International Symposium on Industrial Robots, Vol.1, pp.197~202, 1995.
- [24] Qinghua Li, Astuo Takanishi, and Ichiro Kato, "Learning Control for a Biped Walking Robot with a Trunk.", IEEE/RSJ Internal Conference on Intelligent Robots and System, pp.1771~1777, 1993.
- [25] 김창부, 조현석, "이족보행로봇의 궤적의 최적화 계획에 관한 연구", 한국정밀공학회지 제 15권 제 3호(1998년 3월), pp. 157~167, 1998
- [26] Jin'ichi Yamaguchi, Daisuke Nishino and Atsuo Takanishi, "Realization of Dynamic Biped Walking Varying Joint Stiffness Using Antagonistic Driven Joints.", International Conference on Robotics & Automation Proc. of IEEE, pp.2022~2029, 1998.
- [27] Kazuo Hirai, Masato Hirose, Yuji Haidawa and Toru Takenaka, "The Development of Honda Humanoid Robot.", International Conference on Robotics & Automation Proc. of IEEE, pp.1321~1326, 1998.
- [28] Hyeung-Sik Choi, Jung-Min Oh, Chang-Yeol Beak and Kyung-Sik Jung, "Development of a Biped Walking Robot Actuated by a Closed-Chain Mechanism.", ICASS 2003 , pp. 209~214, 2003

감사의 글

논문이 완성되기까지 여러 가지로 부족한 저를 항상 따뜻하고 세심한 배려로 지도 해주시고 이끌어주신 최형식교수님과 지도 교수님이신 유삼상교수님께 감사의 마음을 전합니다. 그리고 바쁘신 와중에도 논문 심사를 위해 많은 조언과 충고를 해주신 조종래교수님께도 감사의 마음을 전합니다.

실험실에 들어와 생활하면서 어렵고 힘들었지만 선배님과 후배님들의 도움으로 이런 자리에까지 왔습니다. 항상 만형처럼 후배들을 지도해주신 영식이형, 실험실에서 동고동락하며 공부하고 항상 저에게 신경을 써주신 용현이형, 저의 사수로서 회사에서 열심히 일하고 있는 호식이형, 따뜻하고 친형처럼 대해주신 대원이, 영국에서 열심히 공부하고 온 우리의 주치의 경식이형에게도 감사의 마음을 전합니다. 그리고 대학원 동기이며 항상 같이 배우고 서로 가르쳐준 정민이형, 유신, 정재, 많은 것을 가르쳐주지는 못해서 항상 미안한 실험실의 96학번 동기들 무경, 규득, 창만, 그리고 실험실 후배 주환, 석봉, 정호 실험실 막내 상준이에게도 감사의 마음을 전합니다.

정신적으로 육체적으로 지금까지 저를 믿고 지원해주신 부모님께 감사의 마음을 전합니다. 저에게 용기와 자신감을 심어주신 여러 친척 어른신, 잘해주지 못해 미안한 창현이에게도 감사의 마음을 전합니다. 의남매로 항상 즐거웠던 종식이형, 인선이 그리고 아르바이트를 하면서 친해진 민수형, 그리고 학교의 여러 친구들에게도 감사의 마음을 전합니다. 항상 미안하고 잘해주지 못한 사랑하는 선영이, 서울에서 실험실에 나름대로 공헌한 미화에게도 감사의 마음을 전합니다. 항상 바쁘다고 같이 모인 자리에 참석을 못해도 항상 변함없는 마음으로 저를 대해준 고등학교 동기들 재곤이, 승현이, 종수, 종신이, 우용이에게도 감사의 말을 전합니다. 그리고 전자공학의 의미를 저에게 일깨워주신 조용성교수님께 감사의 마음을 전합니다. 아르바이트를 하며 기계설계의 길을 가게 해주신 김형회사장님, 양표형, 승재누나에게도 감사의 마음을 전합니다.

그리고 저에게 많은 도움과 지도를 해주신 다른 분들께도 감사의 마음을 전합니다.

2003년 12월 30일

백 창 열